Digitized by Google

32/2.87
32/2.67

Sci 885.25

BOUGHT WITH
THE BEQUEST OF
HORACE APPLETON HAVEN,
Of Portsmouth, N. H.
(Class of 1842.)

Rec'd 1 July, 1871.

SCIENCE CENTER LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Archiv

der

Mathematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,

Professor zu Greifswald.

Sechsundvierzigster Theil.

Mit neun lithographirten Tafeln.

Greifswald.

C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung,

Th. Kunike.

1866.

Digitized by Google

~~1354~~
Sci 885.25

1871, July 1.
Haven Fund.

Digitized by Google

Inhaltsverzeichniss des sechsundvierzigsten Theils.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.

Arithmetik.

III.	Integration der Differentialgleichung $x\frac{d^ny}{dx^n}+\lambda\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\varkappa\left(x\frac{dy}{dx}+\mu y\right)$, in welcher λ, $\varkappa$ und μ constante Zahlen bezeichnen. Von Herrn Simon Spitzer, Professor am Polytechnikum in Wien	I.	25
IV.	Kennzeichen, ob eine Gleichung dem numerischen Werthe nach gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Wurzeln besitze. Von Herrn Franz Müller, Professor am Königl. Böhm. Polytechnikum in Prag	I.	32
V.	Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen. Von Herrn Professor Dr. Dienger an der polytechnischen Schule in Carlsruhe . . .	I.	34
IX.	Verwandlung der irrationalen Grösse $\sqrt[n]{}$ in einen Kettenbruch. Von Herrn P. Seeling, Lehrer in Hückeswagen	I.	80
XVI.	Zur Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung mittelst Aufsteigen zu höherer (zweiter) Ordnung. Von Herrn Professor Dr. J. Dienger am Polytechnikum in Carlsruhe . . .	III.	317

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XIX.	Ueber die Summe: $a^3+(a+d)^3+(a+2d)^3+....+(a+nd)^3$. Von dem Herausgeber	III.	326
XIX.	Ueber die Summe: $\left\{\frac{1.2}{1.2}\right\}^2+\left\{\frac{2.3}{1.2}\right\}^2+\left\{\frac{3.4}{1.2}\right\}^2+....+\left\{\frac{n(n+1)}{1.2}\right\}^2$. Von dem Herausgeber	III.	327
	Druckfehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln (No. 18. und No. 19.)	III.	360
XXII.	Ueber die Zerlegung einer ganzen rationalen Funktion in Faktoren. Von Herrn Professor C. A. Bretschneider am Gymnasium zu Gotha	IV.	422
XXV.	Schreiben des Herrn Professor Dr. Ligowski in Berlin an den Herausgeber, betreffend die Aufgabe in Theil XLV. S. 220	IV.	503

Geometrie.

I.	Ueber das vierte Porisma von Fermat. Von Herrn Professor Dr. Ofterdinger und Herrn Rector Dr. Nagel in Ulm	I.	1
VII.	Ueber eine Eigenschaft der Hyperbel. (Mit Bezugnahme auf einen Aufsatz des Herrn Professor Nicola Cavalieri San Bertolo, Commend., in den „Atti dell' Accademia Pontificia de' nuovi Lincei." Anno XIX. Sess. III^a. 24 Febbr. 1866). Von Herrn C. Thiel, Kandidaten der Mathematik in Greifswald . .	I.	45
VIII.	Konstruktion der Intensitätslinien eines dreiaxigen Ellipsoids mit Benützung einer Kugelscala. Von Herrn Emil Koutny, Assistenten der descriptiven Geometrie am K. K. technischen Institute in Brünn	I.	49
X.	Auf das Entfernungsorts-Dreieck Bezügliches. Von Herrn Professor Dr. H. Emsmann an der Realschule 1. Ordnung in Stettin	II.	121
XII.	Zur Construction von Dreiecken mit Benutzung		

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	der Eigenthümlichkeiten des Entfernungsorts-dreiecks. Von Herrn Professor Dr. H. Emsmann an der Realschule 1. Ordnung in Stettin	II.	147
XV.	Lösung zweier Aufgaben über Berechnung der Flächeninhalte verschiedentlich bestimmter Ellipsen. Von Herrn Dr. Wilhelm Matzka, Professor der Mathematik an der Universität in Prag	III.	300
XVII.	Elementar-geometrischer Beweis des Satzes: Die Kegelschnitte werden von den in den Kegel gelegten Kugeln in ihren Brennpunkten berührt. Von Herrn Dr. F. C. Fresenius, Lehrer an der höheren Bürgerschule in Frankfurt a. M.	III.	321
XIX.	Beweise des Satzes: Die Höhendurchschnittspunkte der vier Dreiecke, die ein vollständiges Viereck darbietet, liegen in einer geraden Linie.		
	A. Von Herrn Carl Schmidt in Spremberg.	III.	328
	B. Von Herrn Oberlehrer v. Behr in Königsberg i. Pr.	III.	330
	C. Von Herrn Oberlehrer Dr. Stammer an der Realschule in Düsseldorf	III.	331
XIX.	Ueber zwei Sätze des Herrn Alessandro Dorna, Professor in Turin (s. Thl. XLV. S. 218. S. 219.) Von Herrn Oberlehrer v. Behr in Königsberg i. Pr.	III.	330
XIX.	Ueber die Umkehrung des Ptolemäischen Lehrsatzes, über die Transversalen des Tetraeders, und Sätze über die Transversalen im Viereck. Von Herrn Oberlehrer Dr. Stammer an der Realschule in Düsseldorf	III.	331
XIX.	Bemerkung über die Berechnung des Flächeninhalts geradliniger Figuren durch Trapezia. Von dem Herausgeber	III.	335
XIX.	Zur geometrischen Construction der vierten und der mittleren Proportionale. Von Herrn Dr. K. Weihrauch in Arensburg auf der Insel Oesel in Livland	III.	337

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
XIX.	Ueber einen Satz von der Hyperbel. Von dem Herausgeber	III.	337
XIX.	Einige Bemerkungen über das von den, von den Spitzen eines Dreiecks nach den Mittelpunkten der Gegenseiten gezogenen Transversalen als Seiten gebildete Dreieck. Von dem Herausgeber	III.	340
XIX.	Bemerkungen zur elementaren Berechnung des Kreisumfangs. Von dem Herausgeber	III.	345
XIX.	Ueber die in Thl. XLV. Heft 2. S. 219. mitgetheilte Summirungsformel des Herrn Alessandro Dorna in Turin. Von Herrn M. Curtze, Lehrer am Gymnasium in Thorn	III.	357
XXI.	Eine stereometrische Schulaufgabe, welche zu einer leichten Inhaltsbestimmung eines Ellipsoides führt. Von Herrn Hermann Martus, Oberlehrer an der Königstädtischen Realschule in Berlin	IV.	419
XXIII.	Die Gleichungen der regulären Vielecke und Zerlegung derselben in Gleichungen niederer Grade. Von Herrn Professor W. Schoenborn in Krotoschin	IV.	425
XXIV.	Bestimmung des kürzesten Abstandes zweier im Raume gelegener nicht paralleler Geraden. Von Herrn Professor C. A. Bretschneider am Gymnasium zu Gotha	IV.	501

Trigonometrie.

XI.	Goniometrischer Beweis der von Herrn Dr. Lindman in Strengnäs Archiv Thl. XLV. Nr. XVII. S. 348. mitgetheilten Relationen. Von Herrn C. Thiel, Kandidaten der Mathematik in Greifswald	II.	143
XIX.	Einfacher Beweis der Formel $e^{xi} = \cos x + i \sin x$. Von Herrn Dr. K. L. Baur, Assistenten der Physik am Polytechnikum in Carlsruhe	III.	366
XIX.	Ueber denselben Gegenstand wie vorher (XI.).		

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
	Von Herrn Gymnasial-Oberlehrer Dr. Meyer in Bunzlau (Schlesien)	III.	359

Geodäsie.

VI.	Ueber den mittleren Fehler der Resultate aus trigonometrischen Messungen. Von Herrn Doctor Börsch, ord. Lehrer an der höheren Gewerbeschule in Cassel	I.	40

Mechanik.

II.	Ueber das Problem der Rotation eines festen Körpers. Von Herrn Professor Dr. Ladislaus Zajączkowski in Warschau	I.	19
XIII.	Neue analytische Entwickelung der allgemeinsten Gesetze der Statik. Von dem Herausgeber	II. III.	152 241
XIV.	Der Mittelpunkt oder das Centrum beliebig vieler auf beliebige Weise in einer und derselben Ebene wirkender Kräfte. Von dem Herausgeber	III.	276
XX.	Wurfbewegung im widerstehenden Mittel und Construction der Flugbahn. Von Herrn Dr. A. M. Nell, Lehrer an der technischen Schule zu Darmstadt	IV.	361

Uebungsaufgaben für Schüler.

XVIII.	Zwei arithmetische Aufgaben, die erste nach Herrn Tardy, Professor in Genua, mitgetheilt von dem Herausgeber	III.	324
XVIII.	Drei geometrische Lehrsätze zu beweisen, der dritte nach Herrn Cesare Toscani, Professor in Siena, mitgetheilt von dem Herausgeber	III.	325

Digitized by Google

Nr. der Abhandlung.	Heft.	Seite.

Literarische Berichte *).

CLXXXI.	I.	1
CLXXXII.	II.	1
CLXXXIII.	III.	1
CLXXXIV.	IV.	1

*) Jede einzelne Nummer der Literarischen Berichte ist für sich besonders paginirt von Seite 1 an.

Digitized by Google

I.

Ueber das vierte Porisma von Fermat.

Von

Herrn Prof. Dr. *Ofterdinger* und Herrn Rector Dr. *Nagel*
in Ulm.

Vorerinnerung.

In der Gesellschaft für Mathematik und Naturwissenschaften in Ulm wurde von Unterzeichnetem ein Vortrag über das vierte Porisma von Fermat gehalten. In einer der nächsten Sitzungen hielt Herr Rector Dr. Nagel einen Vortrag über denselben Gegenstand, wobei er nachfolgende Zusätze entwickelte. Die Gesellschaft beschloss beide Vorträge zum Abdruck in das Archiv für Mathematik und Physik einzuschicken.

Ulm, 18. Mai 1866. Ofterdinger.

Ueber das vierte Porisma von Fermat von Herrn Dr. Ludwig Felix Ofterdinger.

In Hutton's Philos. and Mathem. Dictionary Art. Circle. nro. 19. kommt ohne Beweis nachfolgender wichtige Satz vor, welcher das vierte Porisma von Fermat ist (P. Fermat varia opera mathem. Tolos. 1689. pag. 118.) und von dem Euler (Novi Comm. Petropol. tom. I. pag. 49.) und R. Simson (opera quaedam reliqua math. Glasg. 1776. Prop. 83.) einen Beweis geliefert hat. (Vergleiche hierüber: Porismen nach R. Simson bearbeitet und vermehrt von A. Richter. Elbing 1837. pag. 148.)*). Obschon die Beweise von Euler und

*) M. vergl. auch Archiv. Thl. XXVII. S. 116. — Thl. XXX. S. 120. S. 246. — Thl. XXXI. S. 61. S. 295. — Thl. XXXII. S. 125. G.

Digitized by Google

Simson an Kürze und Eleganz nichts zu wünschen übrig lassen, so folgt hier doch ein von den genannten abweichender Beweis, der zur nachfolgenden Verallgemeinerung am bequemsten sein möchte.

Satz I. Taf. I. Fig. 1. und Fig. 2.

Wenn man an den Durchmesser AB eines Kreises ein Rechteck $ABCD$ legt, dessen Höhe AD gleich ist der Seite AE eines in den Kreis beschriebenen Quadrats, und aus den Ecken C und D desselben nach einem beliebigen Punkt P des Umfanges dieses Kreises gerade Linien CP und DP zieht, welche den Durchmesser AB in M und N schneiden, so ist:

$$AM^2 + BN^2 = AB^2.$$

Beweis.

I. Es liege der Punkt P auf dem gegen CD concaven Theil des Umkreises. Taf. I. Fig. 1.

Ziehe durch den Mittelpunkt H und durch den Punkt P auf DC die Normalen FG und PR, welche letztere die AB in Q schneidet, und verbinde H und P und ebenso G und P durch gerade Linien.

$$\text{Nun ist } \left.\begin{aligned} AM^2 + BM^2 &= 2AH^2 + 2HM^2 \\ AN^2 + BN^2 &= 2AH^2 + 2HN^2 \end{aligned}\right\} \text{ Elem. II. 9,}$$

$$\text{also } AM^2 + AN^2 + BM^2 + BN^2 = 4AH^2 + 2HM^2 + 2HN^2$$
$$= AB^2 + 2HM^2 + 2HN^2.$$

Nun ist $DG = GC$, also $NS = SM$, also

$$HM^2 + HN^2 = 2NS^2 + 2HS^2, \text{ Elem. II. 10,}$$

also:

$$2HM^2 + 2HN^2 = 4NS^2 + 4HS^2 = MN^2 + 4HS^2,$$

daher:

$$1)\ldots AM^2 + AN^2 + BM^2 + BN^2 = AB^2 + MN^2 + 4HS^2.$$

Da $MN : CD = PQ : PR$, so ist, da $BC^2 = AE^2$, also $2BC^2 = 2AE^2 = AB^2 = CD^2$ ist:

$$MN^2 : \begin{Bmatrix} CD^2 \\ 2BC^2 \end{Bmatrix} = PQ^2 : PR^2$$
$$= 2PQ^2 : 2PR^2 \text{ Elem. V. 15,}$$

Digitized by Google

also:

2) . . . . $MN^2 : BC^2 = 2PQ^2 : PR^2$, Elem. V 4.

Weil ferner:

$$HS : \left\{ \begin{matrix} GH \\ BC \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} GR \\ HQ \end{matrix} \right\} : PR,$$

so ist:

$$HS^2 : BC^2 = HQ^2 : PR^2,$$

also:

3) . . . . $4HS^2 : BC^2 = 4HQ^2 : PR^2$.

Verbindet man nro. 2. und nro. 3., so ist nach Elem. V. 24. u. 4.

4) . . . $MN^2 + 4HS^2 : 2PQ^2 + 4HQ^2 = BC^2 : PR^2$.

Endlich ist:

$$NA : DR = \left\{ \begin{matrix} AD \\ BC \end{matrix} \right\} : PR = BM : CR,$$

also:

$$\left\{ \begin{matrix} AN^2 \\ BC^2 \end{matrix} \right\} : \left\{ \begin{matrix} DR^2 \\ PR^2 \end{matrix} \right\} = BM^2 : CR^2$$
$$= AN^2 + BM^2 : DR^2 + CR^2, \text{ Elem. V. 12.}$$

Nun ist aber:

$$DR^2 + CR^2 = 2DG^2 + 2GR^2, \text{ Elem. II. 9.}$$
$$= 2PH^2 + 2HQ^2$$
$$= 2PQ^2 + 4HQ^2, \text{ Elem. I. 47.}$$

Also hat man:

5) . . . . $BC^2 : PR^2 = AN^2 + BM^2 : 2PQ^2 + 4HQ^2$.

Verbindet man nro. 5. mit nro. 4., so hat man nach Elem. V. 11. und 9. $AN^2 + BM^2 = MN^2 + 4HS^2$, und nach nro. 1.:

$$AM^2 + AN^2 + BM^2 + BN^2 = AB^2 + MN^2 + 4HS^2,$$

also:

$$AM^2 + BN^2 = AB^2,$$

q. e. d.

II. Es falle der Punkt P auf den gegen CD convexen Theil des Umkreises, Taf. I. Fig. 2., so fällt der Punkt M in die Verlängerung von AB.

Digitized by Google

Ziehe durch den Mittelpunkt H und durch P auf DC die Normalen GF und PQ, verbinde P mit H und G mit P durch gerade Linien, und verlängere letztere, bis sie die verlängerte AB in S trifft.

Es ist $AM^2 + BM^2 = 2AH^2 + 2HM^2$, Elem. II. 10.
und $AN^2 + BN^2 = 2AH^2 + 2HN^2$, Elem. II. 9.

also:

$$1) \ldots AM^2 + AN^2 + BM^2 + BN^2 = 4AH^2 + 2HM^2 + 2HN^2$$
$$= AB^2 + 4NS^2 + 4HS^2$$
$$= AB^2 + MN^2 + 4HS^2.$$

Nun ist:

$$MN : CD = PQ : PR,$$

also:

$$MN^2 : \left\{ \begin{matrix} CD^2 \\ 2BC^2 \end{matrix} \right\} = PQ^2 : PR^2 = 2PQ^2 : 2PR^2,$$

daher:

$$2) \ldots\ldots MN^2 : BC^2 = 2PQ^2 : PR^2.$$

Ferner ist:

$$HS : \left\{ \begin{matrix} GH \\ BC \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} GR \\ HQ \end{matrix} \right\} : PR,$$

also:

$$HS^2 : BC^2 = HQ^2 : PR^2,$$

folglich:

$$3) \ldots\ldots 4HS^2 : BC^2 = 4HQ^2 : PR^2.$$

Verbindet man nro. 3. mit nro. 5., so hat man nach Elem. V. 24:

$$MN^2 + 4HS^2 : BC^2 = 2PQ^2 + 4HQ^2 : PR^2,$$

also:

$$4) \ldots MN^2 + 4HS^2 : 2PQ^2 + 4HQ^2 = BC^2 : PR^2.$$

Endlich ist:

$$AN : DR = \left\{ \begin{matrix} AD \\ BC \end{matrix} \right\} : PR = BM : CR,$$

also:

$$AN^2 : DR^2 = BM^2 : CR^2.$$

Digitized by Google

Daher nach Elem. V. 12:

$$\left\{\begin{matrix} AN^2 \\ BC^2 \end{matrix}\right\} : \left\{\begin{matrix} DR^2 \\ PQ^2 \end{matrix}\right\} = AN^2 + BM^2 : DR^2 + CR^2.$$

Da nun $DR^2 + CR^2 = 2DG^2 + 2GR^2$, Elem. II. 9

$$= 2PH^2 + 2QH^2 = 2PQ^2 + 4HQ^2,$$

so ist:

$$5) \ldots BC^2 : PQ^2 = AN^2 + BM^2 : 2PQ^2 + 4HQ^2.$$

Verbindet man nro. 4. mit nro. 5., so ist nach Elem. V. 11. 9:

$$AN^2 + BM^2 = MN^2 + 4HS^2;$$

nach nro. 1. war:

$$AM^2 + AN^2 + BM^2 + BN^2 = AB^2 + MN^2 + 4HS^2,$$

also

$$AM^2 + BN^2 = AB^2,$$

q. e. d.

1. Zusatz. Verlängert man DP, bis die Peripherie in P' zum zweiten Mal geschnitten wird, und zieht man CP', so ist nach dem ersten Fall:

$$AB^2 = AM'^2 + BN^2,$$

und nach dem zweiten Fall:

$$AB^2 = AM^2 + BN^2;$$

also ist:

$$AM = AM'.$$

Ebenso ist, wenn CP den Kreis zum zweiten Mal in p begegnet und Dpn gezogen wird:

$$AM^2 + Bn^2 = AB^2 = AM^2 + BN^2, \text{ also } Bn = BN.$$

2. Zusatz. Die Linie CP' schneide die Linie Dpn in q. Da $PC.Cp = CB^2$ (Elem. III. 36.) $= DC.CG$ (ex const.), so liegen die Punkte D, P, p, G auf der Peripherie eines Kreises. Und da $P'D.DP = DA^2$ (Elem. III. 36.) $= DC.DG$, so liegen auch die Punkte C, P', P, G auf der Peripherie eines Kreises. Also ist Winkel $DGP = CP'D$ und $P'qD = P'CP + qpC = P'CP + PpD = P'CP + PGD = P'CP + CP'D = DPC$, und daher q auf der Peripherie des Kreises um den Durchmesser AB.

Digitized by Google

Satz II. Taf. I. Fig. 3.

Allgemeiner Satz.

Zieht man in einem Kreis irgend eine Sehne AB, an ihre Endpunkte zwei gleich lange Tangenten AD und BC und zwar so lang, dass sie als Katheten eines gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieckes angesehen werden können, dessen Hypotenuse die Verbindungslinie DC sei (so dass also $AD^2 + BC^2 = DC^2 = 2BC^2 = 2AD^2$, oder, wenn DC in G halbirt wird, $BC^2 = AD^2 = DC.GC$ werde); so wird, wenn man von den Punkten D und C an irgend einen Punkt P der Peripherie gerade Linien zieht, die Sehne AB in den Punkten M und N so geschnitten, dass man hat:

$$AB^2 = AM^2 + BN^2.$$

Beweis.

Man ziehe durch P die LK parallel AB, verbinde G und P durch GP, welche die AB in S treffe, errichte in G die Normale GF, welche die Peripherie in E und F, die AB in H und die LK in R schneide, alsdann hat man:

$$\left.\begin{aligned} AM^2 + BM^2 &= 2AH^2 + 2MH^2 \\ AN^2 + BN^2 &= 2AH^2 + 2NH^2 \end{aligned}\right\} \text{ Elem. II. 9, 10;}$$

also 1) . . . $AM^2 + AN^2 + BM^2 + BN^2 = 4AH^2 + 2MH^2 + 2NH^2$

$$= AB^2 + 2MH^2 + 2NH^2$$

$$= AB^2 + 4NS^2 + 4HS^2$$

(Elem. II. 10), und weil $DG = GC$, also $NS = SM$:

$$= AB^2 + MN^2 + 4HS^2.$$

Da:

$$MN : CD = PM : CP$$
$$= BK : CK,$$

so ist:

$$MN^2 : \left\{\begin{matrix} CD^2 \\ 2BC^2 \end{matrix}\right\} = BK^2 : CK^2$$

$$= 2BK^2 : 2CK^2, \text{ Elem. V. 15,}$$

also:

2) . . . . . $MN^2 : BC^2 = BK^2 : CK^2$, Elem. V. 4.

Und da:

$$HS : PR = GH : GR$$
$$= BC : CK,$$

Digitized by Google

so ist:

$$HS : BC = PR : CK,$$

also:

$$HS^2 : BC^2 = PR^2 : CK^2,$$

oder:

3) . . . . $4HS^2 : BC^2 = 4PR^2 : CK^2.$

Aus nro. 2. und nro. 3. folgt nach Elem. V. 24.:

$$MN^2 + 4HS^2 : BC^2 = 2BK^2 + 4PR^2 : CK^2,$$

also ist:

4) . . . $MN^2 + 4HS^2 : 2BK^2 + 4PR^2 = BC^2 : CK^2.$

Endlich ist:

$$AN : LP = AD : DL$$
$$= BC : CK$$
$$= BM : PK,$$

also:

$$AN^2 : LP^2 = BM^2 : PK^2$$
$$= AN^2 + BM^2 : LP^2 + PK^2,$$ Elem. V. 17,

oder:

5) . . . . $BC^2 : CK^2 = AN^2 + BM^2 : LP^2 + PK^2.$

Verbindet man nro. 5. mit nro. 4., so ist:

$$MN^2 + 4HS^2 : 2BK^2 + 4PR^2 = AN^2 + BM^2 : LP^2 + PK^2.$$

Es ist aber:

$$2BK^2 + 4PR^2 = 2LP.PK + 4PR^2,$$ Elem. III. 36.
$$= 2LP.PK + 2PR^2 + 2PR^2$$
$$= 2PK^2 + 2PR^2,$$ Elem. II. 5.
$$= LP^2 + PK^2,$$ Elem. II. 9.,

folglich:

$$MN^2 + 4HS^2 = AN^2 + BM^2,$$ Elem. V. 9.,

mithin nach nro. 1:

$$AM^2 + BN^2 = AB^2.$$

q. e. d.

Satz III. Taf. I. Fig. 4.

Orts-Satz.

Es sei aMb irgend eine Curve, welche von der ge-

Digitized by Google

raden Linie DE geschnitten, die in F halbirt werde (also $DF = FE$); es sei ferner in F die Normale FC und durch C die gerade Linie GH parallel mit DE gezogen, dann auf GH zwei Punkte A und B gleichweit von C angenommen, also $AC = CB$, und von A und B an irgend einen Punkt M der Curve gerade Linien gezogen, welche die DE in E und S schneiden, so ist, wenn

$$ET^2 + DS^2 = 2k^2,$$

wo k eine Constante bezeichnet, die Curve ein **Kegelschnitt.**

Beweis.

Man vollende das Rechteck $DEGH$, ziehe Tt und Ss parallel mit DG, setze $AC = CB = \alpha$, $DF = FE = \beta$, $CF = \gamma$; ziehe ferner MP senkrecht auf GH, welche die DE in Q schneidet; ziehe AQ, welche die verlängerte CF in O trifft, setze endlich $CP = x$ und $PM = y$.

Da

$$PM : AP = \left\{ \begin{matrix} Tt \\ PQ \end{matrix} \right\} : At$$

oder:

$$y : \alpha - x = \gamma : At,$$

so ist:

$$At = \frac{\gamma(\alpha - x)}{y};$$

und da

$$PM : PB = Ss : Bs,$$

oder:

$$y : \alpha + x = \gamma : Bs,$$

so ist:

$$Bs = \frac{\gamma(\alpha + x)}{y}.$$

Daher:

$$ET = Ht = HA - At = \alpha + \beta - \frac{\gamma(\alpha - x)}{y},$$

$$DS = Gs = GB - Bs = \alpha + \beta - \frac{\gamma(\alpha + x)}{y};$$

also:

$$\left\{\frac{ET^2+DS^2}{2k^2}\right\} = (\alpha+\beta)^2 - \frac{2\gamma(\alpha+\beta)(\alpha-x)}{y} + \frac{\gamma^2(\alpha-x)^2}{y^2}$$
$$+(\alpha+\beta)^2 - \frac{2\gamma(\alpha+\beta)(\alpha+x)}{y} + \frac{\gamma^2(\alpha+x)^2}{y^2}$$
$$= 2(\alpha+\beta)^2 - \frac{4\alpha(\alpha+\beta)\gamma}{y} + \frac{2\gamma^2(\alpha^2+x^2)}{y^2},$$

also:

$$k^2 = (\alpha+\beta)^2 - \frac{2\alpha(\alpha+\beta)\gamma}{y} + \frac{\gamma^2(\alpha^2+x^2)}{y^2},$$

daher:

$$k^2y^2 = (\alpha+\beta)^2y^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\gamma y + \gamma^2(\alpha^2+x^2),$$

also:

$$0 = \{(\alpha+\beta)^2 - k^2\}y^2 - 2\alpha(\alpha+\beta)\gamma y + \gamma^2(\alpha^2+x^2),$$

eine Gleichung für einen Kegelschnitt.

Wäre:

$$(\alpha+\beta)^2 - k^2 = \gamma^2,$$

so wäre:

$$0 = y^2 - \frac{2\alpha(\alpha+\beta)}{\gamma}y + \alpha^2 + x^2,$$

daher:

$$\frac{\alpha^2(\alpha+\beta)^2}{\gamma^2} - \alpha^2 = \left\{y - \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\gamma}\right\}^2 + x^2,$$

eine Gleichung für einen Kreis.

Da hiernach, wenn O dieses Kreises Mittelpunkt ist,

$$CO = \frac{\alpha(\alpha+\beta)}{\gamma}$$

und

$$CF = \gamma = \frac{\gamma^2}{\gamma},$$

so ist:

$$OF = \frac{\alpha(\alpha+\beta)-\gamma^2}{\gamma};$$

ferner ist dieses Kreises Halbmesser

$$= \sqrt{\frac{\alpha^2(\alpha+\beta)^2}{\gamma^2} - \alpha^2},$$

folglich:

Digitized by Google

$$Fa^2 = \frac{\alpha^2(\alpha+\beta)^2}{\gamma^2} - \alpha^2 - OF^2$$
$$= \frac{\alpha^2(\alpha+\beta)^2}{\gamma^2} - \alpha^2 - \frac{\alpha^2(\alpha+\beta)^2}{\gamma^2} + 2\alpha(\alpha+\beta) - \gamma^2$$
$$= \alpha^2 + 2\alpha\beta - \gamma^2 = (\alpha+\beta)^2 - \beta^2 - \gamma^2 = k^2 - \beta^2,$$

weil

$$(\alpha+\beta)^2 - k^2 = \gamma^2 \text{ (ex hyp.)}$$

also:

$$4Fa^2 = ab^2 = 4k^2 - 4\beta^2.$$

Soll nun $ab^2 = 2k^2$ sein, so muss sein:

$$2k^2 = 4k^2 - 4\beta^2,$$

also:

$$2\beta^2 = k^2.$$

Fällt der Punkt M mit a zusammen, so muss sein:

$$Ea^2 + Da^2 = 2k^2,$$

also:

$$2DF^2 + 2Fa^2 = 2k^2,$$
$$DF^2 + Fa^2 = k^2,$$
$$Fa^2 = k^2 - \beta^2,$$

wie oben.

Wenn $(\alpha+\beta)^2 = k^2$, so folgt aus der allgemeinen Gleichung:

$$0 = -2\alpha(\alpha+\beta)\gamma y + \alpha^2\gamma^2 + \gamma^2 x^2,$$
$$y = \frac{\gamma^2(\alpha^2+x^2)}{2\alpha(\alpha+\beta)\gamma} = \frac{\gamma(\alpha^2+x^2)}{2\alpha(\alpha+\beta)},$$

oder:

$$\frac{2\alpha(\alpha+\beta)}{\gamma} y = \alpha^2 + x^2,$$
$$\frac{2\alpha(\alpha+\beta)}{\gamma} y - \alpha^2 = x^2,$$
$$\frac{2\alpha(\alpha+\beta)}{\gamma} \left\{ y - \frac{\alpha\gamma}{2(\alpha+\beta)} \right\} = x^2,$$

eine Gleichung für eine Parabel, deren Axe CO ist, und deren Scheitel von C absteht um

$$\frac{\alpha\gamma}{2(\alpha+\beta)}.$$

Wenn $(\alpha+\beta)^2 - k^2$ nicht $= 0$ ist, so hat man:

Digitized by Google

$$y^2 - \frac{2\alpha(\alpha+\beta)\gamma}{(\alpha+\beta)^2-k^2}\,y = -\,\frac{\gamma^2(\alpha^2+x^2)}{(\alpha+\beta)^2-k^2},$$

$$\left\{y - \frac{\alpha(\alpha+\beta)\gamma}{(\alpha+\beta)^2-k^2}\right\}^2 = \gamma^2\left\{\frac{\alpha^2(\alpha+\beta)^2}{(\alpha+\beta)^2-k^2} - \frac{\alpha^2(\alpha+\beta)^2-\alpha^2k^2}{[(\alpha+\beta)^2-k^2]^2} - \frac{x^2}{(\alpha+\beta)^2-k^2}\right\}$$

$$= \gamma^2\left\{\frac{\alpha^2k^2}{[(\alpha+\beta)^2-k^2]^2} - \frac{x^2}{(\alpha+\beta)^2-k^2}\right\}$$

$$= \frac{\gamma^2}{(\alpha+\beta)^2-k^2}\left\{\frac{\alpha^2k^2}{(\alpha+\beta)^2-k^2} - x^2\right\},$$

welche Gleichung einer Ellipse oder Hyperbel zugehört, je nachdem $(\alpha+\beta)^2$ grösser oder kleiner als k^2 ist.

Zusätze zum vierten Porisma von Fermat von Herrn Rector Dr. Christian Heinrich Nagel.

§. 1. Allgemeiner Satz A. (Taf. I. Fig. 5.)

Wenn man auf der Seite BC eines beliebigen Dreiecks ABC ein beliebiges Parallelogramm $BCDE$ beschreibt, und von den Ecken D und E desselben nach der BC gegenüberliegenden Winkelspitze A die Geraden AE, AD zieht, welche BC in F und G schneiden, so bilden die durch F und G mit BE gezogenen Parallelen FH, GK die Seiten eines Parallelogramms $FGKH$, welches dem Parallelogramme $BCDE$ ähnlich ist.

Beweis.

$BE:FH = AE:AF = AD:AG = CD:GK$. Nun ist $BE = CD$; also auch $FH = GK$; aber auch $FH \parallel GK \parallel BE$, also ist $FGKH$ ein Parallelogramm, und zwar ist es gleichwinklig mit $BCDE$. Nun ist $ED:FG = AE:AF = BE:HF$; also sind die Seiten beider Parallelogramme proportionirt; folglich sind beide Parallelogramme einander ähnlich.

§. 2. 1. Lehrsatz. (Taf. I. Fig. 6.)

Wenn man auf der Hypotenuse BC eines rechtwinkligen Dreiecks ABC ein Quadrat $BCDE$ beschreibt,

Digitized by Google

und die Spitze des rechten Winkels A mit den Ecken E und D des Quadrats verbindet, so wird die Hypotenuse BC dadurch in F und G so geschnitten, dass $FG^2 = BF.CG$ ist, oder dass das mittlere Stück die mittlere Proportionale ist zwischen beiden äusseren Stücken.

Beweis.

Errichte auf BC in F und G die Perpendikel FH und GK und ziehe HK, so folgt aus dem allgemeinen Satze (§. 1.), dass $FGKH \sim BCDE$, also ein Quadrat ist. Nun ist $\triangle BFH \sim \triangle KGC$ (weil beide rechtwinklig und $HBF = 90^0 - KCG = CKG$ ist); daher ist $BF : GK = FH : CG$; aber $GK = FH = FG$, also ist $BF : FG : CG$, und daher $FG^2 = BF.CG$.

§. 3. **2. Lehrsatz.** (Taf. I. Fig. 6.)

Macht man die Construction des ersten Lehrsatzes (§. 2.), so ist $BG^2 + CF^2 = BC^2 - FG^2$.

Beweis.

$$\begin{aligned} BG^2 + CF^2 &= BG^2 + CG^2 + FG^2 + 2CG.FG \\ &= BG^2 + CG^2 + BF.CG + 2CG.FG \quad \text{(Lehrsatz I. §.2.)} \\ &= BG^2 + CG^2 + 2BF.CG + 2CG.FG - FG^2 \\ &= BG^2 + CG^2 + 2CG.(BF + FG) - FG^2 \\ &= BG^2 + CG^2 + 2CG.BG - FG^2 \\ &= BC^2 - FG^2. \end{aligned}$$

§. 4. **3. Lehrsatz.** (Taf. II. Fig. 7.)

Wenn man auf der Hypotenuse BC eines rechtwinkligen Dreiecks ABC ein Rechteck $BCDE$ beschreibt, dessen andere Seite BE gleich der Kathete BL des über BC als Hypotenuse beschriebenen gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecks ist, und die Spitze des rechten Winkels A mit den Ecken E und D des Rechtecks $BCDE$ verbindet, so wird die Hypotenuse BC dadurch in F und G so geschnitten, dass $FG^2 = 2BF.CG$ ist, oder dass das mittlere Stück die mittlere Proportionale ist zwischen einem der beiden äusseren Stücke und dem Doppelten des anderen Stücks.

Beweis.

Errichte auf BC in F und G die Perpendikel FH und GK und ziehe HK, so folgt aus dem allgemeinen Satze (§. 1.), dass $FGKH \sim BCDE$, also auch ein Rechteck ist, dessen Seiten

Digitized by Google

sich verhalten wie $\sqrt{2}:1$. Nun ist $\triangle BFH \sim \triangle KGC$ (weil beide rechtwinklig und $HBF = 90^0 - KCG = CKG$ ist); daher ist $BF:GK = FH:CG$, also $GK.FH = FH^2 = BF.CG$. Aber $FG^2 = 2FH^2$; also ist $FG^2 = 2BF.CG$, oder: $2BF:FG:CG$ (oder auch $BF:FG:2CG$).

§. 5. **4. Lehrsatz.** (Taf. II. Fig. 7.)

Macht man die Construction des vorigen Lehrsatzes, so ist $BG^2 + CF^2 = BC^2$.

Beweis.

$$
\begin{aligned}
BG^2 + CF^2 &= BG^2 + CG^2 + FG^2 + 2CG.FG \\
&= BG^2 + CG^2 + 2BF.CG + 2CG.FG \quad \text{(Lehrsatz 3. §. 4.)} \\
&= BG^2 + CG^2 + 2CG.(BF + FG) \\
&= BG^2 + CG^2 + 2CG.BG \\
&= BC^2.
\end{aligned}
$$

§. 6. Anderer Beweis des 4. Lehrsatzes in §.
(Taf. II. Fig. 8)

Zieht man BH und CK, so ist:

$$
\begin{aligned}
BG^2 &= BH^2 - GH^2 = AB^2 + AH^2 - \tfrac{1}{2}FG^2 \\
&\qquad \text{(da } FGHK \sim BCDE, \text{ also } FG^2 = 2GH^2) \\
CF^2 &= CK^2 - FK^2 = AC^2 + AK^2 - \tfrac{1}{2}FG^2. \\
\hline
BG^2 + CF^2 &= AB^2 + AC^2 + AH^2 + AK^2 - FG^2 \\
&= BC^2 + KH^2 - FG^2 \\
&= BC^2.
\end{aligned}
$$

Zusatz 1. Zieht man EG und DF, so ist:

$$
\begin{aligned}
EG^2 &= BG^2 + BE^2 = BG^2 + \tfrac{1}{2}BC^2 \\
DF^2 &= CF^2 + CD^2 = CF^2 + \tfrac{1}{2}BC^2 \\
\hline
\text{also } EG^2 + DF^2 &= BG^2 + CF^2 + BC^2 \\
&= BC^2 + BC^2 \\
&= 2BC^2.
\end{aligned}
$$

Zusatz 2. Folglich ist $EG^2 + DF^2 = 2(BG^2 + CF^2)$.

Zusatz 3. Verlängert man AB und AC, bis sie die Verlängerungen von DE in L und M schneiden, so ist wieder $\triangle BEL \sim \triangle CDM$ (weil $ELB = 90^0 - DMC = MCD$ ist); also ist $EL:CD = EB:DM$, und daher $EL.DM = EB.CD = BE^2 = \tfrac{1}{2}BC^2$.

Zusatz 4. Es ist daher $EL.DM = \tfrac{1}{2}(BG^2 + CF^2)$.

Zusatz 5. Denkt man sich unterhalb LM ein Rechteck

Digitized by Google

LMNO construirt, bei welchem wieder $LO^2 = MN^2 = \frac{1}{2}LM^2$ ist, oder (was einerlei ist) welches dem Rechtecke *BCDE* ähnlich ist, so ergiebt sich leicht, dass *AE* verlängert durch *O*, und *AD* durch *N* gehen muss. Denn es ist $AB : AL = BC : LM$, also $= \sqrt{2BE^2} : \sqrt{2LO^2} = BE\sqrt{2} : LO\sqrt{2} = BE : LO$, und daher, weil $BE \parallel LO$ ist, so ist $\triangle ABE \backsim \triangle ALO$, also $LAE = LAO$; folglich fallen *AE* und *AO* auf einander.

Zusatz 6. Es ist daher auch $LD^2 + ME^2 = LM^2$; $OD^2 + NE^2 = 2LB^2 = 2(LM^2 + ME^2)$ u. s. w.

§. 6. **5. Allgemeinerer Lehrsatz** (von dem die Lehrsätze 2. §. 3. u. 4. §. 5. besondere Fälle sind). (Taf. II. Fig. 8.)

Wenn man auf der Hypotenuse *BC* eines rechtwinkligen Dreiecks *ABC* ein Rechteck *BCDE* beschreibt, dessen andere Seite $BE = nBC$ ist und die Spitze des rechten Winkels *A* mit den Ecken *E* und *D* des Rechtecks *BCDE* verbindet, so wird die Hypotenuse *BC* dadurch in *F* und *G* so geschnitten, dass $BG^2 + CF^2 = BC^2 + (1-2n^2)\,FG^2$ ist.

Beweis.

Construirt man wieder das Rechteck *FGHK*, so ist $FGHK \backsim BCDE$ (§. 1.), also $FK = GH = nFG$. Zieht man *BH* und *CK*, so ist:

$$\begin{aligned} BG^2 &= BH^2 - GH^2 = AB^2 + AH^2 - GH^2 \\ CF^2 &= CK^2 - FK^2 = AC^2 + AK^2 - FK^2 \\ \hline BG^2 + CF^2 &= AB^2 + AC^2 + AH^2 + AK^2 - 2FK^2 \\ &= BC^2 + FG^2 - 2n^2 . FG^2 \\ &= BC^2 + (1-2n^2)\,FG^2. \end{aligned}$$

Zusatz 1. Zieht man wieder *EG* und *DF*, so ist:

$$\begin{aligned} EG^2 &= BG^2 + BE^2 = BG^2 + n^2 . BC^2 \\ DF^2 &= CF^2 + CD^2 = CF^2 + n^2 . BC^2 \\ \hline EG^2 + DF^2 &= BG^2 + CF^2 + 2n^2 . BC^2 = BC^2 + 2n^2 . BC^2 + (1-2n^2)\,FG^2 \\ &= (1+2n^2)\,BC^2 + (1-2n^2)\,FG^2. \end{aligned}$$

Zusatz 2. Ist $n = 1$, d. h. gelten die Voraussetzungen von §. 2., so ist $BG^2 + CF^2 = BC^2 + (1-2)\,FG^2 = BC^2 - FG^2$ (wie §. 3.) und $EG^2 + DF^2 = 3BC^2 - FG^2$.

Zusatz 3. Ist $n = \sqrt{\frac{1}{2}}$, d. h. gelten die Voraussetzungen von §. 4., so ist $BG^2 + CF^2 = BC^2 + (1 - 2.\frac{1}{2})\,FG^2 = BC^2$, und $EG^2 + DF^2 = 2BC^2$ (wie §. 5. und §. 6. Zus. 1.).

Zusatz 4. Auch im allgemeinen Falle ist $\triangle BFK \sim \triangle CGH$, also $BF:FK = GH:CG$ oder $BF:nFG:CG$, oder nFG die mittlere Proportionale zwischen BF und CG; woraus sich §. 2. und §. 4. ergiebt.

Zusatz 5. In ähnlicher Weise lassen sich die Zusätze 3—6 in §. 6. verallgemeinern.

§. 7. **Allgemeiner Satz B.** (Taf. II. Fig. 9.)

Wenn man auf der Seite BC eines beliebigen Dreiecks ABC ein beliebiges gleichseitiges Trapez $BCDE$ beschreibt und von den Ecken D und E desselben nach der BC gegenüberliegenden Winkelspitze A die Geraden AE und AD zieht, welche BC in F und G schneiden, so bilden die durch F und G mit den zunächst liegenden nichtparallelen Seiten des Trapezes parallel gezogenen geraden Linien, $FH \parallel BE$ und $GK \parallel CD$, die nichtparallelen Seiten eines zweiten gleichseitigen Trapezes $FGKH$, welches dem Trapeze $BCDE$ ähnlich ist.

Beweis.

$BE:FH = AE:AF = AD:AG = CD:GK$. Nun ist $BE = CD$, also ist auch $FH = GK$. Ferner ist $AB:AH = AE:AF = AD:AG = AC:AK$; daher ist $HK \parallel BC$. Mithin ist $FGKH$ ein Trapez, und zwar ein gleichseitiges, weil $FH = GK$ ist. Da ferner die Seiten von $FGKH$ den Seiten von $BCDE$ parallel sind, so sind beide Trapeze gleichwinklig. Endlich ist $HK:BC = AH:AB = HF:BE = AF:AE = FG:DE$; folglich sind die Seiten von $FGKH$ den Seiten von $BCDE$ proportionirt. Mithin sind beide Trapeze ähnlich.

§. 8. **Aufgabe.** (Taf. II. Fig. 10.)

Ein gleichseitiges Trapez zu construiren, von welchem gegeben sind eine der beiden parallelen Seiten $= a$, die derselben anliegenden Winkel $= \alpha$ und das Verhältniss jeder nichtparallelen Seite zur zweiten parallelen Seite $= b:c$.

Construction.

Mache $AB = a$; an AB lege in A und B zwei Winkel $= \alpha$, verlängere den Schenkel des einen, z. B. des an B liegenden, über B hinaus nach C, auf BC schneide $BD = b$ und auf BA ebenso $BE = c$ ab, ziehe DE und durch B eine Parallele mit DE, bis

sie den Schenkel des an A liegenden Winkels in F trifft; durch F ziehe $FG \parallel AB$, bis es den Schenkel des an B liegenden Winkels in G trifft, so ist $ABGF$ das verlangte Trapez.

B e w e i s.

$AB = a$; zieht man ferner durch B eine Parallele BH mit AF, so ist, weil $FAB = GBA = \alpha$ ist, auch $AFG = BGF$; aber $AFG = BHG$; also auch $BHG = BGH$, und daher $BG = BH$; aber $BH = AF$, weil $ABHF$ ein Parallelogramm ist; mithin ist auch $BG = AF$, oder $ABGF$ gleichseitig. Endlich ist $BGF = DBE$, weil $FG \parallel BE$ ist, und $GBF = BDE$, weil $BF \parallel DE$ ist; also ist $\Delta\, BGF \backsim \Delta\, DBE$, und daher $BG:FG = DB:BE = b:c$.

§. 9. **6. Lehrsatz.** (Taf. II. Fig. 11.)

Wenn man auf der Seite AB eines Dreiecks ABC ein gleichseitiges Trapez $ABDE$, von welchem AB die eine der parallelen Seiten ist, und jede der nicht parallelen Seiten zur zweiten parallelen sich wie $m:n$ verhält, so construirt, dass die an A und B liegenden Winkel gleich dem der Seite AB gegenüberliegenden Dreieckswinkel ACB sind, so theilen die Verbindungslinien der Winkelspitze C des Dreiecks ABC mit den Ecken D und E des Trapezes $ABDE$ die Seite AB des Dreiecks in F und G so in drei Theile, dass das Rechteck $AF.BG$ aus den beiden äusseren Theilen das $\frac{m^2}{n^2}$fache vom Quadrate des mittleren Theiles FG ist, d. h. es ist $AF.BG = \frac{m^2}{n^2} FG^2$.

B e w e i s.

Durch F und G ziehe $FH \parallel AE$ und $GK \parallel DB$, und ziehe HK, so ist $FGKH \backsim EDBA$ (s. den allgemeinen Satz B), also da $AE:ED = m:n$, oder $AE = \frac{m}{n} ED$ ist, so ist auch $FH = \frac{m}{n} FG$. Nun ist $AFH = EAB$ (weil $FH \parallel AE$ ist) $= ACB$ (e. c.) und $HAF = CAB$; also ist $\Delta\, AFH \backsim \Delta\, ACB$. Auf gleiche Weise wird gezeigt, dass $\Delta\, BGK \backsim \Delta\, ACB$ ist; folglich ist $\Delta\, AFH \backsim \Delta\, BGK$ und daher $AF:FH = GK:GB$, oder, weil $FH = GK$ ist, $AF:FH:GB$, also $AF.BG = FH^2 = \frac{m^2}{n^2} FG^2$.

Zusatz 1. Ist $m = n$, d. h. wird das Trapez $ABDE$ so

Digitized by Google

construirt, dass die drei Seiten AE, BD, ED einander gleich werden, so ist auch $FH = FG$, oder $\frac{m}{n} = \frac{1}{1}$. Daher ist auch $AF.BG = FG^2$, oder FG ist die mittlere Proportionale zwischen AF und BG.

Zusatz 2. Ist $ACB = 90^0$, also auch $BAE = ABD = ACB = 90^0$, so geht $ABDE$ in ein Rechteck über. Wenn zugleich $AE = BD = ED$, also $ABDE$ ein Quadrat ist, so ist (Lehrsatz 1. §. 2.) FG die mittlere Proportionale zwischen AF und BG. Lehrsatz 1. §. 2. ist also ein besonderer Fall von Lehrsatz 6. Zusatz 1.

Zusatz 3. Verhält sich $AE:DE$ wie die Seite eines Quadrats zur Diagonale desselben, also $m:n = 1:\sqrt{2}$, so ist $AF.BG = \frac{1}{2}FG^2$ oder $FG^2 = 2AF.BG$.

Zusatz 4. Ist dabei wieder $ACB = 90^0$, also $ABDE$ ein Rechteck, so erscheint Lehrsatz 3. §. 4. als besonderer Fall von Lehrsatz 6. Zusatz 3.

§. 10. 7. Lehrsatz. (Taf. II. Fig. 11.)

Bleibt Alles wie im vorigen Lehrsatze, so ist immer $AG^2 + BF^2 = AB^2 + (1-2\frac{m^2}{n^2})FG^2$.

Beweis.

$$\begin{aligned}
AG^2 + BF^2 &= AG^2 + (BG + FG)^2 \\
&= AG^2 + BG^2 + FG^2 + 2BG.FG \\
&= AG^2 + BG^2 + 2BG.(AG - AF) + FG^2 \\
&= AG^2 + BG^2 + 2BG.AG - 2BG.AF + FG^2 \\
&= (AG + BG)^2 - 2\frac{m^2}{n^2}.FG^2 + FG^2 \text{ (Lehrs. 6. §. 9.)} \\
&= AB^2 + (1 - 2\frac{m^2}{n^2})FG^2.
\end{aligned}$$

Zusatz 1. Ist wieder $m = n$, oder $AE = BD = ED$, so ist $AG^2 + BF^2 = AB^2 - FG^2$.

Zusatz 2. Ist zugleich $ACB = 90^0$, also $ABDE$ wieder ein Rechteck, so erhält man Lehrsatz 2. §. 3. als besonderen Fall von Lehrsatz 7. Zusatz 1.

Zusatz 3. Verhält sich $AE:DE$ wie die Seite eines Quadrats zur Diagonale desselben, also $m:n = 1:\sqrt{2}$, so ist $AG^2 + BF^2 = AB^2$.

Zusatz 4. Ist dabei zugleich $ACB = 90^0$, also $ABDE$ wie-

Digitized by Google

der ein Rechteck, so erhält man Lehrsatz 4. §. 5. als besonderen Fall von Lehrsatz 7. Zusatz 3.

Zusatz 5. Beschreibt man einen Kreis, von welchem AB Chorde und AE, also auch BD, Tangente ist, so geht dieser Kreis durch die Spitze C des Dreiecks ABC, und das Trapez $ABDE$ gehört auch zu jedem anderen über AB als Grundlinie beschriebenen Dreiecke, dessen Spitze auf der Peripherie des Kreisabschnittes ACB liegt, da der Winkel dieses Kreisabschnitts konstant $= ACB$, also auch $= BAE$ ist. Dadurch geht der voranstehende Zusatz 4. in Satz I. und Zusatz 3. in Satz II. von Herrn Professor Ofterdinger über, welche also beide besondere Fälle des 7. Lehrsatzes sind. Ebenso liessen sich durch Zusatz 1. u. 2. zwei analoge Porismata wie Satz I. und II. ableiten für den Fall, dass $m = n$, oder dass $AE = BD = CD$ wird.

Zusatz 6. (Taf. II. Fig. 11.). Verlängert man CA und CB, bis sie die Verlängerungen von DE in L und M schneiden, so ergibt sich leicht, dass $\Delta AEL \backsim \Delta HFA$ und $\Delta BDM \backsim \Delta CGB$ ist; mithin ist auch $\Delta AEL \backsim \Delta BDM$, und daher $LE:BD = AE:DM$, oder, weil $AE = BD$ ist, $LE:AE:DM$. Daher ist AE mittlere Proportionale zwischen LE und DM, also $AE^2 = LE.DM$. Aber $AE^2 = \frac{m^2}{n^2} ED^2$; folglich ist auch hier $LE.DM = \frac{m^2}{n^2} ED^2$, woraus sich wieder für die besonderen Fälle, dass $m:n = 1:1$, oder $m:n = 1:\sqrt{2}$, und ebenso dass $ACB = 90^\circ$ ist, besondere Sätze ergeben.

Zusatz 7. Auch ergibt sich auf gleiche Weise wie in §. 6. Zusatz 5, dass, wenn man auf LM ein gleichseitiges Trapez konstruirt, welches dem Trapeze $ABDE$ und dem Trapeze $HKGF$ ähnlich ist, die Verlängerungen von CE und CD durch die Winkelspitzen dieses Trapezes gehen müssen, und so fort in infinitum.

Schlussbemerkung.

Es ist einleuchtend, dass die bisherigen Sätze sämmtlich auch in der Form von geometrischen Oertern ausgesprochen werden können, z. B.: „Wenn in einem gleichseitigen Trapeze die eine der parallelen Seiten gleich jeder der nichtparallelen ist, so ist ein über der zweiten parallelen Seite so beschriebener Kreisabschnitt, dass jede nichtparallele Seite Tangente an denselben ist, der geometrische Ort für die Spitzen aller über der ersten Parallele beschriebenen Dreiecke, deren Seiten die zweite Parallele in drei stetig proportionirte Stücke theilen.

II.

Ueber das Problem der Rotation eines festen Körpers.

Von

Herrn Professor Dr. Ladislaus Zajączkowski

in Warschau.

Herr Richelot gibt in seiner Abhandlung über das Problem der Rotation eines festen Körpers' die bekannten Störungsgleichungen in der Form, wie sie von Jacobi im 5ten Bande der Comptes rendus aufgestellt worden sind und erwähnt, dass der Beweis theils in der Abhandlung Jacobi's (Crelle, Band XVII.) begründet ist, theils auf dieselbe Weise ausgeführt werden kann, deren sich Desboves (Liouville, Band XIII.) in einem specielleren Fall bedient. Der allgemeine Beweis, dessen ich mich bei meinen Vorlesungen über analytische Mechanik an der hiesigen Hochschule bediene, dürfte wegen seiner Klarheit und, fast möchte ich sagen, wegen seiner elementaren Darstellung, wohl werth sein, bei'm Unterrichte in der analytischen Mechanik berücksichtigt zu werden.

1. Sei mir erlaubt zuerst eine rapide Darstellung einiger bekannten Formeln vorauszuschicken. Sind

$$1) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad F_k = 0 \qquad [k = 1, 2, \ldots, p]$$

p Bedingungsgleichungen, denen die Coordinaten eines Systems von n materiellen Punkten unterworfen sind, sind ferner x_r, y_r, z_r die Coordinaten desjenigen Systempunktes, dessen Masse m_r

Digitized by Google

ist, sind endlich X_r, Y_r, Z_r die nach den Coordinatenaxen genommenen Componenten der auf m_r wirkenden Kraft, so lassen sich im Falle der Kräftefunction, wo also

$$X_r = \frac{\partial U}{\partial x_r}, \quad Y_r = \frac{\partial U}{\partial y_r}, \quad Z_r = \frac{\partial U}{\partial z_r}$$

ist, die Bewegungsgleichungen des Systems so darstellen:

$$2) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} m_r \frac{d^2 x_r}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial x_r} + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial x_r}, \\ m_r \frac{d^2 y_r}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial y_r} + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial y_r}, \\ m_r \frac{d^2 z_r}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z_r} + \sum_{k=1}^{k=p} \lambda_k \frac{\partial F_k}{\partial z_r}. \end{aligned} \right. \quad [r = 1, 2, \ldots, n]$$

Bekanntlich lassen sich in Folge der p Bedingungsgleichungen 1) die $3n$ Coordinaten durch $3n - p = m$ andere Variabele q_s $[s = 1, 2, \ldots, m]$ ausdrücken. Führt man letztere ein, so lassen sich die Bewegungsgleichungen 2) nach Lagrange in die Form bringen:

$$3) \ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0, \\ &\frac{dq_s}{dt} = q_s'; \end{aligned} \right. \quad [s = 1, 2, \ldots, m]$$

wo T die Summe der lebendigen Kräfte des Systems in den neuen Variabeln q_s, q_s' ausgedrückt bezeichnet.

Setzt man endlich

$$4) \ldots\ldots\ldots \frac{\partial T}{\partial q_s'} = p_s,$$

bestimmt aus diesen m Gleichungen die q_s' durch p_s, substituirt die erhaltenen Werthe in obige Gleichungen 3), so werden selbe, falls 1) die Zeit t nicht explicite enthält, in die Form gebracht:

$$5) \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{aligned} \frac{dq_s}{dt} &= \frac{\partial(T-U)}{\partial p_s}, \\ \frac{dp_s}{dt} &= \frac{\partial(U-T)}{\partial q_s}; \end{aligned} \right. \quad [s = 1, 2, \ldots, m]$$

wo T den Werth bezeichnet, welchen die Summe der lebendigen

Digitized by Google

Kräfte nach vollzogener Substitution der Werthe für q_s' aus 4) annimmt.

Denkt man sich nun die p_s als partielle Differentialquotienten Ister Ordnung einer Function q der Variabeln q_s nach q_s genommen, setzt also allgemein

$$p_s = \frac{\partial q}{\partial q_s},$$

so wird nach dem Hamilton-Jacobi'schen Satze die vollständige Lösung (solution complète) der partiellen Differentialgleichung Ister Ordnung

$$6) \quad T - U + \alpha_m = 0,$$

wo α_m eine willkürliche Constante ist, nämlich

$$q = f,$$

wo die Function f die Variabeln q_s (ohne t) und $m-1$ willkürliche Constanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{m-1}$, von denen keine bloss addirt ist, enthält, die Eigenschaft besitzen, dass das System

$$7) \quad \begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial q_1} = p_1, \quad \frac{\partial f}{\partial q_2} = p_2, \ldots, \frac{\partial f}{\partial q_m} = p_m; \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \alpha_{m-1}} = \beta_{m-1}; \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha_m} + t = \beta_m; \end{gathered}$$

wo $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ weitere m willkürliche Constanten sind, die Integralgleichungen der Bewegungsgleichungen 5) darstellen wird.

Ist nun Ω eine zur Kräftefunction hinzutretende, die sogenannte Störungsfunction, so werden die Differentialgleichungen des gestörten Problems sein:

$$8) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dq_s}{dt} &= \frac{\partial(T - U - \Omega)}{\partial p_s}, \\ \frac{dp_s}{dt} &= \frac{\partial(U + \Omega - T)}{dq_s}. \end{aligned} \right. \qquad [s = 1, 2, \ldots, m]$$

Lagrange (Mécanique analytique III. edit. tome Ir. p. 310) hat gezeigt, dass, wenn man die Anfangswerthe der Variabeln q_s, p_s, die ich respective durch a_s, b_s bezeichne, als die zu variirenden Constanten einführt, die Gleichungen 8) umgeformt werden in:

$$9) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{da_s}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial b_s}, \\ \frac{db_s}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial a_s}; \end{aligned} \right. \qquad [s = 1, 2, \ldots, m]$$

Digitized by Google

aus denen diejenigen Zeitfunctionen a_s, b_s zu bestimmen sind, welche, für a_s, b_s in die Lösung 7) des ungestörten Problems 5) substituirt, jene Lösung in die Lösung des gestörten Problems 8) umwandeln.

Es ist aber ein Uebelstand, dass die Integration der Gleichungen 5) nicht die Constanten a_s, b_s eingeführt hat; daher wäre es wünschenswerth, ebenso einfache Gleichungen, wie jene 9), aufstellen zu können, aus denen unmittelbar die Zeitfunctionen für die Integrationsconstanten α_s, β_s berechnet werden könnten. Jacobi hat dieses Problem gelöst, indem er am angegebenen Orte gezeigt hat, dass, wenn man in den Gleichungen 8) des gestörten Problems für die Variabeln q_s, p_s die Constanten α_s, β_s einführt, jene Gleichungen in andere von derselben Form wie die 9), nämlich in

$$10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha_s}{dt} &= \frac{\partial \Omega}{\partial \beta_s}, \\ \frac{d\beta_s}{dt} &= -\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_s} \end{aligned} \right. \qquad [s=1,2,\ldots,m]$$

übergeben. Den Beweis dieses wichtigen Satzes hat Desboves (wie gesagt) in einem speciellen Falle geliefert, der allgemeine Beweis wäre etwa folgender.

2. Setzt man in 7) $t=0$, und ersetzt gleichzeitig die Variabeln q_s, p_s durch ihre respectiven Anfangswerthe a_s, b_s, so erhält man den Zusammenhang zwischen den Constanten a_s, b_s und jenen α_s, β_s in der Form:

$$11) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a_s} &= b_s, \\ \frac{\partial f}{\partial \alpha_s} &= \beta_s. \end{aligned} \right. \qquad [s=1,2,\ldots,m]$$

Aus diesen Gleichungen kann man die Constanten a_s, b_s durch α_s, β_s und umgekehrt die Constanten α_s, β_s durch a_s, b_s ausdrücken.

Denkt man sich die a_s, b_s durch α_s, β_s ausgedrückt und in Ω, wie sie in 9) vorkommt, hinein substituirt, so wird Ω als eine Function der α_s, β_s allein zu betrachten sein. Ihre Differentiation nach α_s, β_s gibt:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \alpha_s} = \sum_{v=1}^{v=m} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial a_v} \frac{\partial a_v}{\partial \alpha_s} + \frac{\partial \Omega}{\partial b_v} \frac{\partial b_v}{\partial \alpha_s} \right],$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \beta_s} = \sum_{v=1}^{v=m} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial a_v} \frac{\partial a_v}{\partial \beta_s} + \frac{\partial \Omega}{\partial b_v} \frac{\partial b_v}{\partial \beta_s} \right];$$

Digitized by Google

oder nach 9):

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_s}=\sum_{v=1}^{v=m}\left[\frac{da_v}{dt}\frac{\partial b_v}{\partial\alpha_s}-\frac{db_v}{dt}\frac{\partial a_v}{\partial\alpha_s}\right],$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_s}=\sum_{v=1}^{v=m}\left[\frac{da_v}{dt}\frac{\partial b_v}{\partial\beta_s}-\frac{db_v}{dt}\frac{\partial a_v}{\partial\beta_s}\right].$$

Nun ist:

$$\frac{da_v}{dt}=\sum_{u=1}^{u=m}\left[\frac{\partial a_v}{\partial\alpha_u}\frac{d\alpha_u}{dt}+\frac{\partial a_v}{\partial\beta_u}\frac{d\beta_u}{dt}\right],$$

$$\frac{db_v}{dt}=\sum_{u=1}^{u=m}\left[\frac{\partial b_v}{\partial\alpha_u}\frac{d\alpha_u}{dt}+\frac{\partial b_v}{\partial\beta_u}\frac{d\beta_u}{dt}\right].$$

Setzt man daher diese Werthe in obige Ausdrücke und führt folgende Bezeichnungen ein:

$$12)\quad\left\{\begin{aligned}
&\sum_{v=1}^{v=m}\left[\frac{\partial a_v}{\partial\alpha_u}\frac{\partial b_v}{\partial\alpha_s}-\frac{\partial a_v}{\partial\alpha_s}\frac{\partial b_v}{\partial\alpha_u}\right]=[\alpha_u,\ \alpha_s],\\
&\sum_{v=1}^{v=m}\left[\frac{\partial a_v}{\partial\beta_u}\frac{\partial b_v}{\partial\alpha_s}-\frac{\partial a_v}{\partial\alpha_s}\frac{\partial b_v}{\partial\beta_u}\right]=[\beta_u,\ \alpha_s],\\
&\sum_{v=1}^{v=m}\left[\frac{\partial a_v}{\partial\alpha_u}\frac{\partial b_v}{\partial\beta_s}-\frac{\partial a_v}{\partial\beta_s}\frac{\partial b_v}{\partial\alpha_u}\right]=[\alpha_u,\ \beta_s],\\
&\sum_{v=1}^{v=m}\left[\frac{\partial a_v}{\partial\beta_u}\frac{\partial b_v}{\partial\beta_s}-\frac{\partial a_v}{\partial\beta_s}\frac{\partial \beta_v}{\partial\beta_u}\right]=[\beta_u,\ \beta_s];
\end{aligned}\right.$$

so erhält man die bekannten Formeln:

$$13)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha_s}&=\sum_{u=1}^{u=m}[\alpha_u,\ \alpha_s]\frac{d\alpha_u}{dt}+\sum_{u=1}^{u=m}[\beta_u,\ \alpha_s],\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad[s=1,2,\ldots,m]\\
\frac{\partial\Omega}{\partial\beta_s}&=\sum_{u=1}^{u=m}[\alpha_u,\ \beta_s]\frac{d\alpha_u}{dt}+\sum_{u=1}^{u=m}[\beta_u,\ \beta_s].
\end{aligned}\right.$$

Es ist nun leicht zu zeigen, dass die Coefficienten

$$[\alpha_u,\ \alpha_s],\quad [\beta_u,\ \beta_s]$$

für jede Combination der Indices u, s aus der Reihe $1, 2, \ldots, m$ gleich Null, und die beiden anderen Coefficienten

$$[\beta_u,\ \alpha_s],\quad [\alpha_u,\ \beta_s]$$

nur dann von Null verschieden sind, wenn die Indices u, s einander gleich sind, und zwar wird in dem besonderen Falle $u=s$

$$[\alpha_s,\ \beta_s]=-[\beta_s,\ \alpha_s]=+1$$

sein.

Digitized by Google

Der Beweis ist mit Hülfe der Gleichungen 11) leicht zu führen.

Differentiirt man die Function f, wie sie in 11) vorkommt, total nach α_s und bedenkt, dass f die Grösse α_s nicht nur explicite, sondern auch implicite enthält, insofern nämlich die in ihr enthaltenen Grössen a_s von α_s nach 11) abhängen, so wird

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_s} = \left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_s}\right) + \sum_{v=1}^{v=m} \frac{\partial f}{\partial a_v} \frac{\partial a_v}{\partial \alpha_s},$$

oder, da nach 11) der nach dem expliciten α_s genommene Differentialquotient

$$\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha_s}\right) = \beta_s,$$

und überdiess

$$\frac{\partial f}{\partial a_v} = b_v$$

ist,

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_s} = \beta_s + \sum_{v=1}^{v=m} b_v \frac{\partial a_v}{\partial \alpha_s}.$$

Ebenso findet man

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha_u} = \beta_u + \sum_{v=1}^{v=m} b_v \frac{\partial a_v}{\partial \alpha_u}.$$

Differentiirt man die beiden letzten Gleichungen nochmals, und zwar die erste nach α_u, die letzte nach α_s, und zieht hernach die erste von der letzten ab, so findet man nach 12)

$$[\alpha_u, \alpha_s] = 0,$$

indem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_s \partial \alpha_u} = \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha_u \partial \alpha_s}, \quad \frac{\partial^2 a_v}{\partial \alpha_s \partial \alpha_u} = \frac{\partial^2 a_v}{\partial \alpha_u \partial \alpha_s}$$

ist.

Geht man von den Differentialquotienten $\frac{\partial f}{\partial \beta_s}$, $\frac{\partial f}{\partial \beta_u}$ aus, und differentiirt man selbe nochmals respective nach β_u, β_s, so findet man ebenso:

$$[\beta_u, \beta_s] = 0.$$

Auf dieselbe Weise wird der Satz für die beiden anderen Coefficienten bewiesen.

Hiermit gehen die Gleichungen 13) über in:

Digitized by Google

$$14) \quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_s}{dt} = \dfrac{\partial\Omega}{\partial\beta_s}, \\ \dfrac{d\beta_s}{dt} = -\dfrac{\partial\Omega}{\partial\alpha_s}; \end{cases} \qquad [s=1,2,\ldots,m]$$

welches die Jacobi'schen Gleichungen sind.

III.

Integration der Differentialgleichung

$$x\frac{d^ny}{dx^n}+\lambda\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \varkappa\left(x\frac{dy}{dx}+\mu y\right), \tag{1}$$

in welcher λ, $\varkappa$ und μ constante Zahlen bezeichnen.

Von

Herrn *Simon Spitzer*,

Professor am Polytechnikum in Wien.

Das Integrale der Gleichung (1) ist, nach der Laplace'schen Methode bestimmt, folgendes:

(2)

$$y = C_1\int_0^{u_1} e^{ux}u^{\mu-1}(u^{n-1}-\varkappa)^{\frac{\lambda-\mu}{n-1}-1}du$$

$$+C_2\int_0^{u_2} e^{ux}u^{\mu-1}(u^{n-1}-\varkappa)^{\frac{\lambda-\mu}{n-1}-1}du + \ldots$$

$$\ldots + C_{n-1}\int_0^{u_{n-1}} e^{ux}u^{\mu-1}(u^{n-1}-\varkappa)^{\frac{\lambda-\mu}{n-1}-1}du,$$

Digitized by Google

vorausgesetzt, dass

$$u_1, \quad u_2, \ldots, u_{n-1}$$

die $n-1$ Wurzeln der Gleichung

$$u^{n-1} - x = 0 \tag{3}$$

bedeuten, μ und $\frac{\lambda-\mu}{n-1}$ positive Zahlen sind, und

$$C_1, \quad C_2, \ldots, C_{n-1}$$

willkürliche Constanten repräsentiren. Man kann y auch so darstellen:

$$y = \int_0^1 u^{\mu-1}(1-u^{n-1})^{\frac{\lambda-\mu}{n-1}-1}[C_1 e^{u_1 u x} + C_2 e^{u_2 u x} + \ldots$$

$$\ldots + C_{n-1} e^{u_{n-1} u x}]\, du,$$

um sich, wenn man will, durch directe Substitution von der Richtigkeit dieses Integrales zu überzeugen.

In dem speciellen Falle, wo μ und $\frac{\lambda-\mu}{n-1}$ ganze positive Zahlen sind, lässt sich die Integration leicht wirklich durchführen; denn man erhält, wenn man von folgender bekannten Formel Gebrauch macht:

$$\int e^{ux}\varphi(u)\, du = e^{ux}\left[\frac{\varphi(u)}{x} - \frac{\varphi'(u)}{x^2} + \frac{\varphi''(u)}{x^3} - \ldots\right], \tag{4}$$

für den in (2) stehenden Werth von y nachstehenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} y = \; & C_1 e^{u_1 x}\left[\frac{\varphi(u_1)}{x} - \frac{\varphi'(u_1)}{x^2} + \frac{\varphi''(u_1)}{x^3} - \ldots\right] \\ & + C_2 e^{u_2 x}\left[\frac{\varphi(u_2)}{x} - \frac{\varphi'(u_2)}{x^2} + \frac{\varphi''(u_2)}{x^3} - \ldots\right] \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + C_{n-1} e^{u_{n-1} x}\left[\frac{\varphi(u_{n-1})}{x} - \frac{\varphi'(u_{n-1})}{x^2} + \frac{\varphi''(u_{n-1})}{x^3} - \ldots\right] \\ & + C_n\left[\frac{\varphi(0)}{x} - \frac{\varphi'(0)}{x^2} + \frac{\varphi''(0)}{x^3} - \ldots\right], \end{aligned} \tag{5}$$

Digitized by Google

$$x\frac{d^ny}{dx^n}+\lambda\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\varkappa(x\frac{dy}{dx}+\mu y)\cdot$$

in welchem

$$C_n=-(C_1+C_2+\ldots.+C_{n-1}) \tag{6}$$

und

$$\varphi(u)=(u^{n-1}-\varkappa)^{\frac{\lambda-\mu}{n-1}-1} \tag{7}$$

ist, und in welchem, weil $\varphi(u)$ als ganze algebraische Function von u vorausgesetzt ist, die in den eckigen Klammern stehenden Polynome abbrechen, somit von endlicher Gestalt sind. Es lässt sich leicht darthun, dass der in (5) stehende Ausdruck der vorgelegten Differentialgleichung genügt, selbst wenn die in (6) stehende Gleichung nicht stattfindet, und dass somit der Ausdruck (5) für willkürliche Werthe von C_1, C_2 .... C_{n-1}, C_n das vollständige Integrale der Gleichung (1) ist.

Sind μ und $\frac{\lambda-\mu}{n-1}$ wohl positive, aber keine ganzen Zahlen, so ist das in (2) stehende y nicht das vollständige Integrale der vorgelegten Gleichung. Die Gleichung (1) ist nämlich von der $n$ten Ordnung, ihr vollständiges Integrale muss somit n willkürliche Constanten enthalten. Das in (2) aufgestellte y hat aber bloss $n-1$ willkürliche Constanten, es muss daher dieses y noch durch ein particuläres Integral completirt werden.

In dem speciellen Falle, wo λ eine ganze positive Zahl ist, ist es mir gelungen, das vollständige Integrale der vorgelegten Differentialgleichung aufzustellen. Bevor ich diess zeige, will ich darthun, dass die zwei Differentialgleichungen:

$$x\frac{d^ny}{dx^n}+\lambda\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\varkappa(x\frac{dy}{dx}+\mu y), \tag{1}$$

$$x\frac{d^nz}{dx^n}+(\lambda+n-1)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}=\varkappa(x\frac{dz}{dx}+\mu z) \tag{8}$$

Integrale haben, die in folgendem analytischen Zusammenhange stehen:

$$z=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}-\varkappa y. \tag{9}$$

Denn setzt man das so eben aufgestellte z in die Gleichung (8), so erhält man identisch:

Digitized by Google

$$x\frac{d^nz}{dx^n}+(\lambda+n-1)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}-\varkappa(x\frac{dz}{dx}+\mu z)$$
$$=\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[x\frac{d^ny}{dx^n}+\lambda\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}-\varkappa(x\frac{dy}{dx}+\mu y)\right]$$
$$-\varkappa\left[x\frac{d^ny}{dx^n}+\lambda\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}-\varkappa(x\frac{dy}{dx}+\mu y)\right].$$

Es ist also:

$$x\frac{d^nz}{dx^n}+(\lambda+n-1)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}-\varkappa(x\frac{dz}{dx}+\mu z)$$

für

$$z=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}-\varkappa y \tag{9}$$

identisch Null, wenn

$$x\frac{d^ny}{dx^n}+\lambda\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}-\varkappa(x\frac{dy}{dx}+\mu y)$$

gleich Null ist, was zu beweisen war. Es genügt demnach, die Integration der Gleichung (1) zu zeigen für Werthe von λ, die gleich 1, 2, 3, ..., $n-1$ sind, und diess soll nun geschehen.

Ich setze voraus, dass das Integrale der Gleichung

$$x\varphi^{(n)}(x)=\varkappa\varphi(x) \tag{10}$$

bekannt ist, und behaupte dann, dass das y, welches der Gleichung (1) in dem Falle genügt, wo λ eine ganze positive Zahl ist, folgende Form habe:

$$y=\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}}u^{\mu-1}\psi^{(\lambda)}(ux)\,du, \tag{11}$$

woselbst $\varphi^{(\lambda)}(ux)$ der λte Differentialquotient von $\varphi(ux)$ ist. — Um diess zu beweisen, substituire man den eben aufgestellten Werth von y in die Gleichung (1), man erhält sodann, da

$$y'=\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}}u^{\mu}\varphi^{(\lambda+1)}(ux)\,du,$$

$$y^{(n-1)}=\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}}u^{\mu+n-2}\varphi^{(\lambda+n-1)}(ux)\,du,$$

Digitized by Google

$$x\frac{d^n y}{dx^n}+\lambda\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\varkappa\left(x\frac{dy}{dx}+\mu y\right).$$

$$y^{(n)}=\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}}u^{\mu+n-1}\varphi^{(\lambda+n)}(ux)\,du$$

ist, als Resultat der Substitution:

12)

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}}u^{n+\mu-2}[ux\,\varphi^{(\lambda+n)}(ux)+\lambda\varphi^{(\lambda+n-1)}(ux)]\,du$$

$$=\varkappa\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}}u^{\mu-1}[ux\,\varphi^{(\lambda+1)}(ux)+\mu\varphi^{(\lambda)}(ux)]\,du,$$

und diese Gleichung soll identisch stattfinden.

Aus der Gleichung

$$x\varphi^{(n)}(x)=\varkappa\varphi(x) \tag{10}$$

folgt durch λmaliges Differenziren:

$$x\,\varphi^{(\lambda+n)}(x)+\lambda\,\varphi^{(\lambda+n-1)}(x)=\varkappa\,\varphi^{(\lambda)}(x),$$

und setzt man hierein ux anstatt x, so erhält man:

$$ux\,\varphi^{(\lambda+n)}(ux)+\lambda\,\varphi^{(\lambda+n-1)}(ux)=\varkappa\,\varphi^{(\lambda)}(ux).$$

Wird von dieser Gleichung Gebrauch gemacht, so vereinfacht sich die Gleichung (12) und geht über in:

13)

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}}u^{n+\mu-2}\varphi^{(\lambda)}(ux)\,du$$

$$=\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}}u^{\mu-1}[ux\,\varphi^{(\lambda+1)}(ux)+\mu\varphi^{(\lambda)}(ux)]\,du.$$

Nun ist aber:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}}u^{\mu}x\,\varphi^{(\lambda+1)}(ux)\,du=\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}}u^{\mu}\frac{d\varphi^{(\lambda)}(ux)}{du}\,du$$

$$=\left\{e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}}u^{\mu}\varphi^{(\lambda)}(ux)\right\}_0^\infty-\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}}u^{\mu-1}(\mu-u^{n-1})\varphi^{(\lambda)}(ux)\,du;$$

Digitized by Google

folglich hat man, diess berücksichtigend, statt der Gleichung (13) folgende Gleichung:

$$\left\{ e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^{\mu} \varphi^{(\lambda)}(ux) \right\}_0^{\infty} = 0,$$

und diese ist identisch, falls

$$e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^{\mu} \varphi^{(\lambda)}(ux) = 0$$

ist, sowohl für $u = 0$, als auch für $u = \infty$.

Es ist uns somit in dem Falle, als μ und $\frac{\lambda - \mu}{n-1}$ positive Zahlen sind — von denen wenigstens eine gebrochen ist — und λ eine ganze positive Zahl bezeichnet, gelungen, das Integrale der Gleichung (1) abhängig zu machen von dem Integrale der Gleichung:

$$x \varphi^{(n)}(x) = \varkappa \varphi(x). \tag{10}$$

Diese Gleichung hat aber bekanntlich unter ihren n verschiedenen partikulären Integralen eines, welches einen Logarithmus von x als Bestandtheil hat, und welches in der Form

$$P + Q \log x$$

auftritt. Dieses eine partikuläre Integrale fassen wir besonders in's Auge, es ist diess dasjenige, das sich der Ermittelung mittelst der Laplace'schen Methode entzog; fügt man diess eine, mit einer willkührlichen Constanten multiplicirt, zu dem in (2) aufgestellten Integrale hinzu, so erhält man das vollständige Integrale der vorgelegten Differentialgleichung.

Die Gleichung (1), deren Integrale wir so eben in folgender Form:

$$y = \int_0^{\infty} e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}} u^{\mu-1} \varphi^{(\lambda)}(ux)\, du \tag{11}$$

ermittelt haben, gestattet auch folgende Aufschreibweise:

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} [xy' + (\lambda + 1 - n) y] = \varkappa (xy' + \mu y). \tag{14}$$

Digitized by Google

$$x\frac{d^n y}{dx^n}+\lambda\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=\varkappa\left(x\frac{dy}{dx}+\mu y\right).$$

Nun lässt sich nach einem, von uns im 63sten Bande von Crelle's Journal für Mathematik aufgestellten Satze das Integrale der Gleichung

$$\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}}\left[xz'+(\lambda+1-n)z\right]=\varkappa x(xz'+\mu z)] \tag{15}$$

bestimmen; es ist nämlich:

$$z=\int_0^\infty e^{-\frac{v^{n-1}}{n-1}}\psi(vx)\,dv\,, \tag{16}$$

wobei

$$\psi(x)=\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}}{n-1}}u^{\mu-1}\varphi^{(\lambda)}(ux)\,du$$

ist, falls nur zwischen den n in $\varphi(x)$ vorkommenden willkürlichen Constanten eine Bedingungsgleichung erfüllt wird. Demnach erhält man als Integrale der Gleichung (15):

$$z=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{u^{n-1}+v^{n-1}}{n-1}}u^{\mu-1}\varphi^{(\lambda)}(uvx)\,du\,dv.$$

Mittelst wiederholter Anwendung derselben Methode lassen sich nun auch die Integrale folgender Gleichungen ermitteln:

$$\frac{d^{n-3}}{dx^{n-3}}\left[xz'+(\lambda+1-n)z\right]=\varkappa x^2(xz'+\mu z),$$

$$\frac{d^{n-4}}{dx^{n-4}}\left[xz'+(\lambda+1-n)z\right]=\varkappa x^3(xz'+\mu z),$$

. . . .

Digitized by Google

IV.

Kennzeichen, ob eine Gleichung dem numerischen Werthe nach gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte Wurzeln besitze.

Von

Herrn *Franz Müller,*

Professor am Kön. Böhm. Polytechnikum in Prag.

Es sei gegeben die Gleichung $F(x)=0$, und schreiben wir von derselben die abwechselnden Glieder mit ihren Vorzeichen neben einander, so erhalten wir zwei neue Gleichungen $\varphi(x)$ und $x\psi(x)$, wobei $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ Polynome sind, deren Glieder nur gerade Potenzen von x enthalten. Z. B. Es sei

$$F(x)=x^5+c_1x^4+c_2x^3+c_3x^2+c_4x+c_5=0,$$

so ist:

$$\psi(x)=\quad x^4+c_2x^2+c_4,$$

$$\varphi(x)=c_1x^4+c_3x^2+c_5.$$

Es ist demnach

$$F(x)=\varphi(x)+x\,\psi(x)=0.$$

Nehmen wir an, der Gleichung $F(x)=0$ werde durch die Substitution $+\omega$ und $-\omega$ Genüge geleistet, oder die Gleichung $F(x)=0$ besitze dem Werthe nach gleiche, dem Zeichen nach entgegengesetzte Wurzeln; es sei demnach

Digitized by Google

$$F(+\omega) = 0 \text{ und } F(-\omega) = 0,$$

so ist auch

$$\varphi(\omega) + \omega\psi(\omega) = 0, \quad \varphi(-\omega) - \omega\psi(-\omega) = 0;$$

und da

$$\varphi(\omega) = \varphi(-\omega), \quad \psi(\omega) = \psi(-\omega);$$

so ist:

$$\varphi(\omega) + \omega\psi(\omega) = 0,$$

$$\varphi(\omega) - \omega\psi(\omega) = 0,$$

und folglich auch

$$\varphi(\omega) = 0 \text{ und } \psi(\omega) = 0;$$

unter dieser Voraussetzung wird folglich auch den Gleichungen $\varphi(x) = 0$ und $\psi(x) = 0$ durch die Substitution $+\omega$ und $-\omega$ Genüge geleistet.

Besitzt demnach die Gleichung $F(x) = 0$ numerisch gleiche, dem Zeichen nach entgegengesetzte Wurzeln, so besitzen auch die Gleichungen $\varphi(x) = 0$ und $\psi(x) = 0$ dieselben gleich entgegengesetzten Wurzeln. Das grösste gemeinschaftliche Maass zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ enthält folglich alle gleich entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$.

Beispiel. Es sei gegeben die Gleichung:

$$x^{10} + 3x^9 + x^8 - 4x^7 + x^6 + 13x^5 + 5x^4 - 16x^3 - 12x^2 + 4x + 4 = 0,$$

so ist:

$$\varphi(x) = x^{10} + x^8 + x^6 + 5x^4 - 12x^2 + 4,$$

$$\psi(x) = 3x^8 - 4x^6 + 13x^4 - 16x^2 + 4;$$

zwischen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ das grösste gemeinschaftliche Maass gesucht erhalten wir:

$$x^6 - x^4 + 4x^2 - 4.$$

Die Gleichung $x^6 - x^4 + 4x^2 - 4 = 0$ enthält daher alle gleich entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$.

Setzen wir $x^2 = z$, und untersuchen wir die so erhaltene Gleichung $z^3 - z^2 + 4z - 4 = 0$ ebenfalls auf gleich entgegengesetzte Wurzeln, so ist:

$$\varphi(z) = -z^2 - 4, \quad \psi(z) = z^2 + 4;$$

folglich $z^2 + 4$ das grösste gemeinschaftliche Maass, und $z_1 = +2\sqrt{-1}$,

$z_2 = -2\sqrt{-1}$. Die Wurzel z_3 erhalten wir durch Division von $z^3 - z^2 + 4z - 4$ mit $z^2 + 4$, es ist $z_3 = +1$.

Die gleich entgegengesetzten Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$ sind daher:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{2\sqrt{-1}}, \quad \left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{-2\sqrt{-1}}, \quad \left.\begin{matrix} x_5 \\ x_6 \end{matrix}\right\} = \pm 1;$$

oder falls wir die ersten zwei Wurzelpaare auf bekannte Weise transformiren, so ist:

$$\left.\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right\} = \pm(1+\sqrt{-1}) \quad \left.\begin{matrix} x_3 \\ x_4 \end{matrix}\right\} = \pm(1-\sqrt{-1}).$$

Von der gegebenen Gleichung 10ten Grades bleibt nur noch die Gleichung 4ten Grades $x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$ aufzulösen.

V.

Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen.

Von

Herrn Professor Dr. *Dienger*

an der polytechnischen Schule in Carlsruhe.

Im Nachstehenden betrachte ich die Differentialgleichung

$$X_n \frac{d^n y}{dx^n} + X_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + X_1 \frac{dy}{dx} + X_0 y = 0, \qquad (1)$$

in der $X_n, X_{n-1}, \dots, X_1, X_0$ blos Funktionen von x (oder Kon-

Digitized by Google

stanten) sind. Dass, wenn $y_1, \ldots, y_n$ Funktionen sind, welche der (1) genügen,

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n \tag{2}$$

ebenfalls genügt, setze ich natürlich als bewiesen voraus. Wenn zwischen den Grössen $y_1, \ldots, y_n$ eine Gleichung

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \ldots + a_n y_n = 0 \tag{3}$$

besteht, so werde ich sagen, es bestehe eine lineare Beziehung unter denselben. Dabei setze ich $a_1, \ldots, a_n$ als konstant voraus, und dürfen ganz wohl einige dieser Grössen Null sein.

§. 1.

Seien $y_1, y_2, \ldots, y_r$ Funktionen von x, und es werde gesetzt:

(4)

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, \ldots, & y_r \\ \frac{dy_1}{dx}, & \frac{dy_2}{dx}, \ldots, & \frac{dy_r}{dx} \\ \frac{d^2y_1}{dx^2}, & \frac{d^2y_2}{dx^2}, \ldots, & \frac{d^2y_r}{dx^2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{d^{r-1}y_1}{dx^{r-1}}, & \frac{d^{r-1}y_2}{dx^{r-1}}, \ldots, & \frac{d^{r-1}y_r}{dx^{r-1}} \end{vmatrix} = M, \quad \frac{d^s y_m}{dx^s} = y_m^{(s)};$$

so ist die Determinante M eine Funktion der Grössen $y_1, \ldots, y$; $y_1', \ldots, y'_r; \ldots; y_1^{(r-1)}, \ldots, y_r^{(r-1)}$; und folglich:

$$\frac{dM}{dx} = \frac{\partial M}{\partial y_1} y_1' + \ldots + \frac{\partial M}{\partial y_r} y_r' + \frac{\partial M}{\partial y_1'} y_1^{(2)} + \ldots + \frac{\partial M}{\partial y_r'} y_r^{(2)} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\partial M}{\partial y_1^{(r-1)}} y_1^{(r)} + \ldots + \frac{\partial M}{\partial y_r^{(r-1)}} y_r^{(r)}.$$

Den Grundeigenschaften der Determinanten zufolge ist aber:

$$\frac{\partial M}{\partial y_1^{(s)}} y_1^{(s+1)} + \ldots + \frac{\partial M}{y_r^{(s)}} y_r^{(s+1)} = 0; \quad s = 0, 1, 2, \ldots, r-2;$$

so dass also:

(5)

$$\frac{dM}{dx} = \frac{\partial M}{\partial y_1^{(r-1)}} y_1^{(r)} + \frac{\partial M}{\partial y_2^{(r-1)}} y_2^{(r)} + \ldots + \frac{\partial M}{\partial y_r^{(r-1)}} y_r^{(r)}.$$

3*

Digitized by Google

Diese Gleichung gilt natürlich für alle beliebigen Funktionen $y_1, \ldots, y_r$.

Gesetzt nun, es bestehe identisch die Gleichung:

$$M = 0, \tag{6}$$

so ist natürlich auch:

$$\frac{dM}{dx} = 0, \tag{7}$$

und man hat folglich in diesem Falle das folgende System von Gleichungen:

(8)

$$y_1 \frac{\partial M}{\partial y_1^{(r-1)}} + y_2 \frac{\partial M}{\partial y_2^{(r-1)}} + \ldots + y_r \frac{\partial M}{\partial y_r^{(r-1)}} = 0,$$

$$y_1' \frac{\partial M}{\partial y_1^{(r-1)}} + y_2' \frac{\partial M}{\partial y_2^{(r-1)}} + \ldots + y_r' \frac{\partial M}{\partial y_r^{(r-1)}} = 0,$$

. . . .

$$y_1^{(r-1)} \frac{\partial M}{\partial y_1^{(r-1)}} + y_2^{(r-1)} \frac{\partial M}{\partial y_2^{(r-1)}} + \ldots + y_r^{(r-1)} \frac{\partial M}{\partial y_r^{(r-1)}} = 0,$$

$$y_1^{(r)} \frac{\partial M}{\partial y_1^{(r-1)}} + y_2^{(r)} \frac{\partial M}{\partial y_2^{(r-1)}} + \ldots + y_r^{(r)} \frac{\partial M}{\partial y_r^{(r-1)}} = 0.$$

In diesem Systeme sind die $r-1$ ersten Gleichungen aus den Grundeigenschaften der Determinanten hervorgegangen; die $r$te ist die (6) und die $(r+1)$te die (7). Wir wollen jede dieser Gleichungen, mit Ausnahme der letzteren, differenziren und je dabei die nächst folgende beachten; dann erhalten wir:

(9)

$$y_1 \frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_1^{(r-1)}} + y_2 \frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_2^{(r-1)}} + \ldots + y_r \frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_r^{(r-1)}} = 0,$$

$$y_1' \frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_1^{(r-1)}} + y_2' \frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_2^{(r-1)}} + \ldots + y_r' \frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_r^{(r-1)}} = 0,$$

. . . .

$$y_1^{(r-1)} \frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_1^{(r-1)}} + y_2^{(r-1)} \frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_2^{(r-1)}} + \ldots + y_r^{(r-1)} \frac{d}{dx} \frac{\partial M}{\partial y_r^{(r-1)}} = 0.$$

Diese Gleichungen fallen der Form nach zusammen mit den r ersten (8), und weil die Gleichung (6) besteht, lassen sich aus beiden Systemen die Quotienten der Grössen

Digitized by Google

$$\frac{\partial M}{\partial y_1^{(r-1)}},\quad \frac{\partial M}{\partial y_2^{(r-1)}},\quad \ldots.;\quad \frac{d}{dx}\frac{\partial M}{\partial y_1^{(r-1)}},\quad \frac{d}{dx}\frac{\partial M}{\partial y_2^{(r-1)}},\ldots\ldots$$

bestimmen. Ist nun nicht $\frac{\partial M}{\partial y_s^{(r-1)}}$ identisch Null, so ergibt sich aus (8) und (9):

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y_m^{(r-1)}}}{\frac{\partial M}{\partial y_s^{(r-1)}}} = \frac{\frac{d}{dx}\frac{\partial M}{\partial y_m^{(r-1)}}}{\frac{d}{dx}\frac{\partial M}{\partial y_s^{(r-1)}}};\quad \frac{1}{\frac{\partial M}{\partial y_m^{(r-1)}}}\frac{d}{dx}\frac{\partial M}{\partial y_m^{(r-1)}} = \frac{1}{\frac{\partial M}{\partial y_s^{(r-1)}}}\frac{d}{dx}\frac{\partial M}{\partial y_s^{(r-1)}};$$

$$l\left(\frac{\partial M}{\partial y_m^{(r-1)}}\right) = l\left(\frac{\partial M}{\partial y_s^{(r-1)}}\right) + C_m;\quad \frac{\partial M}{\partial y_m^{(r-1)}} = c_m \frac{\partial M}{\partial y_s^{(r-1)}};$$

$$m = 1, 2, \ldots., s-1, s+1, \ldots., r.$$

Setzt man diese Werthe in die erste (8) ein, so ergibt sich:

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots. + c_{s-1} y_{s-1} + y_s + c_{s+1} y_{s+1} + \ldots. + c_n y_n = 0. \tag{10}$$

Wenn also die (6) identisch besteht, so besteht nothwendig zwischen den Funktionen $y_1, \ldots., y_n$ eine lineare Beziehung. Daraus aber folgt weiter, dass, wenn eine solche lineare Beziehung zwischen den eben genannten Funktionen nicht besteht, auch die Gleichung (6) nicht stattfinden kann.

§. 2.

Wir wollen annehmen, y_1 sei eine Funktion von x, welche, an die Stelle von y gesetzt, der (1) identisch genüge. Sodann wollen wir in dieser Gleichung setzen:

$$y = y_1 \int \varphi dx, \tag{11}$$

wo φ eine noch unbekannte Funktion von x sei und wo wir dem unbestimmten Integrale keine willkührliche Konstante zufügen wollen. Dann erhält man aus (1) zur Bestimmung von φ eine Gleichung der Form:

$$\Phi_{n-1}\frac{d^{n-1}\varphi}{dx^{n-1}} + \Phi_{n-2}\frac{d^{n-2}\varphi}{dx^{n-2}} + \ldots. + \Phi_1\frac{d\varphi}{dx} + \Phi_0\varphi = 0, \tag{12}$$

in welcher $\Phi_{n-1}, \ldots., \Phi_0$ bekannte Funktionen von x sind, die mit von dem Werthe von y_1 abhängen. Die (12) ist abermals eine lineare Differentialgleichung, aber nur $(n-1)$ter Ordnung.

Angenommen nun, man könne $n-1$ Funktionen: $\varphi_1, \varphi_2, \ldots., \varphi_{n-1}$

Digitized by Google

finden, welche — jede für sich — der (12) genügen, und zwischen denen keine lineare Beziehung besteht, so genügen hiernach der (1):

$$y_1, \; y_1 \int \varphi_1 dx, \; y_1 \int \varphi_2 dx, \; \ldots, \; y_1 \int \varphi_{n-1} dx. \qquad (13)$$

Dies sind n Funktionen, zwischen denen eine lineare Beziehung nur bestehen könnte, wenn eine solche zwischen den φ bestände, was wir nicht voraussetzen.

Für $n = 1$ liefert die Gleichung (1):

$$y = ce^{-\int \frac{X_0}{X_1} dx};$$

demnach gibt es für lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung [$n = 2$ in (1)] zwei Werthe, die nicht linear zusammenhängen. Daraus folgt nun weiter, dass es für die dritte Ordnung ($n = 3$) drei solcher Werthe gebe, u. s. w., dass allgemein für (1) wirklich n einzelne Funktionen möglich sind, welche dieser Gleichung genügen und nicht linear zusammenhängen. (Dass es einen Werth y_1 gebe, lehrt die allgemeine Theorie der Integration der Differentialgleichungen).

§. 3.

Es kann nun aber für die Gleichung (1) nicht $n+1$ besondere Integrale $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ geben, wenn nicht zwischen denselben eine lineare Beziehung besteht.

Denn aus der Annahme des Bestehens solcher $n+1$ Werthe folgt:

$$\left.\begin{array}{l} X_n \frac{d^n y_1}{dx^n} + X_{n-1} \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots + X_0 y_1 = 0, \\ X_n \frac{d^n y_2}{dx^n} + X_{n-1} \frac{d^{n-1} y_2}{dx^{n-1}} + \ldots + X_0 y_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n \frac{d^n y_{n+1}}{dx^n} + X_{n-1} \frac{d^{n-1} y_{n+1}}{dx^{n-1}} + \ldots + X_0 y_{n+1} = 0. \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Diese Gleichungen (14) sind der Zahl nach $n+1$; sollen sie zusammen bestehen, ohne dass $X_n, \ldots, X_0$ sämmtlich Null sind, so muss:

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots, & y_{n+1} \\ \frac{dy_1}{dx}, & \frac{dy_2}{dx}, & \ldots, & \frac{dy_{n+1}}{dx} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^n y_1}{dx^n}, & \frac{d^n y_2}{dx^n}, & \ldots, & \frac{d^n y_{n+1}}{dx^n} \end{vmatrix} = 0$$

sein. Daraus folgt aber nach §. 1. ($r = n+1$), dass eine lineare Beziehung zwischen den $y_1, \ldots, y_{n+1}$ bestehe. Damit ist nun erwiesen, dass es für die Gleichung (1) n besondere Integrale $y_1, \ldots, y_n$ gebe (§. 2.), aber nicht mehr (§. 3.), zwischen denen eine lineare Beziehung nicht besteht. Diese geben in (2) das allgemeine Integral.

§. 4.

Sind $y_1, y_2, \ldots, y_n$ diese besonderen Integrale, so hat man wie in §. 3.:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{X_0}{X_n} y_1 + \frac{X_1 dy_1}{X_n dx} + \ldots + \frac{X_{n-1} d^{n-1} y_1}{X_n dx^{n-1}} = -\frac{d^n y_1}{dx^n}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{X_0}{X_n} y_n + \frac{X_1 dy_n}{X_n dx} + \ldots + \frac{X_{n-1} d^{n-1} y_n}{X_n dx^{n-1}} = -\frac{d^n y_n}{dx^n}. \end{array}\right\} \quad (15)$$

Aus den Gleichungen (15) lassen sich die Grössen

$$\frac{X_0}{X_n}, \quad \frac{X_1}{X_n}, \quad \ldots, \quad \frac{X_{n-1}}{X_n} \qquad (16)$$

durch $y_1, \ldots, y_n$ und deren Differentialquotienten bis zur $n$ten Ordnung ausdrücken, vorausgesetzt, dass nicht

$$\left| \begin{array}{cccc} y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \\ \frac{dy_1}{dx}, & \frac{dy_2}{dx}, & \ldots, & \frac{dy_n}{dx} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}, & \frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}, & \ldots, & \frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}} \end{array} \right| = 0.$$

Da diese Gleichung aber nach §. 1. eine lineare Beziehung zwischen $y_1, \ldots, y_n$ voraussetzt, so kann sie nicht bestehen, und man kann folglich die Grössen (16) bestimmen.

Da eine jede Differentialgleichung $n$ter Ordnung, die nach dem höchsten Differentialquotienten aufgelöst ist (was bei der (1) unmittelbar erreicht werden kann), nur eine Integralgleichung haben kann, so ist es ganz überflüssig, erweisen zu wollen, dass die Form (2) für die (1) nothwendig sei. Es genügt vollständig, zu zeigen, dass die Form (2) möglich sei.

Digitized by Google

VI.

Ueber den mittleren Fehler der Resultate aus trigonometrischen Messungen.

Von

Herrn Doctor ***Börsch***,

ord. Lehrer an der höheren Gewerbeschule in Cassel.

Ueber die Bestimmung des mittleren Fehlers der aus trigonometrischen Beobachtungen abgeleiteten Functionen, nämlich der Richtungen der einzelnen Dreiecksseiten, bestehen verschiedene Ansichten*): nach der einen ist der mittlere Fehler einer Richtung gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Fehlerquadrate dividirt durch die Anzahl der zwischen den Richtungen bestehenden Bedingungsgleichungen, nach der anderen gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Fehlerquadrate dividirt durch die um 1 verminderte Anzahl der Richtungen. Bei der Wichtigkeit dieses Gegenstandes für die Beurtheilung geodätischer Arbeiten, dürfte es gegenwärtig, wo durch die mitteleuropäische Gradmessung über einen grossen Theil von Europa ein Dreiecksnetz gespannt wird, nicht ohne Interesse sein, denselben etwas näher zu betrachten.

Der mittlere Fehler soll im Allgemeinen die Grenzen angeben, innerhalb welcher bei direkten Beobachtungen oder Functionen derselben ein Fehler zu befürchten ist; sind diese Grenzen sehr weit, d. h. existiren zwischen den einzelnen zu beurtheilenden Grössen nur wenige Bedingungen, die sich stets in einer gleichen Anzahl von Bedingungsgleichungen darstellen lassen, so wird der mittlere Fehler gross, ja selbst grösser als die Fehler der einzelnen Grössen sein; je enger man aber die Grenzen zieht, je

---

*) Vergleiche Generalbericht über die mitteleuropäische Gradmessung für das Jahr 1865. Berlin 1866, pag. 45 etc., wobei zugleich auf einen daselbst zweimal vorkommenden Druckfehler, nämlich $z_r - \delta$ statt $z_r - 1$, aufmerksam gemacht wird. — Baeyer, die Küstenvermessung und ihre Verbindung mit der Berliner Grundlinie. Berlin 1849, pag. 353. — Encke, astronomisches Jahrbuch für 1834, pag. 292. — Gerling, Beiträge zur Geographie Kurhessens. Kassel 1839, pag. 182.

mehr Bedingungsgleichungen man aufstellen kann, um so genauer wird auch der mittlere Fehler, um so kleiner im Vergleiche zu den einzelnen Fehlern.

Je nachdem der mittlere Fehler für direkte Beobachtungen oder für Functionen derselben gesucht wird, sind drei Punkte ins Auge zu fassen:

1) Die unbekannte Grösse wird direkt in überschüssiger Anzahl beobachtet.
2) Die unbekannten Grössen sind Functionen „Elemente" direkter Beobachtungen und letztere in überschüssiger Anzahl vorhanden.
3) Die unbekannten Grössen sind Functionen „Elemente" direkter Beobachtungen, diese Elemente in überschüssiger Anzahl vorhanden und durch Bedingungsgleichungen verbunden.

Bezeichnet man mit m den mittleren Fehler der direkten Beobachtungen, beziehungsweise der Functionen derselben, mit $[vv]$ die Summe der Quadrate der Fehler, mit z_b die Anzahl der überschüssigen Beobachtungen oder Elemente, d. h. die Anzahl der Widersprüche, also auch der Bedingungsgleichungen, so hat man allgemein für die drei Fälle:

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{z_b}},$$

der mittlere Fehler ist immer gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Fehlerquadrate dividirt durch die Anzahl der Widersprüche. Haben ausserdem die Beobachtungen oder deren Elemente verschiedene Gewichte, bezeichnet man diese mit p, also mit $[p.vv]$ die Summe der mit ihren Gewichten multiplicirten Fehlerquadrate, so wird

$$m = \sqrt{\frac{[p.vv]}{z_b}};$$

von einem mittleren Fehler kann dann aber nur insofern die Rede sein, als er sich auf die Gewichtseinheit der Grössen bezieht. z_b ist stets das Gewicht, welches dem mittleren Fehler zukommt, d. h. $\sqrt{z_b}$ die Genauigkeit desselben.

Für den ersten Fall ist ein Element wiederholt direkt beobachtet, man hat bei z Beobachtungen dieses Elementes $z-1$ Widersprüche, die man stets in ebensovielen Bedingungsgleichungen ausdrücken kann; in der Praxis wählt man aber in der Regel diesen Weg nicht, sondern führt noch eine weitere abgeleitete Grösse, das arithmetische Mittel, mit in die Rechnung ein,

Digitized by Google

wodurch man aber auch einen Widerspruch mehr, nämlich z Widersprüche erhält, es ist mithin $z_b = z - 1$.

Für den zweiten Fall wird man auch immer ebensoviele Bedingungsgleichungen durch Vergleichung der Beobachtungen nur unter sich ableiten können, man führt jedoch auch hier in der Praxis zu den Beobachtungen aus diesen abgeleitete vorläufige Elemente ein; ist die Anzahl derselben $= e$, so wird man auch e Bedingungsgleichungen mehr erhalten, und bezeichnet man die Zahl der nun gebildeten Gleichungen mit z, so ist die Anzahl der Widersprüche oder Bedingungsgleichungen, die nur allein zwischen den Beobachtungen bestehen, nämlich $z_b = z - e$. Ist $e = 1$, so geht der zweite in den ersten Fall über.

Der dritte Fall ist der speciell hier in Betracht kommende, zwischen den Elementen werden z_b Bedingungsgleichungen bestehen. Hat man nämlich nur so viele Elemente (Richtungen), als zur Berechnung der gestellten Aufgabe absolut nothwendig sind, also keine überschüssigen Stücke, so wird man auch keine Widersprüche, d. h. keine Fehler, also auch keinen mittleren Fehler finden; es wird aber Niemand behaupten wollen, dass die Fehler gleich Null seien, man hat nur kein Mittel sie zu bestimmen, sie sind unbestimmt, sie und der mittlere Fehler treten unter der Form $\frac{0}{0}$ auf. Kommt ein überschüssiges Element hinzu, so erhält man eine Bedingungsgleichung, man wird nun die einzelnen, sowie den mittleren Fehler der Elemente bestimmen können, letzteren kann jedoch nur ein geringes Gewicht $= 1$ beigelegt werden. Ist die Anzahl der überschüssigen Elemente, also auch der Bedingungsgleichungen $= 2$, so erhält man den mittleren Fehler mit dem Gewichte $= 2$, oder der Genauigkeit $= \sqrt{2}$; hat man z_b überschüssige Elemente, z_b Bedingungsgleichungen, so ist das Gewicht $= z_b$, die Genauigkeit $= \sqrt{z_b}$. Die Anzahl z_r der überhaupt zu der Berechnung verwendeten Elemente (gemessene Richtungen der Dreiecksseiten) hat also auf die Bestimmung so wie die Genauigkeit des mittleren Fehlers durchaus keinen Einfluss, sondern nur die Anzahl z_b der überschüssigen Elemente, der Bedingungsgleichungen. Der gefundene mittlere Fehler wird um so genauer sein, er wird sich um so mehr der Wahrheit nähern, je grösser die Anzahl der Bedingungsgleichungen ist, er ist eine Function von z_b, nicht von z_r, und fällt mit der Wahrheit zusammen, wenn $z_b = \infty$ ist. Die Folge dieser Abhängigkeit ist, dass bei wenigen Bedingungsgleichungen aber vielen Elementen die einzelnen Fehler sehr klein, der mittlere Fehler sehr gross erscheint, seine Grenzen liegen weit auseinander, je enger hingegen diese gezogen werden, je grösser z_b wird, um so kleiner

Digitized by Google

wird der mittlere Fehler, um so mehr wird er in das richtige Verhältniss zu den Fehlern der einzelnen Elemente (Richtungen) treten. Aus diesen Gründen ist auch als Prinzip festzuhalten, nicht möglichst viele Elemente überhaupt, sondern möglichst viele überschüssige Elemente durch Messung zu bestimmen, und dadurch möglichst viele Bedingungsgleichungen zu erhalten.

Bestimmt man hingegen den mittleren Fehler für die Richtungen der Dreiecksseiten nach der Formel $m = \sqrt{\frac{[vv]}{z_r - 1}}$, oder bei verschiedenen Gewichten der Elemente nach der Formel $m = \sqrt{\frac{[p\,vv]}{z_r - 1}}$, macht man also den mittleren Fehler und seine Genauigkeit von der Anzahl z_r der Richtungen abhängig, so braucht man, ganz consequent mit der Formel, um sehr gute und zuverlässige Resultate zu erzielen, nur sehr viele Richtungen, aber sehr wenige überschüssige, also um gleich die Grenze zu ziehen, nur eine überschüssige Richtung durch Messung zu bestimmen und in die Rechnung einzuführen; z. B. zwischen 2 definitiven Grundlinien eine möglichst lange Dreieckskette (nicht Dreiecksnetz), bei welcher in jedem Dreiecke nur zwei Winkel durch Messungen bestimmt wären, und zwischen den Sinussen sämmtlicher gemessener Winkel eine Bedingungsgleichung bestände. Die Unrichtigkeit dieser Annahme liegt auf der Hand.

Will man ferner die Behauptung aufstellen, die Richtungsfehler seien unabhängig von der Grösse der Winkel, indem verschieden grossen Winkeln, die übrigens unter denselben Umständen gemessen sind, dieselben mittleren Fehler zugeschrieben werden müssen, man könnte also die verschiedenen Richtungen als wiederholte Beobachtungen, ihre Zahl sei $= z_r$, einer Richtung ansehen, und demnach den mittleren Fehler durch die Formel $m = \sqrt{\frac{[vv]}{z_r - 1}}$, beziehungsweise $m = \sqrt{\frac{[p.vv]}{z_r - 1}}$, darstellen, so würde diese Behauptung nur dann zulässig sein, wenn die Winkel unter sich in keiner Abhängigkeit ständen, und man im Stande wäre, die einzelnen Richtungen ohne Zuziehung anderer Grössen unmittelbar unter sich zu vergleichen; hier treten aber drei Winkel, also sechs Richtungen zu einem Dreiecke zusammen, oder es geben die gemeinschaftlichen Seiten der Dreiecke durch die Grösse der Winkel bedingte Widersprüche der Richtungen, es bestehen also zwischen der Grösse der Winkel und den Richtungen in dem vorliegenden Falle ganz bestimmte Beziehungen und die Richtungen, also auch die Fehler derselben so wie der mittlere Fehler, sind abhängig von der Grösse der Winkel, sie

Digitized by Google

sind Functionen derselben; die Formel $m = \sqrt{\frac{[vv]}{z_r - 1}}$ oder $m = \sqrt{\frac{[p.vv]}{z_r - 1}}$ kann also auch in dieser Hinsicht keine Anwendung finden.

Zum Schlusse möge noch nachfolgende Betrachtung hier ihren Platz finden. Hat man zwei Reihen gleichvieler und gleichguter Beobachtungen, und aus denselben eine gleiche Anzahl von Elementen und eine gleiche Anzahl von Bedingungsgleichungen abgeleitet, so wird man den Resultaten aus beiden Reihen von Beobachtungen nach der Formel $\sqrt{\frac{[vv]}{z_b}}$ voraussichtlich denselben mittleren Fehler, d. h. dieselbe Genauigkeit zuschreiben müssen. Dieses kann zur Beantwortung einer Frage dienen, die schon vielfach aufgeworfen wurde. Müssen nämlich bei einem Dreiecksnetze, wenn es eine hinlängliche Garantie seiner Zuverlässigkeit in sich tragen soll, alle Richtungen von ihren beiden Endpunkten aus gemessen, d. h. in jedem Dreiecke die drei Winkel durch Messung bestimmt sein, oder bleibt, bei übrigens gleichguten Beobachtungen, die Genauigkeit dieselbe, wenn statt einer zweiseitig gemessenen Richtung zwei einseitig gemessene Richtungen, nämlich statt eines Dreiecks mit 3 gemessenen Winkeln 2 Dreiecke mit nur je 2 gemessenen Winkeln eingeführt werden? Da für die Doppelrichtung zwei einseitige Richtungen und für die ausfallende Bedingungsgleichung zwischen den 3 Winkeln eines Dreiecks eine andere zwischen den Sinussen der Winkel zweier Dreiecke, durch Vergleichung ihrer gemeinschaftlichen Seite, hinzukommt, so wird die Anzahl der Fehler sowie die Anzahl der Bedingungsgleichungen nicht geändert, man wird also in beiden Fällen den einzelnen gemessenen Richtungen denselben mittleren Fehler und dem ganzen Dreiecksnetze dieselbe Genauigkeit zuschreiben müssen. Das nur einseitige Messen einer Richtung hat aber in den meisten Fällen seinen Grund darin, dass an dem einen Endpunkte eine sichere Anvisirung nicht zu erzielen war, ja dieses mitunter nicht schon bei der Entwerfung des Dreiecksnetzes, sondern erst bei der Winkelmessung entdeckt wurde, in diesem Falle ist es sogar vorzuziehen, die weniger zuverlässige Messung ganz zu unterlassen, oder, wenn sie schon gemacht ist, nicht zu benutzen, und stattdessen eine weitere einseitige Richtung einzuführen, die mit hinlänglicher Schärfe bestimmt werden kann, die Genauigkeit des Ganzen wird dadurch nur erhöht.

Digitized by Google

VII.

Ueber eine Eigenschaft der Hyperbel.

(Mit Bezugnahme auf einen Aufsatz des Herrn Professor Nicola Cavalieri San Bertolo, commend., in den „Atti dell' Accademia Pontificia dei nuovi Lincei". Anno XIX. Sess. III^a. 24 Febbr. 1866.).

Von

Herrn *C. Thiel*,

Kandidaten der Mathematik in Greifswald.

Aufgabe.

(Taf. III. Fig. 4.).

Zwei im Punkte A unter dem Winkel α sich schneidende Gerade AX und AY werden von einer dritten Geraden RS in den Punkten B und C so geschnitten, dass $\Delta\, CAB = k^2$ ist; verbindet man nun den Mittelpunkt P von BC mit A und theilt AP in N so, dass

$$NP:AP = 1:h$$

ist, so soll der geometrische Ort des Punktes N für alle Lagen von RS bestimmt werden, bei denen $\Delta\, CAB = k^2$ ist.

Auflösung. Es sei A Anfang des Coordinatensystems, AX der positive Theil der x - Axe und AY der positive Theil der y - Axe.

Die Coordinaten von C seien nun $x_1, 0$; die von B seien $0, y_2$; also sind die von P: $\frac{1}{2}x_1$, $\frac{1}{2}y_2$, und nach den Lehren der analytischen Geometrie die von N:

Digitized by Google

$$1) \ldots\ldots \quad x = \frac{h-1}{2h} x_1, \quad y = \frac{h-1}{2h} y_2.$$

Weil aber nach den Bedingungen der Aufgabe

$$2) \ldots\ldots \quad \Delta CAB = \tfrac{1}{2} x_1 y_2 \sin\alpha = k^2,$$

also

$$y_2 = \frac{2k^2}{x_1} \operatorname{cosec}\alpha$$

ist, so ist auch:

$$3) \ldots\ldots x = \frac{h-1}{2h} x_1, \quad y = \frac{h-1}{hx_1} k^2 \operatorname{cosec}\alpha;$$

und multiplicirt man diese Werthe, so erhält man:

$$4) \ldots\ldots \quad xy = \tfrac{1}{2}\left(\frac{h-1}{h}\right)^2 k^2 \operatorname{cosec}\alpha,$$

d. h. die Gleichung einer **Hyperbel** zwischen ihren Asymptoten.

Um ihre Mittelpunktsgleichung zu finden, hat man von dem schiefwinkligen Coordinatensysteme der (xy) zu einem rechtwinkligen der $(x'y')$ überzugehen, das denselben Anfangspunkt A hat und dessen positive x' - Axe den Asymptotenwinkel α halbirt. Man hat demnach in den Formeln für den Uebergang von einem schiefwinkligen zu einem rechtwinkligen Systeme:

$$x = \frac{x' \sin[(xy) - \xi] - y' \cos[(xy) - \xi]}{\sin(xy)}, \quad y = \frac{x' \sin\xi + y' \cos\xi}{\sin(xy)}$$

$(xy) = \alpha$, $\xi = \tfrac{1}{2}\alpha$ zu setzen, und erhält:

$$5) \ldots\ldots x = \frac{x' \sin\tfrac{1}{2}\alpha - y' \cos\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha}, \quad y = \frac{x' \sin\tfrac{1}{2}\alpha + y' \cos\tfrac{1}{2}\alpha}{\sin\alpha};$$

also durch Multiplication:

$$xy = \frac{x'^2 \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 - y'^2 \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2}{\sin\alpha^2},$$

und folglich nach 4):

$$\frac{x'^2 \sin\tfrac{1}{2}\alpha^2 - y'^2 \cos\tfrac{1}{2}\alpha^2}{\sin\alpha^2} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{h-1}{h}\right)^2 k^2 \operatorname{cosec}\alpha$$

oder:

$$6) \ldots\ldots x'^2 \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha - y'^2 \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha = \left(\frac{h-1}{h}\right)^2 k^2,$$

oder endlich:

$$7) \quad \left(\frac{x'}{\frac{h-1}{h}\sqrt{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha}\,.\,k}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\frac{h-1}{h}\sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha}\,.\,k}\right)^2 = 1.$$

Digitized by Google

Der gesuchte geometrische Ort ist also eine Hyperbel mit den Schenkeln des Winkels XAY als Asymptoten und mit den Halbaxen

$$a = \frac{h-1}{h}\sqrt{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}\alpha}\,.\,k,\quad b = \frac{h-1}{h}\sqrt{\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha}\,.\,k.$$

Die Abscisse ihres Brennpunktes ist

$$e = \sqrt{a^2+b^2} = \frac{h-1}{h}\sqrt{2\operatorname{cosec}\alpha}\,.\,k.$$

Ist $\alpha = 90^0$, so ist $\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha = 1$; die Hyperbel ist dann gleichseitig und ihre Gleichung ist:

8) . . . . . . $$x'^2 - y'^2 = \left(\frac{h-1}{h}\right)^2 k^2.$$

Ist $h = 3$, so ist N der Schwerpunkt des Dreiecks CAB, und man hat daher folgenden

Lehrsatz. Der geometrische Ort der Schwerpunkte aller Dreiecke mit demselben Winkel α und dem constanten Flächeninhalte k^2 ist eine Hyperbel mit den Schenkeln des Winkels als Asymptoten. Ihre Gleichung ist:

$$\left(\frac{x'}{\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\alpha}\,.\,k}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha}\,.\,k}\right)^2 = 1,$$

und für $\alpha = 90^0$, in welchem Falle die Hyperbel gleichzeitig ist:

$$x'^2 - y'^2 = \tfrac{4}{9}k^2.$$

Multiplicirt man die beiden Halbaxen mit einander, so erhält man:

9) . . . . $$ab = \left(\frac{h-1}{h}\right)^2 k^2,$$

und folglich:

10) . . . . $$k^2 = \left(\frac{h}{h-1}\right)^2 ab,$$

und das giebt folgenden

Lehrsatz. Zieht man vom Mittelpunkte A einer Hyperbel nach einem beliebigen Punkte N derselben eine Gerade, verlängert sie über N hinaus bis P, so dass

$$NP:AP = 1:h,$$

und zieht durch P eine Gerade bis zum Durchschnitte mit den beiden Asymptoten in B und C so, dass BC in P halbirt wird, so ist der Flächeninhalt des Dreieckes ABC ein constanter, nehmlich

Digitized by Google

$$k^2 = \left(\frac{h}{h-1}\right)^2 ab.$$

Ist $h = 3$, so ist N der Schwerpunkt des Dreiecks CAB und sein Flächeninhalt $k^2 = \frac{9}{4} ab$.

Wie Herr Nicola Cavalieri San Bertolo a. a. O. bemerkt, verdient es angeführt zu werden, dass, wenn obige aus der Lösung der Anfangs gestellten Aufgabe hergeleitete Eigenschaft der Hyperbel sich noch nicht bei Apollonius so ausgedrückt findet, dieselbe doch aus zwei von ihm angeführten Sätzen leicht gefolgert werden kann, nehmlich aus dem dritten im zweiten Buche seines Werkes über die Kegelschnitte:

> „dass das zwischen den beiden Asymptoten liegende Stück jeder Tangente an eine Hyperbel im Berührungspunkte halbirt wird"

und dem 43sten im dritten Buche:

> „dass alle von den Tangenten an eine Hyperbel und von ihren Asymptoten eingeschlossenen Dreiecke einen constanten Flächeninhalt haben, nehmlich dem Rechtecke aus den Halbaxen der Hyperbel gleich sind."

Zieht man nehmlich durch einen beliebigen Punkt N einer Hyperbel eine Tangente bis zum Durchschnitte mit den Asymptoten in D und E, zieht AN und verlängert es über N hinaus bis P, so dass

$$AP:NP = h:1,$$

und zieht durch P zur Tangente DE die Parallele BC, so wird, weil DE nach dem ersten angeführten Satze in N halbirt wird, BC in P halbirt; ferner ist:

$$\triangle BAC : \triangle DAE = AB.AC : AD.AE,$$

also, weil

$$AB:AD = AC:AE = AP:AN = h:h-1,$$

d. h.:

$$AB = \frac{h}{h-1}.AD, \quad AC = \frac{h}{h-1}.AE$$

ist:

$$\triangle BAC : \triangle DAE = \left(\frac{h}{h-1}\right)^2 : 1,$$

also schliesslich, weil nach dem zweiten angeführten Satze $\triangle DAE = ab$ ist:

$$\triangle BAC = \left(\frac{h}{h-1}\right)^2 ab,$$

was bewiesen werden sollte.

Digitized by Google

VIII.

Konstruktion der Intensitätslinien eines dreiaxigen Ellipsoids mit Benützung einer Kugelscala.

Von

Herrn *Emil Koutny*,

Assistenten der descriptiven Geometrie am K. K. technischen Institute in Brünn.

I.

Theoretischer Theil.

Der Rotationskegel als einhüllende Fläche eines dreiaxigen Ellipsoides.

§. 1.

Es sei in Taf. III. Fig. 1. der achte Theil eines dreiaxigen Ellipsoides durch seine Schnitte mit den drei Coordinatenebenen dargestellt. Das Coordinatensystem hat eine solche Lage, dass sein Ursprung mit dem Mittelpunkte O der Fläche, die Coordinatenaxen mit den Richtungen der Axen $OA = a$, $OB = b$. $OC = c$ des Ellipsoides zusammenfallen. Es ist somit:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

die Gleichung dieser Fläche.

Nehmen wir vorläufig an, dass a die grösste, b die kleinste der drei Axen, folglich $a > c > b$ ist, und denken uns aus irgend einem Punkte der XAxe an das Ellipsoid einen berührenden Kegel gelegt, so ist klar, dass ein auf seine Axe OX senkrechter Schnitt eine Ellipse sein wird, deren grössere Axe eine vertikale Stellung hat; es ergibt sich jedoch ein gerade entgegengesetztes Resultat, wenn die Spitze des berührenden Kegels in der YAxe angenommen wird.

Es liegt also die Vermuthung nahe, dass es in der Ebene XOY dieser beiden Axen einen Punkt oder ein System von

Digitized by Google

Punkten geben wird, von welchen aus an das Ellipsoid berührende Rotationskegel möglich sind, und es soll Gegenstand der folgenden Betrachtung sein, die Lage dieser Kegelmittelpunkte zu bestimmen.

Zu diesem Ende nehmen wir in der Ebene XOY einen Punkt M an, dessen Coordinaten $OP = p$, $MP = q$ sind, und der die eben besprochene Eigenschaft besitzen soll; legen durch diesen als Spitze einen das Ellipsoid berührenden Kegel, so wie einen beliebigen Rotationskegel mit horizontaler Axe, und untersuchen sodann, unter welchen Bedingungen diese beiden Kegel zusammenfallen.

Für eine Tangirungsebene an das Ellipsoid haben wir bekanntlich die Gleichung:

$$\frac{xx'}{a^2} + \frac{yy'}{b^2} + \frac{zz'}{c^2} = 1,$$

wobei x', y', z' die Coordinaten des Berührungspunktes sind. Setzen wir die Bedingung, dass die Ebene durch den Punkt M gehen soll, in die obige Gleichung, indem wir $x = p$, $y = q$, $z = 0$ substituiren, so stellt die so erhaltene Gleichung, in Verbindung mit jener des Ellipsoids, die Gleichung der Berührungscurve dar; somit sind:

$$\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

die Gleichungen der Leitlinie unseres Kegels.

Die Erzeugende wird offenbar, als durch den Punkt M gehend, durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} x-p &= Az \\ y-q &= Bz \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

darzustellen sein.

Um nun die Gleichung des berührenden Kegels zu erhalten, eliminiren wir vorerst aus diesen vier Gleichungen die Grössen x, y, z; indem wir aus (3) x und y durch z ausdrücken und diese Werthe in (1) und (2) substituiren. Aus (3) folgt:

$$\left.\begin{aligned} x &= Az + p \\ y &= Bz + q \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

demnach aus (1) und (4):

Digitized by Google

$$\frac{p}{a^2}(Az+p)+\frac{q}{b^2}(Bz+q)=1,$$

und hieraus:

$$z=\frac{1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2}{\frac{Ap}{a^2}+\frac{Bq}{b^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

Als Bedingungsgleichung für den Schnitt der Erzeugenden mit der Leitlinie ergibt sich sonach durch Substitution von (4) und (5) in (2):

$$\frac{1}{a^2}\left\{A\left[1-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right]+B\frac{pq}{b^2}\right\}^2+\frac{1}{b^2}\left\{B\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2\right]+A\frac{pq}{a^2}\right\}^2$$
$$+\frac{1}{c^2}\left\{1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right\}^2=\left\{\frac{Ap}{a^2}+\frac{Bq}{b^2}\right\}^2$$

oder nach Potenzen von A und B geordnet:

(6)

$$A^2\left\{\frac{\left[1-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right]^2}{a^2}+\frac{p^2q^2}{a^4b^2}-\frac{p^2}{a^4}\right\}+B^2\left\{\frac{\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2\right]^2}{b^2}+\frac{p^2q^2}{a^2b^4}-\frac{q^2}{b^4}\right\}$$
$$+\left\{\frac{1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2}{c}\right\}^2$$
$$+2AB\left\{\frac{pq\left[1-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right]}{a^2b^2}+\frac{pq\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2\right]}{a^2b^2}-\frac{pq}{a^2b^2}\right\}=0.$$

Werden die Ausdrücke in den grossen Klammern geordnet, ferner für A und B die Werthe aus (3)

$$A=\frac{x-p}{z},$$

$$B=\frac{y-q}{z}$$

substituirt, so ergibt sich die Gleichung:

$$\left(\frac{x-p}{az}\right)^2\left[\left(\frac{q}{b}\right)^2-1\right]\left[\left(\frac{p}{a}\right)^2+\left(\frac{q}{b}\right)^2-1\right]$$
$$+\left(\frac{y-q}{bz}\right)^2\left[\left(\frac{p}{a}\right)^2-1\right]\left[\left(\frac{p}{a}\right)^2+\left(\frac{q}{b}\right)^2-1\right]$$
$$+2\left(\frac{x-p}{az}\right)\left(\frac{y-q}{bz}\right)\frac{pq}{ab}\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right]$$
$$+\left[\frac{1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2}{c}\right]^2=0,$$

Digitized by Google

welche, durch $\left[\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 - 1\right]$ abgekürzt,

$$\left(\frac{x-p}{a}\right)^2\left[\left(\frac{q}{b}\right)^2-1\right]+\left(\frac{y-q}{b}\right)^2\left[\left(\frac{p}{a}\right)^2-1\right]-2\frac{pq}{ab}\left(\frac{x-p}{a}\right)\left(\frac{y-q}{b}\right)$$
$$=\left(\frac{z}{c}\right)^2\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right] \; \ldots\ldots \; (1)$$

oder in anderer Form geschrieben,

$$\left[\frac{q(x-p)-p(y-q)}{ab}\right]^2$$
$$=\left(\frac{x-p}{a}\right)^2+\left(\frac{y-q}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right] \ldots (1')$$

als die zu suchende Gleichung der Kegelfläche liefert.

Nehmen wir nun in der Ebene XOY eine durch M gehende Gerade, deren Gleichungen

$$\left.\begin{array}{r}(x-p)=A(y-p)\\ z=0\end{array}\right\} \; \ldots\ldots\ldots \; (7)$$

sein mögen, als die Axe eines Kegels an, dessen Spitze in M liegen soll, und der durch Rotation einer Geraden

$$\left.\begin{array}{r}x-p=Mz\\ y-q=Nz\end{array}\right\} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (8)$$

um diese Axe entstanden ist.

Um die Gleichung dieses Kegels aufzustellen, denke man sich denselben durch eine auf die Axe senkrechte Ebene

$$x=-\frac{1}{A}y+\alpha, \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (9)$$

so wie durch eine Kugelfläche geschnitten, welche ihren Mittelpunkt in M hat, und deren Gleichung sonach

$$(x-p)^2+(y-q)^2+z^2=\beta^2 \; \ldots\ldots \; (10)$$

ist, so werden beide Schnitte Kreislinien sein, und es muss offenbar eine Relation

$$\beta^2=\varphi(\alpha)$$

stattfinden.

Eliminirt man daher aus (9), (10) und (8) die Grössen x, y, z,

Digitized by Google

indem man aus (8) die Werthe für x und y in (9) und (10) setzt, und den aus (9) erhaltenen Werth

$$z = \frac{A(\alpha-p)-q}{AM+N}$$

in (10) substituirt, so ergibt sich:

$$M^2z^2+N^2z^2+z^2=\beta^2,$$

$$z^2(M^2+N^2+1)=\frac{[A(\alpha-p)-q]^2}{[AM+N]^2}(M^2+N^2+1)=\beta^2;$$

und, für $A(\alpha-p)$ den Werth $A(x-p)+y$ aus (9) gesetzt:

$$[A(x-p)+(y-q)]^2\frac{M^2+N^2+1}{[AM+N]^2}=(x-p)^2+(y-q)^2+z^2, \quad (\text{II}')$$

oder:

$$(x-p)^2\left[A^2\frac{M^2+N^2+1}{(AM+N)^2}-1\right]+(y-q)^2\left[\frac{M^2+N^2+1}{(AM+N)^2}-1\right]$$
$$+2A(x-p)(y-q)\frac{M^2+N^2+1}{(AM+N)^2}=z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (\text{II})$$

als die verlangte Gleichung des Rotationskegels.

Soll nun jeder durch (I) dargestellte Berührungskegel in einen Rotationskegel übergehen, so müssen die beiden Ausdrücke (I) und (II) identisch werden, woraus folgende Bedingungsgleichungen resultiren:

(11)

$$\frac{c^2}{a^2}\left[\left(\frac{q}{b}\right)^2-1\right]=\left[A^2\varphi^2-1\right]\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right],$$

$$\frac{c^2}{b^2}\left[\left(\frac{p}{a}\right)^2-1\right]=(\varphi^2-1)\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right],$$

$$\frac{c^2pq}{a^2b^2}=-A\varphi^2\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right];$$

wenn, der Kürze halber, der Ausdruck:

$$\frac{M^2+N^2+1}{(AM+N)^2}=\varphi^2$$

gesetzt wird *).

*) Die Bedeutung dieser Grösse φ ergibt sich einfach aus folgender

Digitized by Google

Diese drei Gleichungen enthalten vier variable Grössen, nämlich die beiden Coordinaten p und q der Kegelspitze, so wie A und φ, welch letztere den Neigungswinkel der Rotationsaxe gegen die XAxe, und den der rotirenden Geraden mit der Rotationsaxe bestimmen.

Durch Elimination je zweier dieser Variablen wird man die gegenseitige Abhängigkeit von den beiden anderen in Form einer Gleichung erhalten; es wird sich somit der geometrische Ort der fraglichen Kegelmittelpunkte ergeben, wenn man aus den obigen drei Gleichungen (11) die Grössen A und φ eliminirt.

Zu diesem Behufe setzen wir, der Kürze halber,

$$1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2=R^2,$$

bestimmen aus der zweiten dieser drei Gleichungen φ^2 und mit diesem Werthe aus der dritten die Grösse A, welche Werthe sodann in die erste Gleichung substituirt und geordnet die Relation

$$c^2[a^2R^2-c^2]\left(\frac{p}{a}\right)^2+c^2[b^2R^2-c^2]\left(\frac{q}{b}\right)^2+[a^2R^2-c^2][b^2R^2-c^2]=0$$

geben. Diese nach Potenzen von R geordnet, übergeht in

Betrachtung. Bezeichnen wir nämlich mit α_1, β_1, γ_1 die Winkel, welche die Rotationsaxe mit den drei Coordinatenaxen einschliesst, so sind diese durch die Gleichungen

$$\alpha_1=90^\circ-\beta_1,\quad \operatorname{tg}\beta_1=A,\ \text{und}\ \gamma_1=90^\circ,$$

folglich:

$$\cos\alpha_1=\frac{A}{\sqrt{1+A^2}},\quad \cos\beta_1=\frac{1}{\sqrt{1+A^2}},\quad \cos\gamma_1=0$$

bekannt. Sind ebenso α_2, β_2, γ_2 die Neigungswinkel der rotirenden Geraden mit den Coordinatenaxen, so erhält man zur Bestimmung derselben bekanntlich die Gleichungen:

$$\cos\alpha_2=\frac{M}{\sqrt{M^2+N^2+1}},\quad \cos\beta_2=\frac{N}{\sqrt{M^2+N^2+1}},\quad \cos\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{M^2+N^2+1}};$$

folglich für den Neigungswinkel δ der Geraden gegen die Rotationsaxe:

$$\cos\delta=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2$$

$$=\frac{AM+N}{\sqrt{M^2+N^2+1}\sqrt{1+A^2}}=\frac{AM+N}{\sqrt{M^2+N^2+1}}\cos\beta_1=\frac{1}{\varphi}\cos\beta_1.$$

Es ist mithin $$\varphi=\frac{\cos\beta_1}{\cos\delta}=\frac{\sin\alpha_1}{\cos\delta}.$$

Digitized by Google

$$a^2b^2R^4 + (p^2c^2 + c^2q^2 - b^2c^2 - a^2c^2)R^2 + c^4\left[1 - \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \left(\frac{q}{b}\right)^2\right] = 0,$$

und, der Faktor $R^2 = 1 - \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \left(\frac{q}{b}\right)^2$ herausgehoben:

$$\left[1 - \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \left(\frac{q}{b}\right)^2\right][a^2b^2R^2 + p^2c^2 + q^2c^2 - b^2c^2 - a^2c^2 + c^4] = 0,$$

endlich für R^2 der Werth gesetzt und reducirt:

(12)

$$\left[1 - \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \left(\frac{q}{b}\right)^2\right][p^2(c^2 - b^2) + q^2(c^2 - a^2) + (c^2 - b^2)(c^2 - a^2)] = 0.$$

Es ist dies somit die Gleichung jener ebenen Kurve, welche die Eigenschaft besitzt, dass der aus jedem Punkte ihrer Peripherie an das Ellipsoid gelegte berührende Kegel ein Rotationskegel ist. Aus derselben ist ersichtlich, dass diese Kurve aus zwei Linien des zweiten Grades:

$$\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 = 1$$

und

$$p^2(c^2 - b^2) + q^2(c^2 - a^2) + (c^2 - b^2)(c^2 - a^2) = 0$$

zusammengesetzt ist, deren Bedeutung wir untersuchen wollen.

Betrachten wir die erste dieser Gleichungen, so stellt uns diese nichts anders als den Schnitt des Ellipsoides mit der Ebene XOY, d. i. den horizontalen Hauptschnitt AB dieser Fläche vor. Es müsste also für diesen Fall die Kegelspitze stets im Umfange der Fläche sich fortbewegen, woraus folgt, dass der berührende Kegel in eine berührende Ebene übergeht. Wir haben sonach diese Gleichung weiter nicht zu berücksichtigen.

Die zweite Relation

$$p^2(c^2 - b^2) + q^2(c^2 - a^2) + (c^2 - b^2)(c^2 - a^2) = 0$$

hat nur dann eine geometrische Bedeutung, wenn eine der beiden Differenzen $c^2 - b^2$ oder $c^2 - a^2$ negativ wird. Es bestätigt dies unsere gleich Anfangs gestellte Vermuthung, dass die Punkte M in jener Ebene liegen dürften, welche man durch die grösste und kleinste Axe legt; denn, lässt man $c^2 - b^2$ positiv, so muss $c^2 - a^2$ negativ angenommen werden, und umgekehrt, woraus immer folgt, dass c die mittlere Axe sein muss.

Digitized by Google

Unter dieser Voraussetzung erhält sodann unsere Gleichung die Form

$$p^2(c^2-b^2)-q^2(a^2-c^2)=(a^2-c^2)(c^2-b^2),$$

oder:

$$\frac{p}{a^2-c^2}-\frac{q^2}{c^2-b^2}=1,$$

$$\left(\frac{p}{\sqrt{a^2-c^2}}\right)^2-\left(\frac{q}{\sqrt{c^2-b^2}}\right)^2=1; \quad . \; . \; . \; . \; . \; \text{(III)}$$

welches die Gleichung einer Hyperbel ist, deren reelle Axe $\sqrt{a^2-c^2}$ in der XAxe, und deren imaginäre Axe $\sqrt{c^2-b^2}$ in der YAxe liegt.

Es lässt sich sonach der Satz aussprechen:

Den geometrischen Ort der Kegelspitzen aller Rotationskegel mit horizontaler Axe, welche ein dreiaxiges Ellipsoid berühren, bildet eine Hyperbel, deren Axenrichtungen mit jenen des Ellipsoids übereinstimmen, und welche die Excentricitäten der beiden auf die Horizontalebene senkrechten Hauptschnitte des Ellipsoides als Axen hat.

§. 2.

Von besonderem Interesse ist ferner, dass die Hyperbel, welche ihren Scheitel im Innern des Ellipsoides hat, aus dieser Fläche in den vier Nabelpunkten heraustritt. Wird nämlich der Durchschnitt der Hyperbel mit dem in der Ebene XOY liegenden Hauptschnitte des Ellipsoides gesucht, so ergeben sich als Coordinaten der Durchschnittspunkte jene der Nabelpunkte, nämlich:

$$x=\pm a\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2-b^2}},$$

$$y=\pm b\sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-b^2}}.$$

§. 3.

Es sei in Taf. III. Fig. 2. die Papierfläche die Coordinatenebene XOY, in welcher die Hyperbel zu verzeichnen ist, ferner $AA'BB'$ der in dieser Ebene liegende Hauptschnitt des Ellip-

Digitized by Google

soides, mithin $OA = OA' = a$, $OB = OB' = b$, endlich $CC'DD'$ ein mit der dritten Axe c, als Radius, aus dem Mittelpunkte O beschriebener Kreis, daher $OC = OC' = OD = OD' = c$, so werden dem Obigen zu Folge die Scheitel M und M' der Hyperbel einfach erhalten, wenn man die Axe XX' aus C oder C' mit einem Kreise vom Halbmesser $OA = a$ durchschneidet.

Die Richtungen der Asymptoten können gefunden werden, indem man auf ähnliche Weise die imaginäre Axe $ON = ON' = OR$ sucht, über beiden Axen das Rechteck verzeichnet und dessen Diagonalen zieht. Sie ergeben sich jedoch auch, wenn man zu den an die Ellipse und den Kreis $CC'DD'$ gemeinschaftlich gelegten Tangenten T, T', T_1 und T_1', durch den Mittelpunkt O, die Parallelen SS', S_1S_1' führt.

Die letztgenannte Konstruktion der Asymptoten lässt sich analytisch, so wie auch rein geometrisch beweisen.

Bezeichnen wir mit x_1 und y_1 die Coordinaten der Berührungspunkte des Kreises, mit x_2 und y_2 jene der Ellipse, durch die gemeinschaftliche Tangente, so müssen folgende Bedingungsgleichungen bestehen:

$$x_2^2 + y_2^2 = c^2,$$

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{b}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} = \frac{x_2}{y_2},$$

$$\frac{x_1}{a^2} = \frac{x_2}{c^2}.$$

Aus den beiden letzten dieser Gleichungen folgt:

$$x_1 = \frac{a^2}{c^2} x_2,$$

$$y_1 = \frac{b^2}{c^2} y_2;$$

welche Werthe, in die zweite Gleichung substituirt,

$$\frac{a^2 x_2^2}{c^2} + \frac{b^2 y_2^2}{c^2} = c^2$$

geben. Vergleicht man die letztgefundene Gleichung mit der ersten, so ergibt sich:

$$c^2 (x_2^2 + y_2^2) = a^2 x_2^2 + b^2 y_2^2,$$

Digitized by Google

oder:

$$c^2\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^2 + c^2 = a^2\left(\frac{x_2}{y_2}\right)^2 + b^2,$$

woraus die trigonometrische Tangente $\frac{x_2}{y_2}$ dieser vier Berührenden mit der Axe XX'

$$\frac{x_2}{y_2} = \operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\frac{c^2-b^2}{a^2-c^2}}$$

resultirt, welcher Werth dem Quozienten aus den beiden Hyperbelaxen gleich ist, mithin die Asymptoten zu jenen Tangenten parallel sein müssen.

Rein geometrisch lässt sich die Richtigkeit der obigen Konstruktion folgendermassen nachweisen:

Denkt man sich aus einem in unendlicher Entfernung liegenden Punkte der Hyperbel an das Ellipsoid den berührenden Kegel gelegt, so übergeht dieser in einen berührenden Cylinder, welcher das Ellipsoid in einer Ellipse berühren wird. Diese Ellipse liegt in einer durch die Axe c gehenden Vertikalebene, deren Trace auf der Ebene XOY durch den zur Richtung der Asymptoten conjugirten Durchmesser gegeben ist.

Weil nun dieser Cylinder ein senkrechter, von kreisförmiger Leitlinie sein soll, so muss derselbe auch eine Kugel vom Radius c berühren, welche denselben Mittelpunkt O hat, und deren Schnitt mit der Ebene XOY der Kreis $CC'DD'$ ist. Da nun die Erzeugenden des Cylinders parallel zu den Asymptoten sind, so wird sich die Richtung der Letzteren ergeben, wenn man an die Ellipse und den Kreis die gemeinschaftlichen Berührenden legt.

§. 4.

Aus der letzten der drei Gleichungen (11) folgt:

$$A\varphi^2 = -\frac{c^2pq}{a^2b^2\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right]},$$

welcher Werth in die erste gesetzt,

$$\frac{c^2}{a^2}\left[\left(\frac{q}{b}\right)^2-1\right] = -\left\{A\frac{c^2pq}{a^2b^2\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right]}+1\right\}\cdot\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right]$$

$$= -\left\{A\frac{c^2pq}{a^2b^2} + 1 - \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \left(\frac{q}{b}\right)^2\right\},$$

Digitized by Google

daher:

$$A\frac{c^2pq}{a^2b^2}=\left(\frac{p}{a}\right)^2+\left[\left(\frac{q}{b}\right)^2-1\right]\left[1-\left(\frac{c}{a}\right)^2\right]$$

$$=\frac{a^2-c^2}{a^2}\left\{\frac{p^2}{a^2-c^2}+\left(\frac{q}{b}\right)^2-1\right\}$$

liefert.

Nun ist auch

$$\frac{p^2}{a^2-c^2}-\frac{q^2}{c^2-b^2}=1,$$

daher:

$$\frac{p^2}{a^2-c^2}=1+\frac{q^2}{c^2-b^2}.$$

Wird dieser Werth in die letztgefundene Gleichung gesetzt, so ergibt sich:

$$q^2\left[1+\frac{b^2}{c^2-b^2}\right]=\frac{q^2}{c^2-b^2}=\frac{Ac^2pq}{a^2-c^2},$$

woraus

$$A=\frac{a^2-c^2}{c^2-b^2}\cdot\frac{q}{p}$$

wird. Differenzirt man die Gleichung (III) nach q, so erhält man:

$$\frac{2p\frac{dp}{dq}}{a^2-c^2}=\frac{2q}{c^2-b^2},$$

folglich:

$$\frac{dp}{dq}=\frac{a^2-c^2}{c^2-b^2}\cdot\frac{q}{p}.$$

Es ist somit:

$$A=\frac{dp}{dq},$$

woraus erhellt, dass die Kegelaxe stets die Hyperbel tangirt, oder mit anderen Worten, dass die gefundene Hyperbel die einhüllende Kurve sämmtlicher Axen der Rotationskegel ist.

§. 5.

Um die Fläche zu bestimmen, welche die aufeinanderfolgenden Lagen jener Ebenen umhüllt, in welchen die Berührungskurven

der Rotationskegel und des Ellipsoids liegen, ist zu berücksichtigen, das unserer Annahme zufolge alle diese Ebenen senkrecht auf die Coordinatenebene XOY sind, folglich einen Cylinder einhüllen werden, dessen Erzeugenden parallel zur Axe OZ sein müssen. Es wird demnach die nachfolgende Untersuchung sich darauf beschränken, die Leitlinie der Cylinderfläche in der Ebene XOY aufzusuchen, welche sich als umhüllende Kurve sämmtlicher Tracen der obgenannten Ebenen auf dieser Coordinatenebene ergeben wird.

Nach (1) ist die allgemeine Gleichung dieser Tracen:

$$\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1,$$

wobei für p und q die Bedingungsgleichung

$$\left(\frac{p}{\varepsilon_1}\right)^2 - \left(\frac{q}{\varepsilon_2}\right)^2 = 1$$

stattfindet, wenn wir nämlich $\varepsilon_1 = \sqrt{a^2-c^2}$, $\varepsilon_2 = \sqrt{c^2-b^2}$ setzen.

Nach der Theorie der einhüllenden Kurven müssen wir nun die Grössen p und q aus diesen beiden Gleichungen und dem aus denselben sich ergebenden Differentialquotienten $\frac{dp}{dq}$ eliminiren, um zu dem gewünschten Resultate zu gelangen.

Durch Differentiation beider erhält man:

$$\frac{x}{a^2} \cdot \frac{dp}{dq} + \frac{y}{b^2} = 0,$$

$$\frac{p}{\varepsilon_1^2} \cdot \frac{dp}{dq} - \frac{q}{\varepsilon_2^2} = 0;$$

folglich hieraus durch Elimination von $\frac{dp}{dq}$.

$$p = -\left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{y}\right) \cdot q.$$

Diesen Werth in die beiden oberen Relationen substituirt, folgt:

$$q = \frac{y}{\left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2 \cdot \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

$$q^2 \left\{ \frac{1}{\varepsilon_1^2} \cdot \frac{b^4}{a^4} \cdot \frac{\varepsilon_1^4}{\varepsilon_2^4} \cdot \frac{x^2}{y^2} - \frac{1}{\varepsilon_2^2} \right\} = 1 = \frac{q^2}{\varepsilon_2^2} \cdot \frac{b^4 \varepsilon_1^2 x^2 - a^4 \varepsilon_2^2 y^2}{a^4 \varepsilon_2^2 y^2}$$

$$= \frac{a^8 b^4 \varepsilon_2^4 y^2}{[a^4 \varepsilon_2^2 y^2 - b^4 \varepsilon_1^2 x^2]^2} \cdot \frac{b^4 \varepsilon_1^2 x^2 - a^4 \varepsilon_2^2 y^2}{a^4 \varepsilon_2^2 y^2} = \frac{a^4 b^4}{b^4 \varepsilon_1^2 x^2 - a^4 \varepsilon_2^2 y^2}.$$

Digitized by Google

Daher ist die Gleichung der zu suchenden Cylinderleitlinie:

$$b^4 \varepsilon_1^2 x^2 - a^4 \varepsilon_2^2 y^2 = a^4 b^4,$$

oder:

$$\left(\frac{\varepsilon_1 . x}{a^2}\right)^2 - \left(\frac{\varepsilon_2 y}{b^2}\right)^2 = 1, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (\text{IV})$$

und diese selbst eine Hyperbel, deren Axen mit jenen des Hauptschnittes des Ellipsoids zusammenfallen und die Werthe $\frac{a^2}{\varepsilon_1}$ (reelle), $\frac{b^2}{\varepsilon_2}$ (imaginäre Axe) besitzen.

Den Winkel, welchen die Asymptoten dieser Hyperbel mit der *X*Axe bilden, bestimmt die Gleichung:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2}{\varepsilon_2} : \frac{a^2}{\varepsilon_1} = \frac{b^2}{a^2 . \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}.$$

Nun ist jedoch $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ nichts anders als die trigonometrische Tangente des Asymptotenwinkels der erstgefundenen Hyperbel, also $\operatorname{tg} \alpha'$, folglich:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b^2}{a^2 . \operatorname{tg} \alpha'},$$

woraus ersichtlich wird, dass die Richtungen der Asymptoten dieser Hyperbel durch die zu den Richtungen der Asymptoten der ersten Hyperbel conjugirten Durchmesser der Ellipse $AA'BB'$ bestimmt sind. Wir werden somit bloss in den Punkten H und K, wo die ersteren Asymptoten die Ellipse schneiden, Tangenten zu verzeichnen, und die zu suchenden Asymptoten zu diesen Tangenten, durch den Mittelpunkt O, parallel zu ziehen haben.

Die Axen der Hyperbel können einfach durch Konstruktion der Ausdrücke $\frac{a^2}{\varepsilon_1}$ und $\frac{b^2}{\varepsilon_2}$ gefunden werden; sie ergeben sich jedoch auch, wenn man in denjenigen Punkten der Ellipse, welche beziehungsweise ε_1, als Abscisse, oder ε_2 als Ordinate haben, Tangenten zieht, welch Letztere die bezüglichen Coordinatenaxen in den zu bestimmenden Endpunkten der Hyperbelaxen schneiden, was sich sehr einfach beweisen lässt.

§. 6.

Führen wir nun die Untersuchung allgemein durch, d. h. ohne

Digitized by Google

die Kegelspitze in einer Hauptebene anzunehmen, und bezeichnen die Coordinaten derselben mit p, q, r, so sind

$$\left.\begin{aligned} \frac{px}{a^2}+\frac{qy}{b^2}+\frac{rz}{c^2}&=1 \\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}&=1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (13)$$

die Gleichungen der Berührungskurve des Ellipsoids, und

$$\left.\begin{aligned} x-p&=A(z-r) \\ y-q&=B(z-r) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (14)$$

jene der Erzeugenden des Kegels.

Werden die Werthe für y und x aus (14) bestimmt, und in (13) gesetzt, so ergibt sich:

$$\frac{p}{a^2}(p+Az-Ar)+\frac{q}{b^2}(q+Bz-Br)+\frac{r}{c^2}z=1,$$

$$\frac{1}{a^2}(Az+p-Ar)^2+\frac{1}{b^2}(Bz+q-Br)+\frac{z^2}{c^2}=1;$$

und aus der oberen:

$$z=\frac{1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2+A\frac{rp}{a^2}+B\frac{rq}{b^2}}{\frac{Ap}{a^2}+\frac{Bq}{b^2}+\frac{r}{c^2}},$$

folglich auch:

$$Az+p-Ar=\frac{A\left[1-\left(\frac{q}{b}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right]+\frac{Bpq}{b^2}+\frac{pr}{c^2}}{\frac{Ap}{a^2}+\frac{Bq}{b^2}+\frac{r}{c^2}},$$

$$Bz+q-Br=\frac{B\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right]+\frac{Apq}{a^2}+\frac{qr}{c^2}}{\frac{Ap}{a^2}+\frac{Bp}{b^2}+\frac{r}{c^2}}.$$

Diese Werthe, in die untere Gleichung gesetzt, verwandeln dieselbe in folgende:

Digitized by Google

$$\frac{1}{a^2}\left\{A^2\left[1-\left(\frac{q}{b}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right]^2+2\frac{ABqp}{b^2}\left[1-\left(\frac{q}{b}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right]\right.$$

$$\left.+2\frac{Apr}{c^2}\left[1-\left(\frac{q}{b}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right]+2B\frac{p^2qr}{b^2c^2}+\frac{B^2p^2q^2}{b^4}+\frac{p^2r^2}{c^4}\right\}$$

$$+\frac{1}{b^2}\left\{B^2\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right]^2+2\frac{ABpq}{a^2}\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right]\right.$$

$$\left.+2B\frac{qr}{c^2}\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right]+2A\frac{pq^2r}{a^2c^2}+\frac{A^2p^2q^2}{a^4}+\frac{q^2r^2}{c^4}\right\}$$

$$+\frac{1}{c^2}\left\{\frac{A^2r^2p^2}{a^4}+\frac{B^2r^2q^2}{b^4}+2\frac{ABr^2pq}{a^2b^2}+2\frac{Arp}{a^2}\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right]\right.$$

$$\left.+2\frac{Brq}{b^2}\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right]+\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right]^2\right\}$$

$$=\frac{A^2p^2}{a^4}+\frac{B^2q^2}{b^4}+2\frac{ABpq}{a^2b^2}+2\frac{Apr}{a^2c^2}+2\frac{Bqr}{b^2c^2}+\frac{r^2}{c^4},$$

welche, nach A und B geordnet,

$$A^2\left\{\frac{1}{a^2}\left[1-\left(\frac{q}{b}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right]^2+\frac{p^2q^2}{a^4b^2}+\frac{r^2p^2}{a^4c^2}-\frac{p^2}{a^4}\right\}$$

$$+B^2\left\{\frac{1}{b^2}\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right]^2+\frac{p^2q^2}{a^2b^4}+\frac{r^2q^2}{b^4c^2}-\frac{q^2}{b^4}\right\}$$

$$+2AB\left\{\frac{pq}{a^2b^2}[1-\left(\frac{q}{b}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2]+\frac{pq}{a^2b^2}[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2]+\frac{r^2pq}{a^2b^2c^2}-\frac{pq}{a^2b^2}\right\}$$

$$+2A\left\{\frac{pr}{a^2c^2}[1-\left(\frac{q}{b}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2]+\frac{pq^2r}{a^2b^2c^2}+\frac{rp}{a^2c^2}[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2]-\frac{pr}{a^2c^2}\right\}$$

$$+2B\left\{\frac{qr}{b^2c^2}[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2]+\frac{p^2qr}{a^2b^2c^2}+\frac{rq}{b^2c^2}[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2]-\frac{qr}{b^2c^2}\right\}$$

$$+\left\{\frac{p^2r^2}{a^2c^4}+\frac{q^2r^2}{b^2c^4}+\frac{1}{c^2}\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right]^2-\frac{r^2}{c^3}\right\}=0$$

gibt.

Untersucht man die einzelnen Koeffizienten, so findet man in denselben den gemeinschaftlichen Faktor $1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2$, durch welchen die Gleichung abgekürzt, in folgende übergeht:

$$\left(\frac{A}{a}\right)^2\left\{1-\left(\frac{q}{b}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right\}+\left(\frac{B}{b}\right)^2\left\{1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right\}+2AB\frac{pq}{a^2b^2}$$

$$+2A\frac{pr}{a^2c^2}+2B\frac{qr}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2}\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right]=0.$$

Digitized by Google

Setzt man endlich für A und B die Werthe aus (14), so erhält man die Gleichung des berührenden Kegels:

$$\left(\frac{x-p}{a}\right)^2\left[1-\left(\frac{q}{b}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right]+\left(\frac{y-q}{b}\right)^2\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right]$$
$$+\left(\frac{z-r}{c}\right)^2\left[1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right]+2\left(\frac{x-p}{a}\right)\left(\frac{y-q}{b}\right)\frac{pq}{ab}$$
$$+2\left(\frac{x-p}{a}\right)\left(\frac{z-r}{c}\right)\frac{pr}{ac}+2\left(\frac{y-q}{b}\right)\left(\frac{z-r}{c}\right)\frac{qr}{bc}=0 \quad \ldots\ldots \quad \text{(V)}$$

Für den bezüglichen Rotationskegel haben wir wieder

$$x-p=A(z-r),$$
$$y-q=B(z-r)$$

als Gleichungen der Rotationsaxe, und

$$x-p=M(z-r),$$
$$y-q=N(z-r)$$

jene der rotirenden Geraden, daher

$$Ax+By+z=\alpha$$

die Gleichung einer auf der Rotationsaxe senkrecht stehenden Ebene, und

$$(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2=\beta^2$$

jene einer Kugelfläche, die ihren Mittelpunkt in M hat.

Eliminirt man aus diesen Gleichungen x, y und z, so ergibt sich die Bedingungsgleichung

$$\left[\frac{\alpha-r-Ap-Bq}{AM+BN+1}\right]^2(M^2+N^2+1)=\beta^2,$$

und werden für α und β^2 die Werthe gesetzt, so folgt:

(VI′)

$$\{A(x-p)+B(y-q)+(z-r)\}^2\frac{M^2+N^2+1}{(AM+BN+1)^2}=(x-p)^2+(y-q)^2+(z-r)^2$$

oder:

(VI)

$$(x-p)^2(A^2\varphi^2-1)+(y-q)^2(B^2\varphi^2-1)+(z-r)^2(\varphi^2-1)$$
$$+2AB(x-p)(y-q)\varphi^2+2A(x-p)(z-r)\varphi^2+2B(y-q)(z-r)\varphi^2=0,$$

wenn wir nämlich der Kürze halber

$$\frac{M^2+N^2+1}{(AM+BN+1)^2}=\varphi^2$$

setzen, als die Gleichung des Rotationskegels.

Digitized by Google

Auch hier hat der Ausdruck φ^2 eine ähnliche Bedeutung wie früher.

Soll der berührende Kegel ein Rotationskegel sein, so müssen folgende, aus der Vergleichung von (V) und (VI) resultirende Bedingungsgleichungen bestehen:

(15)

$$\frac{c^2}{a^2}\left\{1-\left(\frac{q}{b}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right\} = \frac{A^2\varphi^2-1}{\varphi^2-1}\left\{1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right\} \quad \ldots (\alpha)$$

$$\frac{c^2}{b^2}\left\{1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2\right\} = \frac{B^2\varphi^2-1}{\varphi^2-1}\left\{1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right\} \quad \ldots (\beta)$$

$$\frac{c^2pq}{a^2b^2} = AB\frac{\varphi^2}{\varphi^2-1}\left\{1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right\} \quad \ldots (\gamma)$$

$$\frac{pr}{a^2} = A\frac{\varphi^2}{\varphi^2-1}\left\{1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right\} \quad \ldots (\delta)$$

$$\frac{qr}{b^2} = B\frac{\varphi^2}{\varphi^2-1}\left\{1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2\right\} \quad \ldots (\varepsilon)$$

Wir haben hier fünf Gleichungen zwischen sechs Variablen p, q, r, A, B, φ, (weil φ, obzwar es die Grössen M und N enthält, bloss als eine Variable angesehen werden darf), woraus schon hervorgeht, dass der geometrische Ort der Kegelspitzen durch zwei Gleichungen gegeben, also eine Linie sein wird.

Eliminiren wir demnach die Grössen A, B, φ, so werden diese sich, wie folgt, ergeben.

Aus (γ), (δ) und (ε) erhalten wir:

$$A = \frac{c^2p}{a^2r} \qquad B = \frac{c^2q}{b^2r}; \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

sowie:

$$\frac{\varphi^2}{\varphi^2-1} = \frac{r^2}{c^2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2}.$$

Bezeichnet man weiters den Ausdruck

$$1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2-\left(\frac{r}{c}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (17)$$

mit U, und setzt diese Werthe in die beiden Gleichungen (α) und (β), so erhält man aus (α):

$$\frac{c^2}{a^2}\left\{U+\left(\frac{p}{a}\right)^2\right\} = \frac{-\frac{c^4p^2}{a^4r^2}\cdot\frac{r^2}{c^2}\cdot\frac{1}{U}-1}{-\frac{r^2}{c^2}\cdot\frac{1}{U}-1}\left\{U+\left(\frac{r}{c}\right)^2\right\} = \frac{c^2p^2}{a^4}+U,$$

(weil aus (17) $\varphi^2 = -\frac{r^2}{c^2} \cdot \frac{1}{U}$ folgt), daher

$$\frac{c^2}{a^2} U = U. \qquad (18)$$

Ebenso ergibt sich aus (β)

$$\frac{c^2}{b^2} U = U, \qquad (19)$$

woraus ersichtlich ist, dass für den Fall, als A und B endliche Werthe erhalten, ein berührender Rotationskegel nur dann möglich ist, wenn

$$U = 1 - \left(\frac{p}{a}\right)^2 - \left(\frac{q}{b}\right)^2 - \left(\frac{r}{c}\right)^2 = 0, \quad \text{d. i.}$$

$$\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 + \left(\frac{r}{c}\right)^2 = 1 \qquad \text{(VII)}$$

wird; d. h. wenn die Kegelspitze M in der Oberfläche des Ellipsoides liegt, wo dann der Kegel in die betreffende Berührungsebene übergeht, oder wenn

$$\frac{c}{a} = \frac{c}{b} = 1,$$

$$a = b = c \qquad \text{(VIII)}$$

ist, d. i. wenn das Ellipsoid in eine Kugel übergeht, bei welcher bekanntlich jeder berührende Kegel ein Rotationskegel ist.

Nimmt man jedoch eine der Grössen A oder B gleich Null, oder unendlich gross an, so kann dies durch Substitution einer der Gleichungen

$$p = 0, \; q = 0, \; r = 0$$

erreicht werden, und wir haben alsdann die Untersuchung in einer der drei Coordinatenebenen durchzuführen, wie dieselbe gleich anfänglich vorgenommen wurde.

Wir erhalten durch die Substitution dieser Bedingung in die Gleichungen (15) genau jene drei Bedingungsgleichungen (11), indem zwei Relationen aus (15) entfallen. Selbstverständlich hat man zu berücksichtigen, dass der Quotient $\frac{A}{B}$ (für $r = 0$) als neue Variable einzuführen sein wird.

Da nun bei der Untersuchung in einer Coordinatenebene bewiesen wurde, dass die fragliche Kurve sich in jener Ebene be-

Digitized by Google

findet, welche durch die grösste und kleinste Axe des Ellipsoides geht, und wir bei der allgemeinen Untersuchung auf eine Axenebene übergehen mussten, so folgt hieraus, dass jenes bei der speziellen Entwickelung erhaltene Resultat das einzig mögliche ist.

§. 7.

Für die den Schluss dieses Aufsatzes bildende Konstruktion ist es ferner von Interesse, zu untersuchen, welches der geometrische Ort aller Kegelspitzen sei, die erhalten werden, wenn man die sämmtlichen, das Ellipsoid umhüllenden Rotationskegel parallel zu sich selbst so lange verschiebt, bis sie eine gegebene Kugel berühren.

Zu diesem Behufe sei in Taf. III. Fig. 3. SA die Axe und BSC der Umriss eines das gegebene Ellipsoid berührenden Rotationskegels, welcher so weit verschoben wird, bis er die Kugel K vom Radius R berührt, wodurch seine Spitze nach S_1 gelangt. Selbstverständlich muss in dieser Lage die Kegelaxe S_1O durch den Mittelpunkt O der Kugel gehen, welcher, der Einfachheit halber, mit dem Mittelpunkte O des Ellipsoides zusammenfallend angenommen wurde.

Benützen wir auch hier dasselbe Coordinatensystem, wie in den vorigen Fällen, so werden $OP_1 = x$, $S_1P_1 = y$ die rechtwinkligen, $OS_1 = \varrho$, $\angle XOS_1 = \alpha$ die polaren Coordinaten (in Bezug auf den Pol O und die Polaraxe OX) eines Punktes S_1 der zu suchenden Kurve sein.

Zur Bestimmung derselben haben wir nachfolgende Gleichungen:

1) Aus dem rechtwinkligen Dreiecke OES_1:

$$R = \varrho \sin\delta \text{ oder } \varrho = \frac{R}{\sin\delta},$$

wenn δ den Winkel bezeichnet, welchen die rotirende Erzeugende des Kegels mit der Kegelaxe bildet.

2) Für die jedesmalige Fixirung der Kegelaxe SA werden die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{p}{\varepsilon_1}\right)^2 - \left(\frac{q}{\varepsilon_2}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{1}{A} = \frac{dq}{dp} = \frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1^2} \cdot \frac{p}{q} = \operatorname{tg}\alpha$$

Digitized by Google

hinreichen, wovon die erste die Lage der Kegelspitze S, die zweite die Neigung der Kegelaxe gegen die Coordinatenaxe OX angibt, wenn wir mit p und q die Coordinaten OP und SP der Kegelspitze und mit $\varepsilon_1 = \sqrt{a^2-c^2}$, $\varepsilon_2 = \sqrt{c^2-b^2}$ die Axenlängen der Hyperbel, in welcher die Kegelspitze S liegt, bezeichnen.

3) Endlich erhalten wir, wie aus der Anmerkung des §. I. ersichtlich ist, eine Relation:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\delta} - \varphi^2 = -\frac{1}{A}\cdot\frac{c^2}{a^2b^2}\cdot\frac{pq}{1-\left(\frac{p}{a}\right)^2-\left(\frac{q}{b}\right)^2}$$

zwischen den Winkeln α und δ.

Durch Elimination der Grössen p, q und δ aus diesen vier Gleichungen wird eine Gleichung zwischen ϱ und α resultiren, welche die zu suchende Kurve bestimmen wird.

Fassen wir mithin die Gleichungen in 2) in's Auge und bestimmen aus denselben die Werthe p und q, so ergeben sich hiefür einfach die Ausdrücke:

$$p^2 = \frac{\varepsilon_1^4 \operatorname{tg}^2\alpha}{\varepsilon_1^2 \operatorname{tg}^2\alpha - \varepsilon_2^2},$$

$$q^2 = \frac{\varepsilon_2^4}{\varepsilon_1^2 \operatorname{tg}^2\alpha - \varepsilon_2^2};$$

folglich:

$$pq = \frac{\varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 \operatorname{tg}\alpha}{\varepsilon_1^2 \operatorname{tg}^2\alpha - \varepsilon_2^2}.$$

Diese Werthe, in die letzte der vier Gleichungen gesetzt, geben:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\delta} = -\frac{c^2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\operatorname{tg}^2\alpha}{a^2b^2(\varepsilon_1^2\operatorname{tg}^2\alpha-\varepsilon_2^2)-b^2\varepsilon_1^4\operatorname{tg}^2\alpha-a^2\varepsilon_1^4}.$$

Werden im Nenner die Glieder, welche $\operatorname{tg}^2\alpha$ enthalten, zusammengezogen, und wird berücksichtigt, dass $a^2-\varepsilon_1^2=c^2$, $b^2+\varepsilon_2^2=c^2$ ist, so lässt sich der Bruch durch c^2 abkürzen, wodurch er die Form erhält:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\delta} = -\frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\operatorname{tg}^2\alpha}{b^2\varepsilon_1^2\operatorname{tg}^2\alpha - a^2\varepsilon_2^2} = \frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2\sin^2\alpha}{a^2\varepsilon_2^2\cos^2\alpha - b^2\varepsilon_1^2\sin^2\alpha}.$$

Hieraus folgt, wenn zu beiden Seiten der Gleichung durch $\sin^2\alpha$ abgekürzt und der reziproke Werth genommen wird:

Digitized by Google

$$\cos^2\delta = \frac{a^2\varepsilon_2^2\cos^2\alpha - b^2\varepsilon_1^2\sin^2\alpha}{\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2},$$

daher:

$$\sin^2\delta = 1 - \cos^2\delta = \frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 - a^2\varepsilon_2^2\cos^2\alpha + b^2\varepsilon_1^2\sin^2\alpha}{\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2}.$$

Die erste der aufgestellten Bedingungsgleichungen quadrirt, gibt:

$$\varrho^2 = \frac{R^2}{\sin^2\delta},$$

und für $\sin^2\delta$ den eben gefundenen Werth gesetzt:

$$\varrho^2 = \frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 R^2}{c^2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 + b^2\varepsilon_1^2\sin^2\alpha - a^2\varepsilon_2^2\cos^2\alpha},$$

als die Polargleichung der zu suchenden Kurve.

Sollen die rechtwinkligen Coordinaten eingeführt werden, so hat man bekanntlich

$$\varrho^2 = x^2 + y^2,\ \sin^2\alpha = \frac{y^2}{x^2+y^2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{x^2}{x^2+y^2}$$

zu substituiren. Wird dies vorgenommen und die ganze Gleichung durch $x^2 + y^2$ abgekürzt, so erhält man:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 R^2}{\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2(x^2+y^2) - a^2\varepsilon_2^2x^2 + b^2\varepsilon_1^2y^2} \\ &= \frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 R^2}{\varepsilon_1^2y^2(b^2+\varepsilon_2^2) - \varepsilon_2^2x^2(a^2-\varepsilon_1^2)} \\ &= \frac{\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2 R^2}{\varepsilon_1^2c^2y^2 - \varepsilon_2^2c^2x^2}. \end{aligned}$$

Es ist sonach:

$$c^2\varepsilon_1^2y^2 - c^2\varepsilon_2^2x^2 = \varepsilon_1^2\varepsilon_2^2R^2,$$

oder:

$$\frac{y^2}{\left(\frac{R\varepsilon_2}{c}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{R\varepsilon_1}{c}\right)^2} = 1 \quad \ldots\ldots \text{(IX)}$$

die Gleichung der zu bestimmenden Kurve, folglich diese eine Hyperbel, deren reelle Axe mit der Richtung der imaginären Axe der in §. 1. erhaltenen Hyperbel (III), und umgekehrt, zusammenfällt, und deren Axenlängen den Axenlängen dieser Hyperbel (III) derart proportional erscheinen, dass das Verhältniss

Digitized by Google

der reellen Axe der einen mit der imaginären Axe der anderen Hyperbel, und umgekehrt, durch den Quotienten $\frac{R}{c}$ angegeben wird.

Wäre $R = c$, d. h. der Halbmesser der Kugel gleich der mittleren Axe des Ellipsoides angenommen worden, so würde für diesen Fall

$$\left(\frac{y}{\varepsilon_2}\right)^2 - \left(\frac{x}{\varepsilon_1}\right)^2 = 1$$

die Gleichung unserer Hyperbel sein, woraus ersichtlich ist, dass diese sodann mit der Hyperbel (III) gleiche Axenlängen besitzt, und nur der Unterschied obwaltet, dass die reelle Axe der ersteren zur imaginären Axe der letzteren Hyperbel, und umgekehrt, wird.

§. 8.

Suchen wir endlich wieder jene Fläche, welche durch die aufeinanderfolgenden Lagen der Ebenen des Berührungskreises von der angenommenen Kugel mit dem Kegel gebildet wird, so muss diese, der horizontalen Lage der Hyperbel (IX) wegen, eine vertikale Cylinderfläche sein, und es werden auch hier, wie in §. 5., aus den Gleichungen

$$px + qy = 0,$$

$$\left(\frac{q}{m}\right)^2 - \left(\frac{p}{n}\right)^2 = 1$$

und dem ersten Differentialquotienten

$$x + y\frac{dq}{dp} = 0$$

die Grössen p und q zu eliminiren sein, um die Trace dieser Cylinderfläche auf der Coordinatenebene XOY zu erhalten. Hierbei bezeichnen p und q die Coordinaten der einzelnen Punkte der eben gefundenen Hyperbel (IX), und wurde m und n, der Kürze halber, für die Axenlängen $\frac{R\varepsilon_2}{c}$ und $\frac{R\varepsilon_1}{c}$ gesetzt.

Aus diesen Gleichungen findet man:

$$p = -\frac{n^2qx}{m^2y}.$$

Digitized by Google

$$q = \frac{m^2 R^2 y}{m^2 y^2 - n^2 x^2},$$

$$q^2\left[\frac{1}{m^2} - \frac{n^2 x^2}{m^4 y^2}\right] = 1 = \frac{R^4 m^4 y^2}{(m^2 y^2 - n^2 x^2)^2} \cdot \frac{m^2 y^2 - n^2 x^2}{m^4 y^2} = \frac{R^4}{m^2 y^2 - n^2 x^2}$$

oder:

$$\frac{y^2}{\left(\frac{R^2}{m}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\frac{R^2}{n}\right)^2} = 1, \quad \dots\dots\dots \text{(X)}$$

— indem man auf dieselbe Weise zu Werke geht, wie in §. 5., — als die Trace der Cylinderfläche.

Diese Kurve ist mithin wieder eine Hyperbel, deren Axenrichtungen mit jenen der früher gefundenen Hyperbel (IX) zusammenfallen, und deren Axenlängen durch Konstruktion der Werthe $\frac{R^2}{m}$ und $\frac{R^2}{n}$ einfach erhalten werden.

Bestimmt man die Asymptotenwinkel beider Hyperbeln (IX) und (X), so findet man für jenen ω der ersten Hyperbel:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{n}{m},$$

und für jenen ω' der zweiten Kurve:

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{m}{n}.$$

Mithin ist:

$$\operatorname{tg} \omega = \operatorname{cotg} \omega',$$

woraus erhellet, das die Asymptotenrichtungen der letztgefundenen Hyperbel erhalten werden, wenn man auf die Asymptotenrichtungen der ersteren, aus dem gemeinschaftlichen Mittelpunkte O, die beiden Senkrechten errichtet.

II.

Konstruktiver Theil.

Konstruktion der Intensitätslinien.

§. 9.

Die eben durchgeführte Entwickelung setzt uns in den Stand,

Digitized by Google

die Intensitätslinien eines dreiaxigen Ellipsoids auf Grundlage einer Kugelscala zu verzeichnen.

Ist $O''O'$ auf Taf. IV. der Mittelpunkt des Ellipsoids, so gebe man den Projektionsebenen eine solche Lage, dass eine derselben, hier die Horizontalprojektionsebene, zu jener Ebene parallel lauft, welche durch die grösste $A'A_1'$, und die kleinste Axe $B'B_1'$ des Ellipsoids geht, während die Projektionsaxe DD zu der grössten Axe $A''A_1''$, $A'A_1'$ parallel ist; alsdann steht die mittlere Axe $C''C_1''$ senkrecht auf der horizontalen Projektionsebene und erscheint in der vertikalen Projektion in ihrer wahren Länge.

Ferner bestimme man auch die Projektionen $L''S''$, $L'S'$ des Lichtstrahls in Bezug auf das so gewählte Projektionssystem, nehme den Mittelpunkt $o''o'$ und den Radius einer Kugel beliebig, am zweckmässigsten jedoch so an, dass die Mittelpunkte beider Flächen in eine horizontale Gerade fallen, und verzeichne die Intensitätslinien der Kugel für dieselbe in $L''S''$, $L'S'$ gegebene Richtung der Lichtstrahlen nach der bekannten Methode.

Für unsere Konstruktion wurde eine zehntheilige Scala als Basis genommen, jedoch wurden bloss vier Intensitätslinien im beleuchteten, und vier im nicht beleuchteten Theil der Fläche, so wie die Trennungslinie zwischen Licht und Schatten und die hellst beleuchteten Punkte beider Theile angegeben, und die Bezeichnung so gewählt, dass den Intensitätslinien, vom hellsten Punkte $n''n'$ der Kugel angefangen, die fortlaufenden Zahlen $+1$ bis 10 beigesetzt wurden (wobei die mit 10 bezeichnete Kurve die Selbstschattengrenze angibt), während von dieser angefangen die im Selbstschatten befindlichen Intensitätskurven die Zahlen -9 bis -1 als Zeichen erhielten.

Um von der so dargestellten Kugelfläche aus auf das Ellipsoid übergehen zu können, ist es nothwendig, eine dritte (eingeschaltete) Fläche zu benützen, da das Ellipsoid sich nicht direkt als Umhüllungsfläche eines Systems von Kugelflächen darstellen lässt. Diese eingeschaltete Fläche muss demnach so gewählt werden, dass sie in verschiedenen aufeinanderfolgenden Lagen stets als berührende Fläche des Ellipsoids und einer Kugel erscheint, und dass ihre Intensitätslinien sämmtlich einfach zu verzeichnen, also gerade Linien seien.

Fasst man diese Bedingungen in's Auge, so ist ersichtlich, dass, der geraden Intensitätslinien halber, unsere Hilfsfläche nur eine entwickelbare Fläche sein könne, welche das Ellipsoid und eine willkürlich im Raume angenommene Kugel gleichzeitig be-

Digitized by Google

rühren muss, sonach die einhüllende Fläche aller möglichen Lagen von Berührungsebenen ist, welche man gleichzeitig an das Ellipsoid und die Kugel legen kann.

Würde also der Mittelpunkt einer Kugel, deren Radius immer gleich jenem der Kugel $o'o''$ sei, beliebig im Raume angenommen sein, so hätte man, dem Obigen zufolge, in erster Reihe die Berührungskurven des Ellipsoids und der Kugel, welche durch die Berührungspunkte aller gemeinschaftlich berührenden Ebenen gebildet werden, zu bestimmen, und diejenigen Punkte der Berührungskurve der Kugel anzugeben, in welchen sie von den einzelnen Intensitätslinien geschnitten wird, was allenfalls in der Weise geschehen könnte, dass man die Projektionen dieser Berührungskurve und des Mittelpunktes auf durchsichtiges Papier copirt, dieses auf die Kugel $o''o'$ so legt, dass die Mittelpunkte genau übereinanderfallen, sodann die fraglichen Durchschnittspunkte bezeichnet, und auf diese Kurve zurück überträgt. Durch die so erhaltenen Punkte müssten nun die Erzeugenden der entwickelbaren Fläche so weit gezogen werden, bis sie die Berührungskurve des Ellipsoids in Punkten der zu suchenden Intensitätslinien desselben treffen, wozu man wieder die Projektionen der Wendekurve der entwickelbaren Hilfsfläche benöthigen würde.

Es ist einleuchtend, dass dieses Verfahren viel zu umständlich, und wegen der grossen Anzahl der nothwendigen Hilfskonstruktionen auch bedeutend ungenau wäre, als dass man sich desselben zur Konstruktion der Intensitätslinien eines dreiaxigen Ellipsoids bedienen dürfte; es ist jedoch auch leicht zu schliessen, dass für gewisse Lagen der sonst willkürlich im Raume anzunehmenden Kugel die entsprechende entwickelbare Fläche sich besonders einfach gestalten könne, d. h. dass es möglich sei, dass diese Fläche für eine Reihe von Lagen der Kugel in einen Kegel übergehe, welcher nebenbei, da er die Kugel berühren soll, ein senkrechter oder sogenannter Rotationskegel sein müsste.

Dieser Schluss führt direkt zu der am Anfange dieses Aufsatzes durchgeführten analytischen Untersuchung, welche uns zu dem Resultate brachte, dass solche das Ellipsoid berührende Rotationskegel überhaupt möglich sind, und dass ihre Spitzen die Hyperbel X_1AX_1, $X''A''X''$ bestimmen, welche in der durch die grösste und kleinste Axe gehenden Hauptebene des Ellipsoids, hier also in der durch den Mittelpunkt $O''O'$ gehenden Horizontalebene liegt. Die Brennpunkte dieser Hyperbel fallen mit jenen der Ellipse $A'B'A_1'B_1'$, welche den sichtbaren Umriss des Ellipsoids in der horizontalen Projektion bestimmt, zusammen,

Digitized by Google

und die Richtungen der Asymptoten $TO'T$ werden durch die Tangenten Z angegeben, welche man an die Ellipse $A'B'A_1'B_1'$ und an den mit der mittleren Halbaxe $O''C''$ als Radius, aus dem Mittelpunkte O', gezogenen Kreis K gemeinschaftlich führt.

Ist diese Hyperbel verzeichnet, so wähle man in derselben irgend einen Punkt $\sigma'\sigma''$ als Kegelspitze, und führe durch denselben die beiden Tangenten $\sigma'a$, $\sigma'b$ an die Ellipse $A'B'A_1'B_1'$. Diese Tangenten bilden den Umriss eines das Ellipsoid berührenden senkrechten Kegels in der horizontalen Projektion, dessen Axe die in σ' an die Hyperbel gezogene Tangente $\sigma'\Delta'$ (§. 4.) ist. Die Verbindungslinie ab der Berührungspunkte stellt die Horizontaltrace einer Vertikalebene dar, in welcher die Berührungskurve des Kegels mit dem Ellipsoide liegt, und wird, nach §. 5., Tangente an eine Hyperbel $X_2A_2X_2$ sein, deren Asymptotenrichtungen $T_1O'T_1$ mit jenen Durchmessern der Ellipse $A'B'A_1'B_1'$ zusammenfallen, welche zu den Richtungen $TO'T$ der erstgefundenen Asymptoten conjugirt sind. Diese Hyperbel wird jedoch für die weitere Konstruktion nicht benützt, also auch zu verzeichnen nicht nothwendig sein.

Führt man weiters zu den Geraden $\sigma'a$ und $\sigma'b$ die parallelen Tangenten $s\alpha$, $s\beta$ an die Kugel, so bestimmt ihr Durchschnittspunkt s die Spitze eines die Kugel berührenden Kegels, welcher dem Kegel $\sigma'ab$ congruent ist, demnach erhalten gedacht werden kann, wenn man den Kegel $\sigma'ab$ so weit parallel zu sich selbst verschiebt, bis er die Kugel berührt. Aus der im §. 7. durchgeführten Entwickelung ist ersichtlich, dass die Kegelspitze s im Umfange einer Hyperbel $X_3A_3X_3$ liegen muss, deren Asymptoten $to't$ zu jenen $TO'T$ der erstgefundenen Hyperbel parallel sind, und deren Axen, auf den Axen der Hyperbel $X_1A_1X_1$ senkrecht stehend, gegen die gleichliegenden Axen dieser Hyperbel im Verhältnisse des Kugelradius zur mittleren Halbaxe des Ellipsoids verkleinert erscheinen.

Die Verbindungslinie $\alpha\beta$ der Berührungspunkte α und β gibt die Trace jener Vertikalebene, in welcher die Berührung zwischen dem Ellipsoide und dem Kegel erfolgt. Diese Gerade ist wieder, wie in §. 8. gezeigt wurde, Tangente der Hyperbel $X_4A_4X_4$, deren Asymptoten $t_1o't_1$ auf jenen $to't$ der Hyperbel $X_3A_3X_3$ senkrecht stehen, und deren Scheitel sich ergeben, wenn durch den Scheitel A_3 eine zu DD parallele Gerade geführt und in den Durchschnittspunkten derselben mit dem Kreise $\alpha\beta\gamma\varphi\psi$ Tangenten an den letzteren gezogen werden, welche sodann die Gerade $o''o'$ in den zu suchenden Scheitelpunkten A_4 treffen. Auch die Ver-

Digitized by Google

zeichnung der beiden letzteren der Kugelfläche angehörigen Hyperbeln ist nur dann nothwendig, wenn man durch das hier behandelte Verfahren besondere Punkte der Intensitätslinien bestimmen will, wie dies im Folgenden auch gezeigt werden soll.

Durch die auf der Trace $\alpha\beta$ sich ergebenden Durchschnittspunkte dieser letzteren mit den Intensitätslinien der Kugel ist die Beleuchtung des Hilfskegels vollkommen gegeben, und es wird sich jetzt nur darum handeln, diese zweckmässig auf die Berührungskurve ab mit dem Ellipsoide zu übertragen, oder mit anderen Worten, den Kegel $s\alpha\beta$ in die Lage $\sigma'ab$ zurück zu bringen, was am einfachsten auf folgende Weise geschehen kann:

Man nehme die Länge $s\alpha = s\beta$ in den Zirkel und durchschneide aus σ' den Umriss des Kegels $\sigma'ab$ in den Punkten $\alpha_1\beta_1$, wo dann die Sehne $\alpha_1\beta_1 = \alpha\beta$ sein muss. Ferner übertrage man die einzelnen Durchschnittspunkte der Trace $\alpha\beta$ mit den Intensitätslinien der Kugel auf die Sehne $\alpha_1\beta_1$, wie dies z. B. mit dem Punkte $1'$ der Kurve $+4$ geschah, welcher nach δ' gelangte. Endlich hat man bloss die so gefundenen Punkte mit der Kegelspitze σ' zu verbinden, und wird im Durchschnitte dieser Kegelerzeugenden mit der Trace ab die in der Vertikalebene ab gelegenen Punkte sämmtlicher Intensitätslinien erhalten. Für die Intensitätslinie $+ 4$ hat sich demnach der Punkt I' derselben als Durchschnittspunkt der Erzeugenden $\sigma'\delta'$ mit der Trace ab ergeben.

Die vertikalen Projektionen dieser Punkte können ebenfalls direkt ermittelt werden, indem man die vertikalen Projektionen der in der Trace $\alpha_1\beta_1$ gelegenen Punkte aufsucht, dieselben mit σ'' verbindet, und so die Projektionen der Mantellinien des Kegels erhält, welche im Durchschnitte mit den betreffenden projizirenden Perpendikeln die zu suchenden Projektionen liefern. So z. B. wird die vertikale Projektion δ'' des Punktes δ im Perpendikel $\delta'\delta''$ über δ' liegen, zugleich jedoch mit dem Punkte $1''1'$ der Kurve $+4$ eine gleiche Höhe über dem Mittelpunkte haben, sich also in δ'' ergeben, wesshalb die vertikale Projektion I'' des Punktes I als Durchschnitt des projizirenden Perpendikels $I'I''$ mit der Projektion $\sigma''\delta''$ der betreffenden Erzeugenden erhalten wird.

Auf diese Weise können die einzelnen Intensitätslinien durch eine beliebige Anzahl von Kegelflächen bestimmt werden.

Lassen wir die Kegelspitze sich immer weiter vom Mittelpunkte entfernen, so wird dieselbe schliesslich in unendliche Entfernung fallen, wo dann der Kegel in einen Cylinder übergeht.

Digitized by Google

welcher mit den Asymptoten $TO'T$ parallel lauft. Es ist einleuchtend, dass zwei berührende Rotationscylinder möglich sind, je nachdem man die Kegelspitze in dem vorderen oder rückwärtsgehenden Hyperbelast fortbewegt dachte.

Betrachten wir einen dieser beiden Cylinder, z. B. jenen, dessen Erzeugenden parallel zu Z sind, so wird derselbe das Ellipsoid in vertikalen Diametralebenen $T_1 O' T_1$, eine Kugel vom Radius $O''C''$, deren horizontaler Umriss durch den Kreis K dargestellt gedacht werden kann, in der Vertikalebene kl berühren. Nachdem kl senkrecht auf Z steht, und Z parallel zu $to't$ ist, muss kl auch parallel zu den Asymptoten $t_1 o' t_1$ der Hyperbel $X_4 A_4 X_4$ sein.

Würde man nun den Cylinder parallel zu sich selbst so lange verschieben, bis seine Axe durch den Mittelpunkt $o''o'$ geht, so könnte er die Kugel nur dann berühren, wenn deren Durchmesser gleich dem Durchmesser kl von K wäre. Wird zum Behufe unserer Konstruktion eine Kugelscala erst verzeichnet, so kann für deren Radius diese bestimmte Länge gewählt werden; ist jedoch eine Kugelscala gegeben, die man für ein beliebig angenommenes Ellipsoid benutzen soll, wie dies hier der Fall ist, so kann für den berührenden Cylinder nicht direkt von der Kugel zum Ellipsoide übergegangen werden, sondern es ist vorerst eine Hilfskonstruktion nothwendig, um die Lage der Intensitätspunkte der Kugel K in der Ebene kl zu erhalten. Man wird nämlich einen Punkt σ_3' der Asymptote $TO'T$ wählen, k und l mit demselben verbinden und eine zu kl parallele Sehne $\varkappa\lambda$ des Dreiecks $kl\sigma_3'$ so bestimmen, dass dieselbe gleich dem Durchmesser der Kugel o ist. Alsdann übertrage man die auf $t_1 o' t_1$ liegenden Punkte der Intensitätskurven auf die Sehne $\varkappa\lambda$, wie z. B. den Punkt $3'$ der Intensitätslinie $+ 8$ nach μ, und verbinde dieselben mit σ_3', bis kl in ϱ geschnitten wird. Hiermit ist die Beleuchtung des Cylinders Z bestimmt, und die durch die einzelnen auf kl gefundenen Punkte zu $TO'T$ parallel gezogenen Erzeugenden der Cylinderfläche werden die Trace $T_1 O' T_1$ in den zu suchenden Punkten der Intensitätskurven schneiden.

Es dürfte ferner von Interesse sein zu zeigen, wie man diese Konstruktionsweise anzuwenden hat, um einige besondere Punkte der Intensitätskurven aufzufinden. Dies sind hauptsächlich jene Punkte, in welchen die Tracen ab der bezüglichen Vertikalebenen Tangenten an die Intensitätslinien werden, ferner die Punkte in den sichtbaren Umrissen, endlich die höchsten und tiefsten Punkte der einzelnen Kurven.

Digitized by Google

Was jene Punkte anbelangt, in welchen die betreffenden Tracen Tangenten an die Intensitätslinien werden, so ist einleuchtend, dass in solchen Fällen auch die Tracen $\alpha\beta$ die gleichen Intensitätslinien der Kugel berühren müssen. Da die Tracen jedoch auch die Hyperbel $X_4 A_4 X_4$ berühren sollen, so werden dieselben erhalten, wenn man an die gewählte Intensitätslinie der Kugel und die Hyperbel $X_4 A_4 X_4$ die gemeinschaftlichen Tangenten zieht, deren im Allgemeinen vier möglich sind. Wurde z. B. die Intensitätslinie + 4 gewählt, so ist $\varepsilon\gamma$ eine der hier möglichen vier Tangenten, welche den Kugelumriss in ε und γ schneidet. Die in ε und γ an den letzteren geführten Tangenten εs_1, γs_1 werden sich in einem Punkte s_1 der Hyperbel $X_3 A_3 X_3$ begegnen, welcher die Kegelspitze des für die Bestimmung des Berührungspunktes *II'* (analog 2' der Kugel) zu benützenden Hilfskegels liefert. Wird also parallel γs_1 die Tangente $c\sigma_1'$ und parallel zu εs_1 die Tangente $e\sigma_1'$ an den horizontalen Umriss des Ellipsoids gezogen, so schneiden sich beide in einem Punkte σ_1' der Hyperbel $X_1 A_1 X_1$ und bilden den Umriss des von s_1 nach σ_1 verschobenen Rotationskegels, welcher das Ellipsoid, in der durch Verbindung der beiden Berührungspunkte c und e in ihrer Horizontalprojektion sich darstellenden Ellipse, berührt. Wird wieder die Länge $s_1\gamma = s_1\varepsilon$ in den Zirkel genommen, und mit diesem Radius der Kreisbogen $\gamma_1\varepsilon_1$ aus σ_1', so wie dessen Sehne $\gamma_1\varepsilon_1 = \gamma\varepsilon$ gezogen, und der Punkt 2' nach ω' übertragen, so schneidet die Verbindungslinie $\sigma_1'\omega'$ der Kegelspitze σ_1' mit dem übertragenen Punkte ω' die Trace ce in dem Punkte *II'* der Intensitätslinie + 4, welche in diesem Punkte von der Trace ce berührt wird. Auf gleiche Weise, wie früher, würde auch die vertikale Projektion dieses Punktes *II* zu ermitteln sein.

Ebenso können die senkrecht beleuchteten Punkte $N''N'$, $N_1''N_1'$ des Ellipsoids gefunden werden. Sind nämlich $n''n'$ und $n_1''n_1'$ die gleichen Punkte der Kugelfläche, so wird man, um z. B. N zu erhalten, aus n' die Tangente $\varphi\psi$ an die Hyperbel $X_4 A_4 X_4$, und in den Durchschnittspunkten φ und ψ derselben mit dem Kugelumfang den Kegelumriss $\varphi s_2'\psi$ tangentiell an denselben ziehen, diesen Kegel an das Ellipsoid nach $\sigma_2' fg$ übertragen, wodurch die Sehne $\varphi\psi$ nach $\varphi_1\psi_1$, der Punkt n' nach ν fällt, und σ_2' mit ν verbinden, welche Erzeugende die Trace fg in dem zu suchenden Punkte N_1' trifft. Dass der Punkt N_1', da er dem Punkte N' diametral gegenüberliegt, nicht erst wie N' zu bestimmen sein wird, ist von selbst verständlich.

Um Punkte im sichtbaren Umrisse des Ellipsoids in der Horizontalprojektion zu finden, ist es bloss nothwendig, die Kegel-

Digitized by Google

fläche so zu wählen, dass die gleichnamige Intensitätslinie der Kugel vom sichtbaren Umrisse dieses Hilfskegels im horizontalen Umriss der Kugel berührt wird. Dass in allen diesen Punkten die ganzen Kegelflächen nicht erst gezeichnet und auf das Ellipsoid übertragen zu werden brauchen, sondern dass bloss ein Ziehen und Verschieben der betreffenden Mantellinie nothwendig erscheint, folgt daraus, weil eben schon bekannt ist, dass die zu suchenden Punkte im Umrisse des Ellipsoids und im Umrisse des Kegels, also dort liegen müssen, wo sich diese beiden Umrisse berühren. Zieht man also in jenen Punkten der Kugelintensitätslinien, welche im horizontalen Umrisse der Kugel liegen, Tangenten an diesen Umriss, und mit denselben parallel Tangenten an den horizontalen Umriss des Ellipsoids, so werden uns letztere die betreffenden Umrisse der Hilfskegel, mithin deren Berührungspunkte mit der Ellipse $A'B'A_1'B_1'$ die zu suchenden Punkte der Intensitätslinien angeben.

Die gleiche Konstruktion gilt für jene Punkte der Intensitätskurven, welche im sichtbaren Umrisse des Ellipsoids in der Vertikalprojektion, also im Umfange der Ellipse $A''C''A_1''C_1''$ liegen.

Dass in den eben gefundenen Punkten die Intensitätslinien von dem sichtbaren Umrisse berührt werden, ist bekannt.

Betrachtet man die so erhaltene Konstruktionsweise für obige Punkte, so ersieht man, dass sie mit der für Umrisse allgemein giltigen Methode vollkommen gleichlautend ist.

Was endlich die höchsten und tiefsten Punkte der Intensitätslinien anbelangt, so werden dieselben auf gleiche Weise, wie der Punkt N_1' erhalten, indem man nämlich die in der Vertikalebene MN liegenden Punkte der Kugelintensitätslinien auf das Ellipsoid überträgt.

Will man das hier angegebene Verfahren für die Konstruktion der Intensitätslinien in Anwendung bringen, so ist es am zweckmässigsten, bloss die horizontale Projektion dieser Kurven auf die besprochene Weise zu bestimmen, in der vertikalen Projektion ebenfalls die Punkte im sichtbaren Umriss, so wie die höchsten und tiefsten Punkte anzugeben, und weitere Punkte der vertikalen Projektion mit Benutzung der horizontalen Projektion der Intensitätslinien durch nachfolgendes Verfahren aufzusuchen.

Errichtet man in dem Punkte p, wo der Kreis K die Axe $A'A_1'$ schneidet, eine Senkrechte und verbindet die Punkte r, in welchen diese die Ellipse $A'A_1'B'B_1'$ trifft, mit dem Mittel-

Digitized by Google

punkte O', so erhält man die horizontalen Tracen EF und GH von zwei Vertikalebenen, welche die Eigenschaft besitzen, das Ellipsoid in Ellipsen zu schneiden, deren Vertikalprojektion ein Kreis vom Halbmesser $O'p$ ist. Ebenso muss auch jede zu EF und GH parallele Ebene das Ellipsoid in einer Ellipse schneiden, deren Vertikalprojektion, ein den Umriss $A''C''A_1''C_1''$ berührender Kreis, mit dem Mittelpunkte in der Geraden $A''A_1''$ ist. Der jedesmalige Durchmesser wird einfach aus der Projektion der betreffenden Sehnenlängen des horizontalen Umrisses erhalten.

Schneidet man das Ellipsoid durch solche Ebenen, und verzeichnet die vertikalen Projektionen der Schnittlinien, so werden sich auch die vertikalen Projektionen der in diesen Ebenen liegenden Punkte der Intensitätslinien durch einfaches Heraufprojiziren mit Leichtigkeit ermitteln lassen.

In ähnlicher Weise, wie dies hier beim Ellipsoide durchgeführt wurde, kann die Kugelscala auch zur Konstruktion der Intensitätslinien der übrigen Flächen der zweiten Ordnung in Anwendung gebracht werden.

Digitized by Google

IX.

Verwandlung der irrationalen Grösse $\sqrt[n]{\ }$ in einen Kettenbruch.

Von

Herrn *P. Seeling*,

Lehrer in Hückeswagen.

Vorwort.

Als ich vor vielen Jahren den Abschnitt über die Kettenbrüche in Egen's Handbuch der allgemeinen Arithmetik durchstudirte, fand ich ein ganz besonderes Interesse an dem Theile desselben, welcher über die Ausziehung der Quadratwurzel vermittelst der Kettenbrüche handelt. Das daselbst beschriebene Verfahren versuchte ich demnächst auch auf die Ausziehung der Kubikwurzel anzuwenden. Hier fand ich nun Gesetze und Formeln, welche wesentlich verschieden sind von denjenigen, die sich bei der Ausziehung der Quadratwurzel ergeben. Das Resultat meiner damaligen Arbeit ist später veröffentlicht worden. Da ich aber einsah, dass die Anwendung der Kettenbrüche für die Ausziehung der Kubikwurzel keinen Vortheil vor dem gewöhnlichen Verfahren gewährt (wie dies bei der Ausziehung der Quadratwurzel entschieden doch der Fall ist), und mit Recht vermuthete, dass bei Ausziehung der Wurzeln mit höheren Exponenten dies Verhältniss sich noch ungünstiger gestalten würde, so verfolgte ich die Sache einstweilen nicht weiter.

Im Herbste des vorigen Jahres versuchte ich das Extrahiren der fünften Wurzel vermittelst der Kettenbrüche. Das Verhältniss der Coefficienten der Wurzelgrössen, welche in den sich hiebei ergebenden vollständigen Quotienten vorkommen, schien mir so merkwürdig, dass ich es für der Mühe werth hielt, auch noch andere Wurzeln auszuziehen. Bei dem Extrahiren der vierten,

Digitized by Google

sechsten und siebenten Wurzel ergab sich dasselbe Verhältniss. Nun vermuthete ich, es sei dies ein allgemeines Gesetz. Nachdem ich bei genauerer Untersuchung noch gefunden, dass die auf die Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel bezüglichen Gesetze sich unter das neu gefundene subsumiren lassen, versuchte ich, dasselbe als allgemein gültig zu erweisen. Dies ist mir vollständig gelungen, und die vorliegende Abhandlung ist das Ergebniss meiner Bemühungen. Obgleich das Gefundene, wie schon oben bemerkt, nicht von praktischem Nutzen ist, so hat es, wie ich meine, doch einen wissenschaftlichen Werth, und dies ermuthigt mich, es der Oeffentlichkeit zu übergeben.

Schliesslich bemerke ich noch, dass diese Abhandlung nur für Solche geschrieben ist, welche mit der Behandlung der Kettenbrüche sich schon vertraut gemacht haben.

Hückeswagen im Januar 1865.

---

§. 1.

Die grösste in $\sqrt[n]{A}$ enthaltene ganze Zahl sei $=a$. Dann ist

$$x=\sqrt[n]{A}=a+\frac{\sqrt[n]{A}-a}{1}=a+\frac{1}{x'},$$

$$x'=\frac{1}{\sqrt[n]{A}-a}=\frac{\left\{\begin{array}{c}\sqrt[n]{A^{n-1}}+a\sqrt[n]{A^{n-2}}+a^2\sqrt[n]{A^{n-3}}+\ldots\\ \ldots+a^{n-4}\sqrt[n]{A^3}+a^{n-3}\sqrt[n]{A^2}+a^{n-2}\sqrt[n]{A}+a^{n-1}\end{array}\right\}}{A-a^n}$$
$$=a'+\frac{1}{x''},$$

(die grössten in diesem und den folgenden vollständigen Quotienten enthaltenen ganzen Zahlen benennen wir nämlich mit a', a'', a''', u. s. w.)

$$x''=\frac{A-a^n}{\left\{\begin{array}{c}\sqrt[n]{A^{n-1}}+a\sqrt[n]{A^{n-2}}+a^2\sqrt[n]{A^{n-3}}+\ldots\\ \ldots+a^{n-4}\sqrt[n]{A^3}+a^{n-3}\sqrt[n]{A^2}+a^{n-2}\sqrt[n]{A}+a^{n-1}-(A-a^n)a'\end{array}\right\}}.$$

Der Nenner dieses Bruches muss rational gemacht werden. Man benenne zu dem Ende die Coefficienten der Wurzelgrössen desselben der Reihe nach mit $E, F, G, H, \ldots, R, S, T, U$ und den rationalen Theil desselben mit Z, desgleichen die Coefficien-

ten der Wurzelgrössen des zu suchenden Multiplicators der Reihe nach mit $e, f, g, h, \ldots, r, s, t, u,$ und den rationalen Theil desselben mit z. Dann werden die Glieder des durch die Multiplication dieser beiden Reihen mit einander entstehenden Produktes, welches den neuen Nenner bildet, sich ordnen lassen, wie folgt:

Reihenfolge der Glieder	$\sqrt[n]{A^{n-1}}$	$\sqrt[n]{A^{n-2}}$	$\sqrt[n]{A^{n-3}}$	. . . . .	$\sqrt[n]{A^3}$	$\sqrt[n]{A^2}$	$\sqrt[n]{A}$	Rationaler Theil
Coefficienten derselben im Nenner	E	F	G	. . . . .	S	T	U	Z
Coefficienten derselben im Multiplicator	e	f	g	. . . . .	s	t	u	z
	eZ	AeE	AeF	. . . . .	AeR	AeS	AeT	AeU
	fU	fZ	AfE	. . . . .	AfQ	AfR	AfS	AfT
	gT	gU	gZ	. . . . .	AgP	AgQ	AgR	AgS
Coefficienten der Glieder des	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
	. . . .	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
Produktes	sH	sJ	sK	. . . . .	sZ	AsE	AsF	AsG
	tG	tH	tJ	. . . . .	tU	tZ	AtE	AtF
	uF	uG	uH	. . . . .	uT	uU	uZ	AuE
	zE	zF	zG	. . . . .	zS	zT	zU	zZ

Nach diesem Schema werden auch alle folgenden Nenner rational gemacht.

Digitized by Google

§. 2.

Im vorliegenden Falle (bei x'') ist $E=1$, $F=a$, $G=a^2, \ldots .,$ $S=a^{n-4}$, $T=a^{n-3}$, $U=a^{n-2}$ und $Z=a^{n-1}-(A-a^n)a'$. Werden nun Zähler und Nenner des Bruches x'' mit dem zu suchenden Multiplicator multiplizirt, so werden die Coefficienten der Glieder des Nenners (nach obigem Schema) die folgenden sein:

$e[a^{n-1}-(A-a^n)a']$	eA	eAa	. .	eAa^{n-5}	eAa^{n-4}	eAa^{n-3}	eAa^{n-2}
fa^{n-2}	$f[a^{n-1}-(A-a^n)a']$	fA	. .	fAa^{n-6}	fAa^{n-5}	fAa^{n-4}	fAa^{n-3}
ga^{n-3}	ga^{n-2}	$g[a^{n-1}-(A-a^n)a']$	. .	gAa^{n-7}	gAa^{n-6}	gAa^{n-5}	gAa^{n-4}
. . . .	. . . .	. . . .	. .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
. . . .	. . . .	. . . .	. .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .
sa^3	sa^4	sa^5	. .	$s[a^{n-1}-(A-a^n)a']$	sA	sAa	sAa^2
ta^2	ta^3	ta^4	. .	ta^{n-2}	$t[a^{n-1}-(A-a^n)a']$	tA	tAa
ua	ua^2	ua^3	. .	ua^{n-3}	ua^{n-2}	$u[a^{n-1}-(A-a^n)a']$	uA
z	za	za^2	. .	za^{n-4}	za^{n-3}	za^{n-2}	$z[a^{n-1}-(A-a^n)a']$

Digitized by Google

Soll nun der Nenner rational werden, so müssen die senkrechten Reihen dieses Produktes $= 0$ werden, ausgenommen die letzte. Hiernach werden die Coefficienten $e, f, g, \ldots, s, t, u, z$ bestimmt. Wir haben also die Gleichungen:

$$\text{(I)}\quad e[a^{n-1}-(A-a^n)a']+fa^{n-2}+ga^{n-3}+\ldots+sa^3+ta^2+ua+z=0,$$

$$\text{(II)}\quad eA+f[a^{n-1}-(A-a^n)a']+ga^{n-2}+\ldots+sa^4+ta^3+ua^2+za=0,$$

$$\text{(III)}\quad eAa+fA+g[a^{n-1}-(A-a^n)a']+\ldots+sa^5+ta^4+ua^3+za^2=0,$$

. . . .

. . . .

$$\text{(IV)}\quad eAa^{n-5}+fAa^{n-6}+gAa^{n-7}+\ldots$$
$$\ldots+s[a^{n-1}-(A-a^n)a']+ta^{n-2}+ua^{n-3}+za^{n-4}=0,$$

$$\text{(V)}\quad eAa^{n-4}+fAa^{n-5}+gAa^{n-6}+\ldots$$
$$\ldots+sA+t[a^{n-1}-(A-a^n)a']+ua^{n-2}+za^{n-3}=0,$$

$$\text{(VI)}\quad eAa^{n-3}+fAa^{n-4}+gAa^{n-5}+\ldots$$
$$\ldots+sAa+tA+u[a^{n-1}-(A-a^n)a']+za^{n-2}=0.$$

Aus diesen Gleichungen bilden wir durch Multiplication und Subtraction (nämlich $II-aI$, $III-aII$, ..., $V-aIV$, $VI-aV$) die folgenden:

$$\text{(VII)}\quad e[A-a^n+(A-a^n)aa']-f(A-a^n)a'=0,\ \text{also}\ e(1+aa')=fa',$$

$$\text{(VIII)}\quad f[A-a^n(+A-a^n)aa']-g(A-a^n)a'=0,\ \text{also}\ f(1+aa')=ga',$$

. . . .

. . . .

$$\text{(IX)}\quad s[A-a^n+(A-a^n)aa']-t(A-a^n)a'=0,\ \text{also}\ s(1+aa')=ta',$$

$$\text{(X)}\quad t[A-a^n+(A-a^n)aa']-u(A-a^n)a'=0,\ \text{also}\ t(1+aa')=ua'.$$

Oben sahen wir, dass die Coefficienten $E, F, G, \ldots, S, T, U$ eine geometrische Progression bilden, deren Exponent $= a$. Aus den Gleichungen (VII) bis (X) ergibt sich aber, dass die Coefficienten $e, f, g, \ldots, s, t, u$ ebenfalls in einer geometrischen Progression stehen, deren Exponent $= \frac{aa'+1}{a'}$. Da nun diese Coefficienten ganze Zahlen sein müssen, und da die Reihe e bis u aus $n-1$ Gliedern besteht, so setzen wir $e=a'^{n-2}$. Dann ist

$$f=a'^{n-3}(aa'+1),\quad g=a'^{n-4}(aa'+1)^2,\ \ldots,\ s=a'^2(aa'+1)^{n-4},$$
$$t=a'(aa'+1)^{n-3},\quad u=(aa'+1)^{n-2}.$$

Digitized by Google

Nun bleibt noch z zu bestimmen.

Aus (I) haben wir:

$$z = -e[a^{n-1} - (A - a^n)a'] - fa^{n-2} - ga^{n-3} - \ldots - sa^3 - ta^2 - ua.$$

Die Werthe für e, f, u. s. w. eingesetzt, gibt:

$$z = -[a^{n-1} - (A - a^n)a']a'^{n-2} - a^{n-2}a'^{n-3}(aa'+1) - a^{n-3}a'^{n-4}(aa'+1)^2 - \ldots$$
$$\ldots - a^3a'^2(aa'+1)^{n-4} - a^2a'(aa'+1)^{n-3} - a(aa'+1)^{n-2},$$

$$z = (A - a^n)a'^{n-1} - a^{n-1}a'^{n-2} - a^{n-2}a'^{n-3}(aa'+1) - a^{n-3}a'^{n-4}(aa'+1)^2 - \ldots$$
$$\ldots - a^3a'^2(aa'+1)^{n-4} - a^2a'(aa'+1)^{n-3} - a(aa'+1)^{n-2}.$$

Nun ist aber $\left(\frac{aa'+1}{aa'} - 1\right)aa' = 1$, also:

$$z = (A - a^n)a'^{n-1} - [a^{n-1}a'^{n-2} + a^{n-2}a'^{n-3}(aa'+1) + a^{n-3}a'^{n-4}(aa'+1)^2 + \ldots$$
$$\ldots + a^3a'^2(aa'+1)^{n-4} + a^2a'(aa'+1)^{n-3} + a(aa'+1)^{n-2}].\left(\frac{aa'+1}{aa'} - 1\right)aa',$$

$$z = (A - a^n)a'^{n-1} - \left[\frac{(aa'+1)^{n-1}}{a'} - a^{n-1}a'^{n-2}\right]aa'$$
$$= Aa'^{n-1} - a^na'^{n-1} - a(aa'+1)^{n-1} + a^na'^{n-1}$$
$$= Aa'^{n-1} - a(aa'+1)^{n-1}.$$

Zähler und Nenner des Bruches x'' müssen also multiplizirt werden mit

$$a'^{n-2}\sqrt[n]{A^{n-1}} + a'^{n-3}(aa'+1)\sqrt[n]{A^{n-2}} + a'^{n-4}(aa'+1)^2\sqrt[n]{A^{n-3}} + \ldots$$
$$\ldots + a'^2(aa'+1)^{n-4}\sqrt[n]{A^3} + a'(aa'+1)^{n-3}\sqrt[n]{A^2} + (aa'+1)^{n-2}\sqrt[n]{A}$$
$$+ Aa'^{n-1} - a(aa'+1)^{n-1}.$$

Der Zähler ist dann diese Reihe, multiplizirt mit $A - a^n$. Was den Nenner betrifft, so reducirt sich derselbe auf die letzte der oben aufgestellten senkrechten Reihen, da alle übrigen $= 0$ geworden sind. Diese Reihe ist aber:

$$Aa^{n-2}e + Aa^{n-3}f + Aa^{n-4}g + \ldots + Aa^2s + Aat + Au + z[a^{n-1} - (A - a^n)a']$$
$$= Aa^{n-2}a'^{n-2} + Aa^{n-3}a'^{n-3}(aa'+1) + Aa^{n-4}a'^{n-4}(aa'+1)^2 + \ldots$$
$$\ldots + Aa^2a'^2(aa'+1)^{n-4} + Aaa'(aa'+1)^{n-3}$$
$$+ A(aa'+1)^{n-2} + [Aa'^{n-1} - a(aa'+1)^{n-1}].[a^{n-1} - (A - a^n)a'].$$

Digitized by Google

Dies wieder mit $\left(\frac{aa'+1}{aa'}-1\right)aa'$ multiplizirt (das letzte Glied ausgenommen), gibt:

$$\left[\frac{A(aa'+1)^{n-1}}{aa'} - Aa^{n-2}a'^{n-2}\right]aa'$$
$$+\left[Aa'^{n-1} - a(aa'+1)^{n-1}\right].\left[a^{n-1} - (A-a^n)a'\right]$$
$$= A(aa'+1)^{n-1} - Aa^{n-1}a'^{n-1} + Aa^{n-1}a'^{n-1} - a^n(aa'+1)^{n-1}$$
$$-(A-a^n).(Aa'^n - aa'(aa'+1)^{n-1}]$$
$$= A(aa'+1)^{n-1} - a^n(aa'+1)^{n-1} - (A-a^n).\left[Aa'^n - aa'(aa'+1)^{n-1}\right]$$
$$= (A-a^n).\left[(aa'+1)^{n-1} - Aa'^n + aa'(aa'+1)^{n-1}\right]$$
$$= (A-a^n).\left[(aa'+1)^n - Aa'^n\right].$$

Folglich ist, wenn man noch Zähler und Nenner des Bruches x'' durch $A-a^n$ dividirt,

$$x'' = \frac{\left\{\begin{array}{c} a'^{n-2}\sqrt[n]{A^{n-1}} + a'^{n-3}(aa'+1)\sqrt[n]{A^{n-2}} + a'^{n-4}(aa'+1)^2\sqrt[n]{A^{n-3}} + \ldots \\ \ldots + a'^2(aa'+1)^{n-4}\sqrt[n]{A^3} + a'(aa'+1)^{n-3}\sqrt[n]{A^2} + (aa'+1)^{n-2}\sqrt[n]{A} \\ + Aa'^{n-1} - a(aa'+1)^{n-1} \end{array}\right\}}{(aa'+1)^n - Aa'^n}$$

$$= a'' + \frac{1}{x'''},$$

$$x''' = \frac{(aa'+1)^n - Aa'^n}{\left\{\begin{array}{c} a'^{n-2}\sqrt[n]{A^{n-1}} + a'^{n-3}(aa'+1)\sqrt[n]{A^{n-2}} + a'^{n-4}(aa'+1)^2\sqrt[n]{A^{n-3}} \\ + \ldots + a'^2(aa'+1)^{n-4}\sqrt[n]{A^3} + a'(aa'+1)^{n-3}\sqrt[n]{A^2} \\ + (aa'+1)^{n-2}\sqrt[n]{A} + Aa'^{n-1} - a(aa'+1)^{n-1} \\ - a''\left[(aa'+1)^n - Aa'^n\right] \end{array}\right\}}.$$

Der Nenner dieses Bruches wird rational gemacht auf dieselbe Weise wie bei x''. Wir haben hier:

$$E = a'^{n-2},\quad F = a'^{n-3}(aa'+1),\quad G = a'^{n-4}(aa'+1)^2, \ldots,$$
$$S = a'^2(aa'+1)^{n-4},\quad T = a'(aa'+1)^{n-3},\quad U = (aa'+1)^{n-2},$$
$$Z = Aa'^{n-1} - a(aa'+1)^{n-1} - a''\left[(aa'+1)^n - Aa'^n\right].$$

Zu suchen sind wieder die Werthe für $e, f, g, \ldots, s, t, u, z$.

Nach dem Schema in §. 1. haben wir die Gleichungen:

Digitized by Google

(I)

$$e\{Aa'^{n-1}-a(aa'+1)^{n-1}-a''[(aa'+1)^n-Aa'^n]\}$$
$$+f(aa'+1)^{n-2}+ga'(aa'+1)^{n-3}+\ldots$$
$$\ldots+sa'^{n-5}(aa'+1)^3+ta'^{n-4}(aa'+1)^2+ua'^{n-3}(aa'+1)+za'^{n-2}=0,$$

(II)

$$eAa'^{n-2}+f\{Aa'^{n-1}-a(aa'+1)^{n-1}-a''[(aa'+1)^n-Aa'^n]\}$$
$$+g(aa'+1)^{n-2}+\ldots+sa'^{n-6}(aa'+1)^4+ta'^{n-5}(aa'+1)^3$$
$$+ua'^{n-4}(aa'+1)^2+za'^{n-3}(aa'+1)=0,$$

(III)

$$eAa'^{n-3}(aa'+1)+fAa'^{n-2}$$
$$+g\{Aa'^{n-1}-a(aa'+1)^{n-1}-a''[(aa'-1)^n-Aa'^n]\}+\ldots$$
$$\ldots+sa'^{n-7}(aa'+1)^5+ta'^{n-6}(aa'+1)^4+ua'^{n-5}(aa'+1)^3$$
$$+za'^{n-4}(aa'+1)^2=0,$$

. . . .

. . . .

(IV)

$$eAa'^3(aa'+1)^{n-5}+fAa'^4(aa'+1)^{n-6}+gAa'^5(aa'+1)^{n-7}+\ldots$$
$$\ldots+s\{Aa'^{n-1}-a(aa'+1)^{n-1}-a''[(aa'+1)^n-Aa'^n]\}$$
$$+t(aa'+1)^{n-2}+ua'(aa'+1)^{n-3}+za'^2(aa'+1)^{n-4}=0,$$

(V)

$$eAa'^2(aa'+1)^{n-4}+fAa'^3(aa'+1)^{n-5}+gAa'^4(aa'+1)^{n-6}+\ldots$$
$$\ldots+sAa'^{n-2}+t\{Aa'^{n-1}-a(aa'+1)^{n-1}-a''[(aa'+1)^n-Aa'^n]\}$$
$$+u(aa'+1)^{n-2}+za'(aa'+1)^{n-3}=0,$$

(VI)

$$eAa'(aa'+1)^{n-3}+fAa'^2(aa'+1)^{n-4}+gAa'^3(aa'+1)^{n-5}+\ldots$$
$$\ldots+sAa'^{n-3}(aa'+1)+tAa'^{n-2}$$
$$+u\{Aa'^{n-1}-a(aa'+1)^{n-1}-a''[(aa'+1)^n-Aa'^n]\}+z(aa'+1)^{n-2}=0.$$

Digitized by Google

Aus diesen Gleichungen bilden wir durch Multiplication und Subtraction (nämlich $a'\mathrm{II}-(aa'+1)\mathrm{I}$, $a'\mathrm{III}-(aa'+1)\mathrm{II}$, ..., $a'\mathrm{V}-(aa'+1)\mathrm{IV}$, $a'\mathrm{VI}-(aa'+1)\mathrm{V}$) die folgenden:

(VII)

$$e[Aa'^{n-1}-Aa'^{n-1}(aa'+1)+a(aa'+1)^n+a''(aa'+1)^{n+1}-Aa'^n(aa'+1)a'']$$
$$-f[(aa'+1)^{n-1}-Aa'^n+aa'(aa'+1)^{n-1}+a'a''(aa'+1)^n-Aa'^{n+1}a'']$$
$$=0,$$

$$e[-Aaa'^n-Aa'^na''(aa'+1)+a(aa'+1)^n+a''(aa'+1)^{n+1}]$$
$$-f[-Aa'^n-Aa'^{n+1}a''+(aa'+1)^n+a'a''(aa'+1)^n]=0,$$

$$e\{[(aa'+1)a''+a].[(aa'+1)^n-Aa'^n]\}-f\{(a'a''+1).[(aa'+1)^n-Aa'^n]\}$$
$$=0,$$

$$e[(aa'+1)a''+a]=f(a'a''+1).$$

Ebenso findet man:

$$f[(aa'+1)a''+a]=g(a'a''+1),\ \ldots.,\ s[(aa'+1)a''+a]=t(a'a''+1),$$
$$t[(aa'+1)a''+a]=u(a'a''+1).$$

Die Grössen $e, f, g, \ldots., s, t, u$ bilden also wieder eine geometrische Progression, deren Exponent $=\dfrac{(aa'+1)a''+a}{a'a''+1}$. Wir setzen also $e=(a'a''+1)^{n-2}$. Dann ist:

$$f=(a'a''+1)^{n-3}[(aa'+1)a''+a],$$
$$g=(a'a''+1)^{n-4}[(aa'+1)a''+a]^2,\ldots.,\ s=(a'a''+1)^2[(aa'+1)a''+a)^{n-4},$$
$$t=(a'a''+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-3},\quad u=[(aa'+1)a''+a]^{n-2}.$$

Aus (I) haben wir ferner:

$$za'^{n-2}=-e\{Aa'^{n-1}-a(aa'+1)^{n-1}-a''[(aa'+1)^n-Aa'^n]\}-f(aa'+1)^{n-2}$$
$$-ga'(aa'+1)^{n-3}-\ldots.-sa'^{n-5}(aa'+1)^3-ta'^{n-4}(aa'+1)^2$$
$$-ua'^{n-3}(aa'+1).$$

$$za'^{n-2}=-(a'a''+1)^{n-2}\{Aa'^{n-1}-a(aa'+1)^{n-1}-a''[(aa'+1)^n-Aa'^n]\}$$
$$-(aa'+1)^{n-2}(a'a''+1)^{n-3}[(aa'+1)a''+a]$$
$$-a'(aa'+1)^{n-3}(a'a''+1)^{n-4}[(aa'+1)a''+a]^2-\ldots.$$
$$\ldots.-a'^{n-5}(aa'+1)^3(a'a''+1)^2[(aa'+1)a''+a]^{n-4}$$
$$-a'^{n-4}(aa'+1)^2(a'a''+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-3}$$
$$-a'^{n-3}(aa'+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-2}.$$

Es ist aber:

Digitized by Google

$$\left\{\frac{a'[(aa'+1)a''+a]}{(aa'+1)(a'a''+1)}-1\right\}.[-(aa'+1)(a'a''+1)]=1,$$

folglich:

$$za'^{n-2}=-(a'a''+1)^{n-2}\{Aa'^{n-1}-a(aa'+1)^{n-1}-a''[(aa'+1)^n-Aa'^n]\}$$

$$-\left\{\begin{array}{c}(aa'+1)^{n-2}(a'a''+1)^{n-3}[(aa'+1)a''+a]\\ +a'(aa'+1)^{n-3}(a'a''+1)^{n-4}[(aa'+1)a''+a]^2+\ldots\\ \ldots+a'^{n-5}(aa'+1)^3(a'a''+1)^2[(aa'+1)a''+a]^{n-4}\\ +a'^{n-4}(aa'+1)^2(a'a''+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-3}\\ +a'^{n-3}(aa'+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-2}\end{array}\right\}$$

$$\times\left\{\frac{a'[(aa'+1)a''+a]}{(aa'+1)(a'a''+1)}-1\right\}.[-(aa'+1)(a'a''+1)],$$

$$za'^{n-2}=-(a'a''+1)^{n-2}\{Aa'^{n-1}-a(aa'+1)^{n-1}-a''[(aa'+1)^n-Aa'^n]\}$$

$$+\left\{\frac{a'^{n-2}[(aa'+1)a''+a]^{n-1}}{a'a''+1}\right.$$

$$\left.-(aa'+1)^{n-2}(a'a''+1)^{n-3}[(aa'+1)a''+a]\right\}(aa'+1)(a'a''+1),$$

$$za'^{n-2}=-(a'a''+1)^{n-2}\{Aa'^{n-1}-a(aa'+1)^{n-1}-a''[(aa'+1)^n-Aa'^n]\}$$

$$+a'^{n-2}(aa'+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-1}$$

$$-(aa'+1)^{n-1}(a'a''+1)^{n-2}[(aa'+1)a''+a],$$

$$za'^{n-2}=-Aa'^{n-1}(a'a''+1)^{n-2}-Aa'^na''(a'a''+1)^{n-2}$$

$$+a(aa'+1)^{n-1}(a'a''+1)^{n-2}+a''(aa'+1)^n(a'a''+1)^{n-2}$$

$$+a'^{n-2}(aa'+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-1}$$

$$-a''(aa'+1)^n(a'a''+1)^{n-2}-a(aa'+1)^{n-1}(a'a''+1)^{n-2},$$

$$za'^{n-2}=-Aa'^{n-1}(a'a''+1)^{n-2}-Aa'^na''(a'a''+1)^{n-2}$$

$$+a'^{n-2}(aa'+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-1},$$

$$z=-Aa'(a'a''+1)^{n-2}-Aa'^2a''(a'a''+1)^{n-2}+(aa'+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-1},$$

$$z=-A(a'^2a''+a')(a'a''+1)^{n-2}+(aa'+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-1}$$

$$=-Aa'(a'a''+1)^{n-1}+(aa'+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-1}.$$

Zähler und Nenner des Bruches x''' müssen also multiplizirt werden mit

$$(a'a''+1)^{n-2}\sqrt[n]{A^{n-1}}+(a'a''+1)^{n-3}[(aa'+1)a''+a]\sqrt[n]{A^{n-2}}$$
$$+(a'a''+1)^{n-4}[(aa'+1)a''+a]^2\sqrt[n]{A^{n-3}}+\ldots\ldots$$
$$\ldots+(a'a''+1)^2[(aa'+1)a''+a]^{n-4}\sqrt[n]{A^3}+(a'a''+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-3}\sqrt[n]{A^2}$$
$$+[(aa'+1)a''+a]^{n-2}\sqrt[n]{A}+(aa'+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-1}-Aa'(a'a''+1)^{n-1}.$$

Dann ist der Zähler diese Reihe, multiplizirt mit $(aa'+1)^n-Aa'^n$. Der Nenner aber wird gebildet nach der letzten senkrechten Reihe des Schema's in §. 1. Diese Reihe ist:

$$AeU+AfT+AgS+\ldots\ldots+AsG+AtF+AuE+zZ$$
$$=A(aa'+1)^{n-2}(a'a''+1)^{n-2}+Aa'(aa'+1)^{n-3}(a'a''+1)^{n-3}[(aa'+1)a''+a]$$
$$+Aa'^2(aa'+1)^{n-4}(a'a''+1)^{n-4}[(aa'+1)a''+a]^2+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+Aa'^{n-4}(aa'+1)^2(a'a''+1)^2[(aa'+1)a''+a]^{n-4}$$
$$+Aa'^{n-3}(aa'+1)(a'a''+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-3}+Aa'^{n-2}[(aa'+1)a''+a]^{n-2}$$
$$+\{Aa'^{n-1}-a(aa'+1)^{n-1}-a''[(aa'+1)^n-Aa'^n]\}$$
$$\times\{(aa'+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-1}-Aa'(a'a''+1)^{n-1}\}.$$

Dies, mit Ausnahme des letzten Gliedes, wieder multiplizirt mit

$$\left\{\frac{a'[(aa'+1)a''+a]}{(aa'+1)(a'a''+1)}-1\right\}.[-(aa'+1)(a'a''+1)]$$

gibt:

$$-\left\{\frac{Aa'^{n-1}[(aa'+1)a''+a)^{n-1}}{(aa'+1)(a'a''+1)}-A(aa'+1)^{n-2}(a'a''+1)^{n-2}\right\}(aa'+1)(a'a''+1)$$

$$+Aa'^{n-1}(aa'+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-1}-A^2a'^n(a'a''+1)^{n-1}$$
$$-a(aa'+1)^n[(aa'+1)a''+a]^{n-1}+Aaa'(aa'+1)^{n-1}(a'a''+1)^{n-1}$$
$$-a''(aa'+1)^{n+1}[(aa'+1)a''+a]^{n-1}+Aa'a''(aa'+1)^n(a'a''+1)^{n-1}$$
$$+Aa'^na''(aa'+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-1}-A^2a'^{n+1}a''(a'a''+1)^{n-1}$$
$$=-A^2[a'^{n+1}a''(a'a''+1)^{n-1}+a'^n(a'a''+1)^{n-1}]$$

$$+A\left\{\begin{array}{l}a'^{n-1}(aa'+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-1}-a'^{n-1}[(aa'+1)a''+a]^{n-1}\\+a'^na''(aa'+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-1}+aa'(aa'+1)^{n-1}(a'a''+1)^{n-1}\\+(aa'+1)^{n-1}(a'a''+1)^{n-1}+a'a''(aa'+1)^n(a'a''+1)^{n-1}\end{array}\right\}$$

$$-a''(aa'+1)^{n+1}[(aa'+1)a''+a]^{n-1}-a(aa'+1)^n[(aa'+1)a''+a]^{n-1}=$$

Digitized by Google

$$= - A^2a'^n(a'a''+1)^n + A\{aa'^n[(aa'+1)a''+a]^{n-1}$$

$$+ a'^n a''(aa'+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-1}$$

$$+ (aa'+1)^n(a'a''+1)^{n-1} + a'a''(aa'+1)^n(a'a''+1)^{n-1}\}$$

$$- [(aa'+1)a''+a].(aa'+1)^n[(aa'+1)a''+a]^{n-1}$$

$$= - A^2a'^n(a'a''+1)^n + A\{a'^n[(aa'+1)a''+a]^n + (aa'+1)^n(a'a''+1)^n\}$$

$$- (aa'+1)^n[(aa'+1)a''+a]^n$$

$$= [(aa'+1)^n - Aa'^n].\{-[(aa'+1)a''+a]^n + A(a'a''+1)^n\}.$$

Werden nun noch Zähler und Nenner von x''' durch $(aa'+1)^n - Aa'^n$ dividirt, so ist:

$$x''' = \frac{\left\{\begin{array}{c} (a'a''+1)^{n-2}\sqrt[n]{A^{n-1}} + (a'a''+1)^{n-3}[(aa'+1)a''+a]\sqrt[n]{A^{n-2}} \\ + (a'a''+1)^{n-4}[(aa'+1)a''+a]^2\sqrt[n]{A^{n-3}} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots + (a'a''+1)^2[(aa'+1)a''+a]^{n-4}\sqrt[n]{A^3} \\ + (a'a''+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-3}\sqrt[n]{A^2} + [(aa'+1)a''+a]^{n-2}\sqrt[n]{A} \\ + (aa'+1)[(aa'+1)a''+a]^{n-1} - Aa'(a'a''+1)^{n-1} \end{array}\right\}}{-[(aa'+1)a''+a]^n + A(a'a''+1)^n}$$

§. 3.

So weit die Berechnung im vorigen Paragraphen reicht, heissen die Kettenbruchsnenner

$$a, \quad a', \quad a'',$$

also die Näherungsbrüche:

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{a}{1}, \quad \frac{aa'+1}{a'}, \quad \frac{(aa'+1)a''+a}{a'a''+1}.$$

Aus der Vergleichung der gefundenen vollständigen Quotienten (x', x'', x''') mit diesen entsprechenden Näherungswerthen ergibt sich folgendes Gesetz:

Zieht man vermittelst der Kettenbrüche die $n$te Wurzel aus der Irrationalzahl A, ist die grösste in $\sqrt[n]{A}$ enthaltene ganze Zahl $= a$, also $\frac{a}{1}$ der erste Näherungsbruch, sind ferner $\frac{p^0}{q^0}$ und

$\frac{p}{q}$ zwei aufeinander folgende Näherungswerthe für $\sqrt[n]{A}$, so ist der zu $\frac{p}{q}$ gehörige vollständige Quotient

$$\frac{\left\{\begin{array}{c} q^{n-2}\sqrt[n]{A^{n-1}}+q^{n-3}p\sqrt[n]{A^{n-2}}+q^{n-4}p^2\sqrt[n]{A^{n-3}}+\ldots \\ \ldots+q^2p^{n-4}\sqrt[n]{A^3}+qp^{n-3}\sqrt[n]{A^2}+p^{n-2}\sqrt[n]{A}\pm(p_0p^{n-1}-q_0q^{n-1}A)\end{array}\right\}}{\mp(p^n-q^nA)},$$

wobei die oberen Zeichen für die Näherungsbrüche ungerader Ordnung und die unteren für die Näherungsbrüche gerader Ordnung gelten.

Die Richtigkeit dieses Satzes in Beziehung auf die drei ersten vollständigen Quotienten geht aus der Berechnung in §. 1. und §. 2. hervor. Soll die allgemeine Gültigkeit desselben bewiesen werden, so ist noch darzuthun, dass, wenn derselbe für irgend einen vollständigen Quotienten gilt, dies auch für den nächstfolgenden der Fall ist; mit andern Worten: dass, wenn $\frac{p_0}{q_0}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{p'}{q'}$ drei auf einander folgende Näherungswerthe für $\sqrt[n]{A}$ sind, und wenn der zu $\frac{p}{q}$ gehörige vollständige Quotient

$$x^{(n)}=\frac{\left\{\begin{array}{c} q^{n-2}\sqrt[n]{A^{n-1}}+q^{n-3}p\sqrt[n]{A^{n-2}}+q^{n-4}p^2\sqrt[n]{A^{n-3}}+\ldots \\ \ldots+q^2p^{n-4}\sqrt[n]{A^3}+qp^{n-3}\sqrt[n]{A^2}+p^{n-2}\sqrt[n]{A}\pm(p_0p^{n-1}-q_0q^{n-1}A)\end{array}\right\}}{\mp(p^n-q^nA)},$$

alsdann der folgende, zu $\frac{p'}{q'}$ gehörige vollständige Quotient:

$$x^{(n+1)}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c} q'^{n-2}\sqrt[n]{A^{n-1}}+q'^{n-3}p'\sqrt[n]{A^{n-2}}+q'^{n-4}p'^2\sqrt[n]{A^{n-3}}+\ldots \\ \ldots+q'^2p'^{n-4}\sqrt[n]{A^3}+q'p'^{n-3}\sqrt[n]{A^2}+p'^{n-2}\sqrt[n]{A}\mp(pp'^{n-1}-qq'^{n-1}A)\end{array}\right\}}{\pm(p'^n-q'^nA)}$$

ist.

§. 4.

Setzen wir einstweilen, ähnlich wie oben,

Digitized by Google

$$x^{(n+1)} = \frac{e\sqrt[n]{A^{n-1}}+f\sqrt[n]{A^{n-2}}+g\sqrt[n]{A^{n-3}}+\ldots+s\sqrt[n]{A^3}+t\sqrt[n]{A^2}+u\sqrt[n]{A}+z}{D},$$

so ist zu beweisen, dass

$$\text{I.}\quad e=q'^{n-2},\quad f=q'^{n-3}p',\quad g=q'^{n-4}p'^2,\ldots,\ s=q'^2p'^{n-4},$$
$$t=q'p'^{n-3},\quad u=p'^{n-2}.$$

$$\text{II.}\quad z=\mp(pp'^{n-1}-qq'^{n-1}A),$$

$$\text{III.}\quad D=\pm(p'^n-q'^nA).$$

I.

Die grösste in $x^{(n)}$ steckende ganze Zahl sei $=m$. Dann ist $p'=mp+p^0$, $q'=mq+q^0$, ferner:

$$x^{(n+1)}$$
$$=\frac{\mp(p^n-q^nA)}{\left\{\begin{array}{c} q^{n-2}\sqrt[n]{A^{n-1}}+q^{n-3}p\sqrt[n]{A^{n-2}}+q^{n-4}p^2\sqrt[n]{A^{n-3}}+\ldots \\ \ldots+q^2p^{n-4}\sqrt[n]{A^3}+qp^{n-3}\sqrt[n]{A^2}+p^{n-2}\sqrt[n]{A}\pm(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A) \\ \pm m(p^n-q^nA)\end{array}\right\}}.$$

Hier ist also:

$$E=q^{n-2},\quad F=q^{n-3}p,\quad G=q^{n-4}p^2,\ldots,\ S=q^2p^{n-4},$$
$$T=qp^{n-3},\quad U=p^{n-2},\quad Z=\pm(p_0p^{n-1}-q_0q^{n-1}A)\pm m(p^n-q^nA).$$

Also haben wir nach dem Schema in §. 1.:

(I)

$$\pm e(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A)\pm em(p^n-q^nA)+fp^{n-2}+gqp^{n-3}+\ldots$$
$$\ldots+sq^{n-5}p^3+tq^{n-4}p^2+uq^{n-3}p+zq^{n-2}=0,$$

(II)

$$eAq^{n-2}\pm f(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A)\pm fm(p^n-q^nA)+gp^{n-2}+\ldots$$
$$\ldots+sq^{n-6}p^4+tq^{n-5}p^3+uq^{n-4}p^2+zq^{n-3}p=0,$$

(III)

$$eAq^{n-3}p+fAq^{n-2}\pm g(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A)\pm gm(p^n-q^nA)+\ldots$$
$$\ldots+sq^{n-7}p^5+tq^{n-6}p^4+uq^{n-5}p^3+zq^{n-4}p^2=0,$$

. . . .

Digitized by Google

(IV)

$$eAq^3p^{n-5}+fAq^4p^{n-6}+gAq^5p^{n-7}+\ldots\pm s(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A)$$
$$\pm sm(p^n-q^nA)+tp^{n-2}+uqp^{n-3}+zq^2p^{n-4}=0.$$

(V)

$$eAq^2p^{n-4}+fAq^3p^{n-5}+gAq^4p^{n-6}+\ldots+sAq^{n-2}$$
$$\pm t(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A)\pm tm(p^n-q^nA)+up^{n-2}+zqp^{n-3}=0.$$

(VI)

$$eAqp^{n-3}+fAq^2p^{n-4}+gAq^3p^{n-5}+\ldots+sAq^{n-3}p+tAq^{n-2}$$
$$\pm u(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A)\pm um(p^n-q^nA)+zp^{n-2}=0.$$

Aus diesen Gleichungen bilden wir durch Multiplication und Subtraction (nämlich $q\text{II}-p\text{I}$, $q\text{III}-p\text{II}$, ... $q\text{V}-p\text{IV}$, $q\text{VI}-p\text{V}$) die folgenden:

(VII)

$$e[Aq^{n-1}\mp p(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A)\mp mp(p^n-q^nA)]$$
$$-f[p^{n-1}\mp q(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A)\mp mq(p^n-q^nA)]=0,$$

$$e[Aq^{n-1}\mp p^n(mp+p^0)\pm pq^0q^{n-1}A\pm mpq^nA]$$
$$=f[p^{n-1}\mp p^0p^{n-1}q\mp mp^nq\pm q^n(mq+q^0)A],$$

$$e[Aq^{n-1}\mp p^n(mp+p^0)\pm pq^{n-1}A(mq+q^0)]$$
$$=f[p^{n-1}\mp p^{n-1}q(mp+p^0)\pm q^nA(mq+q^0)].$$

(VIII)

$$e[Aq^{n-1}\mp p^np'\pm pq^{n-1}q'A]=f[p^{n-1}\mp p^{n-1}p'q\pm q^nq'A].$$

Nach **Egen's** Handbuch der allgemeinen Arithmetik Theil I §. 269. ist im vorliegenden Falle

$$p'q-pq'=\pm 1,\quad \text{also}\quad \pm p'q\mp pq'=1,$$

ferner

$$\pm p'q=\pm pq'+1\quad \text{und}\quad \mp pq'=\mp p'q+1.$$

Demnach verwandelt sich die Gleichung (VIII) in folgende:

$$e(\pm p'q^nA\mp p^np')=f(\pm q^nq'A\mp p^nq'),$$
$$ep'=fq'.$$

Ebenso findet man, dass $fp'=gq'$, ..., $sp'=tq'$, $tp'=uq'$. Die Grössen e bis u bilden also wieder eine geometrische Progression, deren Exponent $=\frac{p'}{q'}$. Demnach setzen wir $e=q'^{n-2}$, dann ist:

Digitized by Google

$$f=q'^{n-3}p',\ g=q'^{n-4}p'^2,\ \ldots,\ s=q'^2p'^{n-4},\ t=q'p'^{n-3},\ u=p'^{n-2}.$$

II.

Aus (I) haben wir:

$$zq^{n-2}=\mp e(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A)\mp em(p^n-q^nA)-fp^{n-2}-gqp^{n-3}-\ldots$$
$$\ldots-sq^{n-5}p^3-tq^{n-4}p^2-uq^{n-3}p,$$

$$zq^{n-2}=\mp q'^{n-2}(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A)\mp q'^{n-2}m(p^n-q^nA)$$
$$-q'^{n-3}p'p^{n-2}-q'^{n-4}p'^2qp^{n-3}-\ldots$$
$$\ldots-q'^2p'^{n-4}q^{n-5}p^3-q'p'^{n-3}q^{n-4}p^2-p'^{n-2}q^{n-3}p.$$

Nun ist $\left(\frac{p'q}{pq'}-1\right).(\pm pq')=1$, folglich:

$$zq^{n-2}=\mp q'^{n-2}(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A)\mp q'^{n-2}m(p^n-q^nA)$$
$$-(q'^{n-3}p'p^{n-2}+q'^{n-4}p'^2qp^{n-3}+\ldots$$
$$\ldots+q'^2p'^{n-4}q^{n-5}p^3+q'p'^{n-3}q^{n-4}p^2+p'^{n-2}q^{n-3}p)$$
$$\times\left(\frac{p'q}{pq'}-1\right).(\pm pq'),$$

$$zq^{n-2}=\mp q'^{n-2}p^0p^{n-1}\pm q'^{n-2}q^0q^{n-1}A\mp q'^{n-2}mp^n$$
$$\pm q'^{n-2}mq^nA\pm q'^{n-2}p'p^{n-1}\mp p'^{n-1}q^{n-2}p,$$

$$zq^{n-2}=\mp q'^{n-2}p^{n-1}(mp+p^0)\pm q'^{n-2}q^{n-1}A(mq+q^0)$$
$$\pm q'^{n-2}p'p^{n-1}\mp p'^{n-1}q^{n-2}p,$$

$$zq^{n-2}=\mp q'^{n-2}p^{n-1}p'\pm q'^{n-1}q^{n-1}A\pm q'^{n-2}p'p^{n-1}\mp p'^{n-1}q^{n-2}p$$
$$=\mp p'^{n-1}q^{n-2}p\pm q'^{n-1}q^{n-1}A,$$

$$z=\mp pp'^{n-1}\pm qq'^{n-1}A=\mp(pp'^{n-1}-qq'^{n-1}A).$$

III.

Da der Werth für $x^{(n+1)}$ sich schliesslich durch $\mp(p^n-q^nA)$ muss aufheben lassen, so setzen wir die letzte senkrechte Reihe des Schemas in §. 1. $=\mp(p^n-q^nA)D$. Also:

$$\mp(p^n-q^nA)D=AeU+AfT+AgS+\ldots+AsG+AtF+AuE+zZ,$$

$$\mp(p^n-q^nA)D=q'^{n-2}p^{n-2}A+q'^{n-3}p'qp^{n-3}A+q'^{n-4}p'^2q^2p^{n-4}A+\ldots$$
$$\ldots+q'^2p'^{n-4}q^{n-4}p^2A+q'p'^{n-3}q^{n-3}pA$$
$$+p'^{n-2}q^{n-2}A$$
$$\mp(pp'^{n-1}-qq'^{n-1}A).[\pm(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A)\pm m(p^n-q^nA)].$$

Digitized by Google

Dies, mit Ausnahme des letzten Gliedes, wieder mit

$$\left(\frac{p'q}{pq'}-1\right).(\pm pq')$$

multiplizirt, gibt:

$$\begin{aligned}\mp(p^n-q^nA)D = {} & \mp q'^{n-1}p^{n-1}A \pm p'^{n-1}q^{n-1}A \\ & -p^0p^np'^{n-1}+pp'^{n-1}q^0q^{n-1}A-mp^{n+1}p'^{n-1}+mpp'^{n-1}q^nA \\ & +p^0p^{n-1}qq'^{n-1}A-q^0q^nq'^{n-1}A^2+mp^nqq'^{n-1}A-mq^{n+1}q'^{n-1}A^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mp(p^n-q^nA)D = {} & \mp p^{n-1}q'^{n-1}A \pm p'^{n-1}q^{n-1}A - p^np'^{n-1}(mp+p^0) \\ & -q^nq'^{n-1}A^2(mq+q^0)+pp'^{n-1}q^{n-1}A(mq+q^0) \\ & +p^{n-1}qq'^{n-1}A(mp+p^0),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mp(p^n-q^nA)D = {} & \mp p^{n-1}q'^{n-1}A \pm p'^{n-1}q^{n-1}A - p^np'^n - q^nq'^nA^2 \\ & +pp'^{n-1}q^{n-1}q'A+p^{n-1}p'qq'^{n-1}A,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p^n-q^nA)D = {} & p^{n-1}q'^{n-1}A - p'^{n-1}q^{n-1}A \pm p^np'^n \pm q^nq'^nA^2 \\ & \mp pp'^{n-1}q^{n-1}q'A \mp p^{n-1}p'qq'^{n-1}A,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p^n-q^nA)D = {} & \pm p^np'^n + (1\mp p'q)p^{n-1}q'^{n-1}A \\ & -(1\pm pq')p'^{n-1}q^{n-1}A \pm q^nq'^nA^2.\end{aligned}$$

Nun ist (siehe oben unter I.) $1\mp p'q = \mp pq'$ und $1\pm pq' = \pm p'q$, folglich:

$$\begin{aligned}(p^n-q^nA)D &= \pm p^np'^n \mp p^nq'^nA \mp p'^nq^nA \pm q^nq'^nA^2 \\ &= \pm(p'^n-q'^nA).(p^n-q^nA), \\ D &= \pm(p'^n-q'^nA).\end{aligned}$$

§. 5.

Nachdem nun das in §. 3. aufgestellte Gesetz als allgemein gültig erwiesen ist, wir also des Schemas in §. 1. nicht mehr bedürfen, wollen wir im Folgenden, um unsere Bezeichnungsweise mit derjenigen in Egen's Handbuch angenommenen gänzlich in Uebereinstimmung zu bringen, den rationalen Theil im Zähler des vollständigen Quotienten nicht mehr z, sondern J nennen.

Dass D und J immer ganze Zahlen sind, ergibt sich unmittelbar aus den für diese Grössen gefundenen Werthen.

D ist aber auch immer positiv. Denn:

Ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch ungerader Ordnung, so ist:

Digitized by Google

$$\frac{p}{q} < \sqrt[n]{A},\ \text{folglich}\ \frac{p^n}{q^n} < A\ \text{und}\ p^n < q^n A.$$

Da aber alsdann $D = -(p^n - q^n A)$, so ist D positiv.

Ist hingegen $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch gerader Ordnung, so ist

$$\frac{p}{q} > \sqrt[n]{A},\ \text{folglich}\ \frac{p^n}{q^n} > A\ \text{und}\ p^n > q^n A.$$

Da nun hier $D = +(p^n - q^n A)$, so ist D wieder positiv.

Anders verhält es sich mit J.

Ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch ungerader Ordnung, so ist:

$$\frac{p^0}{q^0} > \frac{p}{q},\ \text{also}\ p^0 > \frac{pq^0}{q},\ \text{und}\ \frac{p^0}{p} > \frac{q^0}{q}.$$

Dieses, multiplizirt mit $p^n < q^n A$, gibt $p^0 p^{n-1} \gtreqless q^0 q^{n-1} A$.

Ist aber $\frac{p}{q}$ ein Näherungsbruch gerader Ordnung, so ist

$$\frac{p^0}{q^0} < \frac{p}{q},\ \text{also}\ p^0 < \frac{pq^0}{q},\ \text{und}\ \frac{p^0}{p} < \frac{q^0}{q}.$$

Dieses, multiplizirt mit $p^n > q^n A$, gibt wieder $p^0 p^{n-1} \gtreqless q^0 q^{n-1} A$.

Da nun $J = \pm(p^0 p^{n-1} - q^0 q^{n-1} A)$, so kann J in beiden Fällen positiv, oder $= 0$, oder negativ sein.

Soll $J = 0$ werden, so muss

$$p^0 p^{n-1} = q^0 q^{n-1} A,\ \text{also}\ \frac{p^0 p^{n-1}}{q^0 q^{n-1}} = A$$

sein. Da $pq^0 - p^0 q = \mp 1$, so haben p^0 und p, q^0 und q, p^0 und q^0, p und q kein gemeinschaftliches Mass. Es müsste also q^0 ein Theiler von p^{n-1} und zugleich q^{n-1} ein Theiler von p^0 sein. Daher ist die Anzahl der Fälle, in welchen $J = 0$, sehr beschränkt.

Der gewöhnlichste dieser Fälle ist derjenige, in welchem A von der Form $(r-1)r^{n-1}$ und zugleich $q^0 = q = 1$ ist. Dann sind $\frac{p^0}{q^0}$ und $\frac{p}{q}$ die beiden ersten Näherungsbrüche, und es ist $p^0 = r - 1$.

Digitized by Google

Ist nun $n=2$, so liegt $\sqrt{(r-1)r}$ näher bei $r-1$ als bei r, weil $(r-1)r<(r-\frac{1}{2})^2$. Da aber $\sqrt[n]{A}-\frac{p^0}{q^0}>\frac{p}{q}-\sqrt[n]{A}$, so ist in diesem Falle $\frac{p}{q}<r$; folglich kann p nicht $=r$ und q nicht $=1$ sein. Bei der Ausziehung der Quadratwurzel kann also der eben erwähnte Fall nicht stattfinden. Auch beweist Egen §. 291., dass bei Ausziehung der Quadratwurzel J immer positiv ist.

Ist aber $n=3$, so liegt $\sqrt[3]{(r-1)r^2}$ näher bei r als bei $r-1$, weil $(r-1)r^2>(r-\frac{1}{2})^3$. Ist $n>3$, so liegt noch um so mehr $\sqrt[n]{(r-1)r^{n-1}}$ näher bei r als bei $r-1$. Ist also $n>2$ und A von der Form $(r-1)r^{n-1}$, so wird $p=r$ und $q=1$ sein. Dann ist $p^0p^{n-1}=q^0q^{n-1}A$, also $J=0$, und zwar im zweiten vollständigen Quotienten. Beispiele: $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{18}$, $\sqrt[3]{48}$, $\sqrt[3]{100}$, $\sqrt[4]{54}$.

Doch kann auch in Fällen, wo A nicht von der Form $(r-1)r^{n-1}$, dennoch $J=0$ sein, wie z. B. bei $\sqrt[3]{98}$ im vierten vollständigen Quotienten.

Meistens ist J positiv; denn auch solcher Fälle, in welchen J negativ ist, sind nur wenige, wie dies aus den Zahlenbeispielen zu ersehen ist.

Im zweiten vollständigen Quotienten muss J negativ sein, wenn $q=q^0=1$ und $p^0p^{n-1}>A$ ist. Beispiele: $\sqrt[3]{98}$, $\sqrt[3]{890}$, $\sqrt[4]{41}$, $\sqrt[5]{10}$.

§. 6.

Der die Grösse $\sqrt[n]{A}$ ausdrückende Kettenbruch ist, ausgenommen, wenn $n=2$, niemals ein periodischer. Denn da $p'>p$, $p''>p'$, u. s. w., und $q'>q$, $q''>q'$, u. s. w., so kann nicht derselbe vollständige Quotient zweimal vorkommen. Auch können nicht zwei vollständige Quotienten einander gleich sein. Denn wenn etwa

$$\frac{\left\{\begin{array}{c} q^{n-2}\sqrt[n]{A^{n-1}}+q^{n-3}p\sqrt[n]{A^{n-2}}+q^{n-4}p^2\sqrt[n]{A^{n-3}}+\ldots \\ \ldots+q^2p^{n-4}\sqrt[n]{A^3}+pq^{n-3}\sqrt[n]{A^2}+p^{n-2}\sqrt[n]{A}\pm(p_0p^{n-1}-q_0q^{n-1}A)\end{array}\right\}}{\mp(p^n-q^nA)}$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c} q_1^{n-2}\sqrt[n]{A^{n-1}}+q_1^{n-3}p_1\sqrt[n]{A^{n-2}}+q_1^{n-4}p_1^2\sqrt[n]{A^{n-3}}+\ldots \\ +q_1^2p_1^{n-4}\sqrt[n]{A^3}+q_1p_1^{n-3}\sqrt[n]{A^2}+p_1^{n-2}\sqrt[n]{A}\pm(p_1^0p_1^{n-1}-q_1^0q_1^{n-1}A)\end{array}\right\}}{\mp(p_1^n-q_1^nA)}$$

Digitized by Google

sein sollte, so müsste letzterer Bruch sich so verkleinern lassen, dass er die Form des ersteren erhielte. Da aber (Egen §. 271.) p_1 und q_1 keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, so sind auch q_1^{n-2} und p_1^n und, da $q_1^n A$ ein Vielfaches von q_1, gleichfalls q_1^{n-2} und $p_1^n - q_1^n A$ incommensurabel. Ist aber $q = q_1 = 1$ (im ersten und zweiten vollständigen Quotienten), und der zweite Bruch sollte dann verkleinert werden, so würde der Coefficient des ersten Gliedes des Zählers ein Bruch. Obige zwei Brüche sind demnach nicht auf einerlei Form zu bringen, können also auch nicht einander gleich sein.

Es gibt freilich Fälle, in welchen vollständige Quotienten sich wirklich aufheben lassen, wenn nämlich unter den Primfaktoren von A sich zwei oder mehrere gleiche befinden, und wenn einer dieser gleichen Faktoren $=p$ oder ein Theiler von p ist. Denn wenn $A = bc^2$ und $\frac{p}{c}$ eine ganze Zahl, so sind die Coefficienten des zweiten Gliedes und aller folgenden Glieder des Zählers, sammt J und D, und, da

$$\sqrt[n]{A^{n-1}} = \sqrt[n]{b^{n-1}c^{2n-2}} = c\sqrt[n]{b^{n-1}c^{n-2}},$$

auch das erste Glied des Zählers durch c theilbar. So lässt z. B. der dritte vollständige Quotient von $\sqrt[3]{300}$ (siehe die Zahlenbeispiele), welcher $\frac{3\sqrt[3]{90000}+20\sqrt[3]{300}+100}{100}$ ist, sich reduciren auf: $\frac{30\sqrt[3]{90}+20\sqrt[3]{300}+100}{100} = \frac{3\sqrt[3]{90}+2\sqrt[3]{300}+10}{10}$. Bei $\sqrt[3]{48}$ ist der zweite vollständige Quotient $= \frac{\sqrt[3]{2304}+4\sqrt[3]{48}}{16} = \frac{4\sqrt[3]{36}+8\sqrt[3]{6}}{16}$ $= \frac{\sqrt[3]{36}+2\sqrt[3]{6}}{4}$. Setzt man aber mit solchen reducirten Quotienten die Rechnung weiter fort, so erhält man im Verfolg wieder dieselben vollständigen Quotienten (dem Werthe nach), also auch dieselben Kettenbruchsnenner, die man ohne besagte Reduction erhalten hätte. Es kann auch nicht anders sein. Denn angenommen, es könnte in Folge einer solchen Reduction etwa ein periodischer Kettenbruch entstehen oder überhaupt die Reihe der Kettenbruchsnenner sich ändern, so müssten zwei verschiedene Kettenbrüche an Werth einander gleich sein, welches unmöglich ist. Grössen, wie $\sqrt[4]{9}$, $\sqrt[6]{8}$ u. dgl., können natürlich gar nicht in Betracht kommen, weil dieselben $= \sqrt{3}$ resp. $= \sqrt{2}$ sind.

Digitized by Google

Aus diesem Allen folgt, dass nicht eine gewisse Reihe von Kettenbruchsnennern periodisch wiederkehren kann.

§. 7.

Bei der Ausziehung der Quadratwurzel kommt nur Eine Wurzelgrösse vor, nämlich $\sqrt{A}$. Man mag diese nun als das erste oder als das letzte irrationale Glied in dem Zähler der gefundenen Formel ansehen, so ist immer $q^{n-2} = p^{n-2} = 1$. Hier kann also eine Reihe von Kettenbruchsnennern periodisch wiederkehren. Egen weist aber in seinem Handbuche, §. 292., nach, dass jeder Kettenbruch, der die irrationale Grösse $\sqrt{A}$ ausdrückt, ein periodischer sein muss. Ueberhaupt hat er in den §§. 288. —298. diesen Gegenstand erschöpfend behandelt.

Die Formel für die vollständigen Quotienten reducirt sich für die Ausziehung der Quadratwurzel auf diese:

$$x^{(n)} = \frac{\sqrt{A} \pm (p^0 p - q^0 q A)}{\mp (p^2 - q^2 A)}.$$

Bei der Ausziehung der Kubikwurzel kommen zwei Wurzelgrössen vor, nämlich $\sqrt[3]{A^2}$ und $\sqrt[3]{A}$. Diese können wir als das erste und letzte irrationale Glied im Zähler unserer Formel ansehen. Diese Formel reducirt sich also für diesen Fall auf die folgende:

$$x^{(n)} = \frac{q\sqrt[3]{A^2} + p\sqrt[3]{A} \pm (p^0 p^2 - q^0 q^2 A)}{\mp (p^3 - q^3 A)},$$

so dass die Coefficienten der beiden Wurzelgrössen gleich dem Nenner und Zähler des entsprechenden Näherungsbruches sind. Dies habe ich schon früher in einem Aufsatze nachgewiesen, mitgetheilt im Archiv der Mathematik und Physik. Thl. VIII. S. 69—88.

§. 8.

Was nun das Extrahiren aus besonderen Zahlen betrifft, so wird dies, wenn man zugleich die Näherungsbrüche entwickelt, durch Anwendung unserer Formel wesentlich erleichtert. Namentlich ist man nun der Mühe überhoben, jedesmal den Faktor zu suchen, mit welchem der Nenner des vollständigen Quotienten rational gemacht werden muss.

Die Berechnung gestaltet sich, wie folgt:

Digitized by Google

Vollständige Quotienten.	Nenn.	Zahl.	
$x = \sqrt[5]{10} = 1 + \frac{1}{x'}$	0	1	
$x' = \frac{\sqrt[5]{10000} + \sqrt[5]{1000} + \sqrt[5]{100} + \sqrt[5]{10} + 1}{9} = 1 + \frac{1}{x''}$	1	1	$q^3 = 1,\ q^2p = 1,\ qp^2 = 1,\ p^3 = 1$ $J = +(1.1^4 - 0.1^4.10) = 1$ $D = -(1^5 - 1^5.10) = 9$
$x'' = \frac{\sqrt[5]{10000} + 2\sqrt[5]{1000} + 4\sqrt[5]{100} + 8\sqrt[5]{10} - 6}{22} = 1 + \frac{1}{x'''}$	1	2	$q^3 = 1,\ q^2p = 2,\ qp^2 = 4,\ p^3 = 8$ $J = -(1.2^4 - 1.1^4.10) = -6$ $D = +(2^5 - 1^5.10) = 22$
$x''' = \frac{8\sqrt[5]{10000} + 12\sqrt[5]{1000} + 18\sqrt[5]{100} + 27\sqrt[5]{10} + 2}{77} = 2 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	3	$q^3 = 8,\ q^2p = 12,\ qp^2 = 18,\ p^3 = 27$ $J = +(2.3^4 - 1.2^4.10) = 2$ $D = -(3^5 - 2^5.10) = 77$
$x^{IV} = \frac{125\sqrt[5]{10000} + 200\sqrt[5]{1000} + 320\sqrt[5]{100} + 512\sqrt[5]{10} + 212}{1518} = 2 + \frac{1}{x^{V}}$	5	8	$q^3 = 125,\ q^2p = 200,\ qp^2 = 320,\ p^3 = 512$ $J = -(3.8^4 - 2.5^4.10) = 212$ $D = +(8^5 - 5^5.10) = 1518$
$x^{V} = \frac{1728\sqrt[5]{10000} + 2736\sqrt[5]{1000} + 4332\sqrt[5]{100} + 6859\sqrt[5]{10} + 5768}{12221} = 4 + \frac{1}{x^{VI}}$	12	19	$q^3 = 1728,\ q^2p = 2736,\ qp^2 = 4332,\ p^3 = 6859$ $J = +(8.19^4 - 5.12^4.10) = 5768$ $D = -(19^5 - 12^5.10) = 12221$
u. s. w.	53	84	$q^3 = 148877,\ q^2p = 235956,\ qp^2 = 373968$ $p^3 = 592704$ $J = -(19.84^4 - 12.53^4.10) = 902136$ $D = +(84^5 - 53^5.10) = 164494$

Digitized by Google

Eine Hauptschwierigkeit ist immer, die in den irrationalen Grössen enthaltenen grössten ganzen Zahlen zu finden. Doch werden die Unterschiede zwischen diesen Grössen, abgesehen von den Zeichen, immer kleiner werden, also die in denselben enthaltenen grössten ganzen Zahlen bald einander gleich sein, wesshalb man dann von da an jedesmal nur Eine derselben zu suchen und dieselbe $n-1$mal zu nehmen hat.

§. 9. Zahlenbeispiele.

$x = \sqrt{2} =$	$1+\frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt{2}+1}{1} =$	$2+\frac{1}{x''}$	1	1
$x'' = \frac{\sqrt{2}+1}{1} =$	$2+\frac{1}{x'''}$	2	3
$x''' = \frac{\sqrt{2}+1}{1} =$	$2+\frac{1}{x^{IV}}$	5	7
$x^{IV} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} =$	$2+\frac{1}{x^{V}}$	12	17
$x^{V} = \frac{\sqrt{2}+1}{1} =$	$2+\frac{1}{x^{VI}}$	29	41
u. s. w.		70	99

$x = \sqrt{15} =$	$3+\frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt{15}+3}{6} =$	$1+\frac{1}{x''}$	1	3
$x'' = \frac{\sqrt{15}+3}{1} =$	$6+\frac{1}{x'''}$	1	4
$x''' = \frac{\sqrt{15}+3}{6} =$	$1+\frac{1}{x^{IV}}$	7	27
$x^{IV} = \frac{\sqrt{15}+3}{1} =$	$6+\frac{1}{x^{V}}$	8	31
$x^{V} = \frac{\sqrt{15}+3}{6} =$	$1+\frac{1}{x^{VI}}$	55	213
u. s. w.		63	244

Digitized by Google

$x = \sqrt{43} =$	$6 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt{43}+6}{7} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	6
$x'' = \frac{\sqrt{43}+1}{6} =$	$1 + \frac{1}{x'''}$	1	7
$x''' = \frac{\sqrt{43}+5}{3} =$	$3 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	13
$x^{IV} = \frac{\sqrt{43}+4}{9} =$	$1 + \frac{1}{x^{V}}$	7	46
$x^{V} = \frac{\sqrt{43}+5}{2} =$	$5 + \frac{1}{x^{VI}}$	9	59
$x^{VI} = \frac{\sqrt{43}+5}{9} =$	$1 + \frac{1}{x^{VII}}$	52	341
$x^{VII} = \frac{\sqrt{43}+4}{3} =$	$3 + \frac{1}{x^{VIII}}$	61	400
$x^{VIII} = \frac{\sqrt{43}+5}{6} =$	$1 + \frac{1}{x^{IX}}$	235	1541
$x^{IX} = \frac{\sqrt{43}+1}{7} =$	$1 + \frac{1}{x^{X}}$	296	1941
$x^{X} = \frac{\sqrt{43}+6}{1} =$	$12 + \frac{1}{x^{XI}}$	531	3482
$x^{XI} = \frac{\sqrt{43}+6}{7} =$	$1 + \frac{1}{x^{XII}}$	6668	43725
u. s. w.		7199	47207

$x = \sqrt{73} =$	$8 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt{73}+8}{9} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	8
$x'' = \frac{\sqrt{73}+1}{8} =$	$1 + \frac{1}{x'''}$	1	9
$x''' = \frac{\sqrt{73}+7}{3} =$	$5 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	17
$x^{IV} = \frac{\sqrt{73}+8}{3} =$	$5 + \frac{1}{x^{V}}$	11	94
$x^{V} = \frac{\sqrt{73}+7}{8} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	57	487
$x^{VI} = \frac{\sqrt{73}+1}{9} =$	$1 + \frac{1}{x^{VII}}$	68	581
$x^{VII} = \frac{\sqrt{73}+8}{1} =$	$16 + \frac{1}{x^{VIII}}$	125	1068
$x^{VIII} = \frac{\sqrt{73}+8}{9} =$	$1 + \frac{1}{x^{IX}}$	2068	17669
u. s. w.		2193	18737

Digitized by Google

$x = \sqrt{97} =$	$9 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt{97}+9}{16} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	9
$x'' = \frac{\sqrt{97}+7}{3} =$	$5 + \frac{1}{x'''}$	1	10
$x''' = \frac{\sqrt{97}+8}{11} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	6	59
$x^{IV} = \frac{\sqrt{97}+3}{8} =$	$1 + \frac{1}{x^{V}}$	7	69
$x^{V} = \frac{\sqrt{97}+5}{9} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	13	128
$x^{VI} = \frac{\sqrt{97}+4}{9} =$	$1 + \frac{1}{x^{VII}}$	20	197
$x^{VII} = \frac{\sqrt{97}+5}{8} =$	$1 + \frac{1}{x^{VIII}}$	33	325
$x^{VIII} = \frac{\sqrt{97}+3}{11} =$	$1 + \frac{1}{x^{IX}}$	53	522
$x^{IX} = \frac{\sqrt{97}+8}{3} =$	$5 + \frac{1}{x^{X}}$	86	847
$x^{X} = \frac{\sqrt{97}+7}{16} =$	$1 + \frac{1}{x^{XI}}$	483	4757
$x^{XI} = \frac{\sqrt{97}+9}{1} =$	$18 + \frac{1}{x^{XII}}$	569	5604
$x^{XII} = \frac{\sqrt{97}+9}{16} =$	$1 + \frac{1}{x^{XIII}}$	10725	105629
u. s. w.		11294	111233

$x = \sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}{1} = 3 + \frac{1}{x''}$	1	1
$x'' = \frac{3\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}+2}{10} = 1 + \frac{1}{x'''}$	3	4
$x''' = \frac{4\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{2}+4}{3} = 5 + \frac{1}{x^{IV}}$	4	5
$x^{IV} = \frac{23\sqrt[3]{4}+29\sqrt[3]{2}+27}{55} = 1 + \frac{1}{x^{V}}$	23	29
$x^{V} = \frac{27\sqrt[3]{4}+34\sqrt[3]{2}-10}{62} = 1 + \frac{1}{x^{VI}}$	27	34
$x^{VI} = \frac{50\sqrt[3]{4}+63\sqrt[3]{2}+54}{47} = 4 + \frac{1}{x^{VII}}$	50	63
$x^{VII} = \frac{227\sqrt[3]{4}+286\sqrt[3]{2}+248}{510} = 1 + \frac{1}{x^{VIII}}$	227	286
$x^{VIII} = \frac{277\sqrt[3]{4}+349\sqrt[3]{2}-120}{683} = 1 + \frac{1}{x^{IX}}$	277	349
$x^{IX} = \frac{504\sqrt[3]{4}+635\sqrt[3]{2}+661}{253} = 8 + \frac{1}{x^{X}}$	504	635
$x^{X} = \frac{4309\sqrt[3]{4}+5429\sqrt[3]{2}+4813}{17331} = 1 + \frac{1}{x^{XI}}$	4309	5429
$x^{XI} = \frac{4813\sqrt[3]{4}+6064\sqrt[3]{2}+6342}{1450} = 14 + \frac{1}{x^{XII}}$	4813	6064
$x^{XII} = \frac{71691\sqrt[3]{4}+90325\sqrt[3]{2}+94106}{293383} = 1 + \frac{1}{x^{XIII}}$	71691	90325
$x^{XIII} = \frac{76504\sqrt[3]{4}+96389\sqrt[3]{2}+91213}{32259} = 10 + \frac{1}{x^{XIV}}$	76504	96389
u. s. w.	836731	1054215

$x = \sqrt[3]{3} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}{2} =$	$2 + \frac{1}{x''}$	1	1
$x'' = \frac{2\sqrt[3]{9}+3\sqrt[3]{3}+3}{3} =$	$3 + \frac{1}{x'''}$	2	3
$x''' = \frac{7\sqrt[3]{9}+10\sqrt[3]{3}+6}{29} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	7	10
$x^{IV} = \frac{9\sqrt[3]{9}+13\sqrt[3]{3}+11}{10} =$	$4 + \frac{1}{x^{V}}$	9	13
$x^{V} = \frac{43\sqrt[3]{9}+62\sqrt[3]{3}+49}{193} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	43	62
$x^{VI} = \frac{52\sqrt[3]{9}+75\sqrt[3]{3}+66}{51} =$	$5 + \frac{1}{x^{VII}}$	52	75
$x^{VII} = \frac{303\sqrt[3]{9}+437\sqrt[3]{3}+471}{928} =$	$1 + \frac{1}{x^{VIII}}$	303	437
u. s. w.		355	512

$x = \sqrt[3]{4} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1}{3} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	1
$x'' = \frac{\sqrt[3]{16}+2\sqrt[3]{4}}{4} =$	$1 + \frac{1}{x'''}$	1	2
$x''' = \frac{2\sqrt[3]{16}+3\sqrt[3]{4}+2}{5} =$	$2 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	3
$x^{IV} = \frac{5\sqrt[3]{16}+8\sqrt[3]{4}+8}{12} =$	$2 + \frac{1}{x^{V}}$	5	8
$x^{V} = \frac{12\sqrt[3]{16}+19\sqrt[3]{4}+8}{53} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	12	19
$x^{VI} = \frac{17\sqrt[3]{16}+27\sqrt[3]{4}+21}{31} =$	$3 + \frac{1}{x^{VII}}$	17	27
$x^{VII} = \frac{63\sqrt[3]{16}+100\sqrt[3]{4}+108}{188} =$	$2 + \frac{1}{x^{VIII}}$	63	100
u. s. w.		143	227

Digitized by Google

$x = \sqrt[3]{5} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 1}{4} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	1
$x'' = \frac{\sqrt[3]{25} + 2\sqrt[3]{5} + 1}{3} =$	$2 + \frac{1}{x'''}$	1	2
$x''' = \frac{3\sqrt[3]{25} + 5\sqrt[3]{5} + 5}{10} =$	$2 + \frac{1}{x^{IV}}$	3	5
$x^{IV} = \frac{7\sqrt[3]{25} + 12\sqrt[3]{5} + 15}{13} =$	$4 + \frac{1}{x^{V}}$	7	12
$x^{V} = \frac{31\sqrt[3]{25} + 53\sqrt[3]{5} + 73}{78} =$	$3 + \frac{1}{x^{VI}}$	31	53
$x^{VI} = \frac{100\sqrt[3]{25} + 171\sqrt[3]{5} + 227}{211} =$	$3 + \frac{1}{x^{VII}}$	100	171
$x^{VII} = \frac{331\sqrt[3]{25} + 566\sqrt[3]{5} + 376}{1959} =$	$1 + \frac{1}{x^{VIII}}$	331	566
u. s. w.		431	737

$x = \sqrt[3]{6} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{6} + 1}{5} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	1
$x'' = \frac{\sqrt[3]{36} + 2\sqrt[3]{6} + 2}{2} =$	$4 + \frac{1}{x'''}$	1	2
$x''' = \frac{5\sqrt[3]{36} + 9\sqrt[3]{6} + 12}{21} =$	$2 + \frac{1}{x^{IV}}$	5	9
$x^{IV} = \frac{11\sqrt[3]{36} + 20\sqrt[3]{6} + 30}{14} =$	$7 + \frac{1}{x^{V}}$	11	20
$x^{V} = \frac{82\sqrt[3]{36} + 149\sqrt[3]{6} + 236}{259} =$	$3 + \frac{1}{x^{VI}}$	82	149
$x^{VI} = \frac{257\sqrt[3]{36} + 467\sqrt[3]{6} + 847}{5} =$	$508 + \frac{1}{x^{VII}}$	257	467
u. s. w.		130638	237385

Digitized by Google

$x = \sqrt[3]{7} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{7} + 1}{6} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	1
$x'' = \frac{\sqrt[3]{49} + 2\sqrt[3]{7} + 3}{1} =$	$10 + \frac{1}{x'''}$	1	2
$x''' = \frac{11\sqrt[3]{49} + 21\sqrt[3]{7} + 35}{56} =$	$2 + \frac{1}{x^{IV}}$	11	21
$x^{IV} = \frac{23\sqrt[3]{49} + 44\sqrt[3]{7} + 77}{15} =$	$16 + \frac{1}{x^{V}}$	23	44
$x^{V} = \frac{379\sqrt[3]{49} + 725\sqrt[3]{7} + 1299}{1448} =$	$2 + \frac{1}{x^{VI}}$	379	725
u. s. w.		781	1494

$x = \sqrt[3]{9} =$	$2 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{81} + 2\sqrt[3]{9} + 4}{1} =$	$12 + \frac{1}{x''}$	1	2
$x'' = \frac{12\sqrt[3]{81} + 25\sqrt[3]{9} + 46}{73} =$	$2 + \frac{1}{x'''}$	12	25
$x''' = \frac{25\sqrt[3]{81} + 52\sqrt[3]{9} + 100}{17} =$	$18 + \frac{1}{x^{IV}}$	25	52
$x^{IV} = \frac{462\sqrt[3]{81} + 961\sqrt[3]{9} + 1808}{3529} =$	$1 + \frac{1}{x^{V}}$	462	961
$x^{V} = \frac{487\sqrt[3]{81} + 1013\sqrt[3]{9} - 293}{2530} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	487	1013
u. s. w.		949	1974

$x = \sqrt[3]{10} =$	$2 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{100} + 2\sqrt[3]{10} + 4}{2} =$	$6 + \frac{1}{x''}$	1	2
$x'' = \frac{6\sqrt[3]{100} + 13\sqrt[3]{10} + 22}{37} =$	$2 + \frac{1}{x'''}$	6	13
$x''' = \frac{13\sqrt[3]{100} + 28\sqrt[3]{10} + 52}{18} =$	$9 + \frac{1}{x^{IV}}$	13	28
$x^{IV} = \frac{123\sqrt[3]{100} + 265\sqrt[3]{10} + 470}{955} =$	$1 + \frac{1}{x^{V}}$	123	265
$x^{V} = \frac{136\sqrt[3]{100} + 293\sqrt[3]{10} - 95}{803} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	136	293
$x^{VI} = \frac{259\sqrt[3]{100} + 558\sqrt[3]{10} + 508}{1322} =$	$2 + \frac{1}{x^{VII}}$	259	558
u. s. w.		654	1409

Digitized by Google

$x = \sqrt[3]{15} =$	$2+\frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{225}+2\sqrt[3]{15}+4}{7} =$	$2+\frac{1}{x''}$	1	2
$x'' = \frac{2\sqrt[3]{225}+5\sqrt[3]{15}+10}{5} =$	$6+\frac{1}{x'''}$	2	5
$x''' = \frac{13\sqrt[3]{225}+32\sqrt[3]{15}+50}{187} =$	$1+\frac{1}{x^{IV}}$	13	32
$x^{IV} = \frac{15\sqrt[3]{225}+37\sqrt[3]{15}+67}{28} =$	$8+\frac{1}{x^{V}}$	15	37
$x^{V} = \frac{133\sqrt[3]{225}+328\sqrt[3]{15}+583}{2003} =$	$1+\frac{1}{x^{VI}}$	133	328
$x^{VI} = \frac{148\sqrt[3]{225}+365\sqrt[3]{15}+680}{245} =$	$10+\frac{1}{x^{VII}}$	148	365
u. s. w.		1613	3978

$x = \sqrt[3]{18} =$	$2+\frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{324}+2\sqrt[3]{18}+4}{10} =$	$1+\frac{1}{x''}$	1	2
$x'' = \frac{\sqrt[3]{324}+3\sqrt[3]{18}}{9} =$	$1+\frac{1}{x'''}$	1	3
$x''' = \frac{2\sqrt[3]{324}+5\sqrt[3]{18}+3}{19} =$	$1+\frac{1}{x^{IV}}$	2	5
$x^{IV} = \frac{3\sqrt[3]{324}+8\sqrt[3]{18}+4}{26} =$	$1+\frac{1}{x^{V}}$	3	8
$x^{V} = \frac{5\sqrt[3]{324}+13\sqrt[3]{18}+2}{53} =$	$1+\frac{1}{x^{VI}}$	5	13
$x^{VI} = \frac{8\sqrt[3]{324}+21\sqrt[3]{18}+27}{45} =$	$3+\frac{1}{x^{VII}}$	8	21
$x^{VII} = \frac{29\sqrt[3]{324}+76\sqrt[3]{18}+192}{26} =$	$22+\frac{1}{x^{VIII}}$	29	76
u. s. w.		646	1693

Digitized by Google

$x = \sqrt[3]{19} =$	$2 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{361} + 2\sqrt[3]{19} + 4}{11}$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	2
$x'' = \frac{\sqrt[3]{361} + 3\sqrt[3]{19} + 1}{8} =$	$2 + \frac{1}{x'''}$	1	3
$x''' = \frac{3\sqrt[3]{361} + 8\sqrt[3]{19} + 21}{1} =$	$63 + \frac{1}{x^{IV}}$	3	8
$x^{IV} = \frac{190\sqrt[3]{361} + 507\sqrt[3]{19} + 1308}{2843} =$	$1 + \frac{1}{x^{V}}$	190	507
$x^{V} = \frac{193\sqrt[3]{361} + 515\sqrt[3]{19} + 185}{1208} =$	$2 + \frac{1}{x^{VI}}$	193	515
u. s. w.		576	1537

$x = \sqrt[3]{48} =$	$3 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{2304} + 3\sqrt[3]{48} + 9}{21} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	3
$x'' = \frac{\sqrt[3]{2304} + 4\sqrt[3]{48}}{16} =$	$1 + \frac{1}{x'''}$	1	4
$x''' = \frac{2\sqrt[3]{2304} + 7\sqrt[3]{48} + 4}{41}$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	7
$x^{IV} = \frac{3\sqrt[3]{2304} + 11\sqrt[3]{48} + 17}{35} =$	$2 + \frac{1}{x^{V}}$	3	11
$x^{V} = \frac{8\sqrt[3]{2304} + 29\sqrt[3]{48} + 35}{187} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	8	29
$x^{VI} = \frac{11\sqrt[3]{2304} + 40\sqrt[3]{48} + 64}{112} =$	$3 + \frac{1}{x^{VII}}$	11	40
$x^{VII} = \frac{41\sqrt[3]{2304} + 149\sqrt[3]{48} + 472}{259} =$	$6 + \frac{1}{x^{VIII}}$	41	149
u. s. w.		257	934

Digitized by Google

$x = \sqrt[3]{75} =$	$4 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{5625} + 4\sqrt[3]{75} + 16}{11} =$	$4 + \frac{1}{x''}$	1	4
$x'' = \frac{4\sqrt[3]{5625} + 17\sqrt[3]{75} + 44}{113} =$	$1 + \frac{1}{x'''}$	4	17
$x''' = \frac{5\sqrt[3]{5625} + 21\sqrt[3]{75} - 3}{114} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	5	21
$x^{IV} = \frac{9\sqrt[3]{5625} + 38\sqrt[3]{75} + 51}{197} =$	$1 + \frac{1}{x^{V}}$	9	38
$x^{V} = \frac{14\sqrt[3]{5625} + 59\sqrt[3]{75} - 22}{421} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	14	59
$x^{VI} = \frac{23\sqrt[3]{5625} + 97\sqrt[3]{75} + 319}{148} =$	$7 + \frac{1}{x^{VII}}$	23	97
u. s. w.		175	738

$x = \sqrt[3]{98} =$	$4 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{9604} + 4\sqrt[3]{98} + 16}{34} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	4
$x'' = \frac{\sqrt[3]{9604} + 5\sqrt[3]{98} - 2}{27} =$	$1 + \frac{1}{x'''}$	1	5
$x''' = \frac{2\sqrt[3]{9604} + 9\sqrt[3]{98} + 13}{55} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	9
$x^{IV} = \frac{3\sqrt[3]{9604} + 14\sqrt[3]{98}}{98} =$	$1 + \frac{1}{x^{V}}$	3	14
$x^{V} = \frac{5\sqrt[3]{9604} + 23\sqrt[3]{98} + 56}{83} =$	$3 + \frac{1}{x^{VI}}$	5	23
$x^{VI} = \frac{18\sqrt[3]{9604} + 83\sqrt[3]{98} + 313}{251} =$	$4 + \frac{1}{x^{VII}}$	18	83
$x^{VII} = \frac{77\sqrt[3]{9604} + 355\sqrt[3]{98} + 1319}{1359} =$	$3 + \frac{1}{x^{VIII}}$	77	355
u. s. w.		249	1148

Digitized by Google

$x = \sqrt[3]{100} = \quad 4 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{10000} + 4\sqrt[3]{100} + 16}{36} = \quad 1 + \frac{1}{x''}$	1	4
$x'' = \frac{\sqrt[3]{10000} + 5\sqrt[3]{100}}{25} = \quad 1 + \frac{1}{x'''}$	1	5
$x''' = \frac{2\sqrt[3]{10000} + 9\sqrt[3]{100} + 5}{71} = \quad 1 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	9
$x^{IV} = \frac{3\sqrt[3]{10000} + 14\sqrt[3]{100} + 36}{44} = \quad 3 + \frac{1}{x^{V}}$	3	14
$x^{V} = \frac{11\sqrt[3]{10000} + 51\sqrt[3]{100} + 114}{449} = 1 + \frac{1}{x^{VI}}$	11	51
$x^{VI} = \frac{14\sqrt[3]{10000} + 65\sqrt[3]{100} + 125}{225} = 3 + \frac{1}{x^{VII}}$	14	65
$x^{VII} = \frac{53\sqrt[3]{10000} + 246\sqrt[3]{100} + 940}{764} = 4 + \frac{1}{x^{VIII}}$	53	246
u. s. w.	226	1049

$x = \sqrt[3]{300} = \quad 6 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{90000} + 6\sqrt[3]{300} + 36}{84} = \quad 1 + \frac{1}{x''}$	1	6
$x'' = \frac{\sqrt[3]{90000} + 7\sqrt[3]{300} + 6}{43} = \quad 2 + \frac{1}{x'''}$	1	7
$x''' = \frac{3\sqrt[3]{90000} + 20\sqrt[3]{300} + 100}{100} = \quad 3 + \frac{1}{x^{IV}}$	3	20
$x^{IV} = \frac{10\sqrt[3]{90000} + 67\sqrt[3]{300} + 220}{763} = 1 + \frac{1}{x^{V}}$	10	67
$x^{V} = \frac{13\sqrt[3]{90000} + 87\sqrt[3]{300} + 123}{597} = 2 + \frac{1}{x^{VI}}$	13	87
$x^{VI} = \frac{36\sqrt[3]{90000} + 241\sqrt[3]{300} + 1353}{721} = 6 + \frac{1}{x^{VII}}$	36	241
$x^{VII} = \frac{229\sqrt[3]{90000} + 1533\sqrt[3]{300} + 8649}{10263} = 2 + \frac{1}{x^{VIII}}$	229	1533
u. s. w.	494	3307

Digitized by Google

$x = \sqrt[3]{890} =$	$9 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[3]{792100} + 9\sqrt[3]{890} + 81}{161} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	9
$x'' = \frac{\sqrt[3]{792100} + 10\sqrt[3]{890} - 10}{110} =$	$1 + \frac{1}{x'''}$	1	10
$x''' = \frac{2\sqrt[3]{792100} + 19\sqrt[3]{890} + 50}{261} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	19
$x^{IV} = \frac{3\sqrt[3]{792100} + 29\sqrt[3]{890} + 41}{359} =$	$1 + \frac{1}{x^{V}}$	3	29
$x^{V} = \frac{5\sqrt[3]{792100} + 48\sqrt[3]{890} + 66}{658} =$	$1 + \frac{1}{x^{VI}}$	5	48
$x^{VI} = \frac{8\sqrt[3]{792100} + 77\sqrt[3]{890} + 208}{853} =$	$1 + \frac{1}{x^{VII}}$	8	77
$x^{VII} = \frac{13\sqrt[3]{792100} + 125\sqrt[3]{890} - 155}{2205} =$	$1 + \frac{1}{x^{VIII}}$	13	125
$x^{VIII} = \frac{21\sqrt[3]{792100} + 202\sqrt[3]{890} + 1870}{118} =$	$48 + \frac{1}{x^{IX}}$	21	202
u. s. w.		1021	9821

$x = \sqrt[4]{41} =$	$2 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[4]{68921} + 2\sqrt[4]{1681} + 4\sqrt[4]{41} + 8}{25} =$	$1 + \frac{1}{x''}$	1	2
$x'' = \frac{\sqrt[4]{68921} + 3\sqrt[4]{1681} + 9\sqrt[4]{41} - 13}{40} =$	$1 + \frac{1}{x'''}$	1	3
$x''' = \frac{4\sqrt[4]{68921} + 10\sqrt[4]{1681} + 25\sqrt[4]{41} + 47}{31} =$	$7 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	5
$x^{IV} = \frac{225\sqrt[4]{68921} + 570\sqrt[4]{1681} + 1444\sqrt[4]{41} + 2390}{9511} =$	$1 + \frac{1}{x^{V}}$	15	38
$x^{V} = \frac{289\sqrt[4]{68921} + 731\sqrt[4]{1681} + 1849\sqrt[4]{41} - 229}{5560} =$	$2 + \frac{1}{x^{VI}}$	17	43
$x^{VI} = \frac{2401\sqrt[4]{68921} + 6076\sqrt[4]{1681} + 15376\sqrt[4]{41} + 16521}{64535}$			
	$= 2 + \frac{1}{x^{VII}}$	49	124
$x^{VII} = \frac{13225\sqrt[4]{68921} + 33465\sqrt[4]{1681} + 84681\sqrt[4]{41} + 191329}{53864}$			
	$= 15 + \frac{1}{x^{VIII}}$	115	291
u. s. w.		1774	4489

$$x = \sqrt[4]{54} = 2 + \frac{1}{x'} \qquad \Big| \; 0 \;\Big|\; 1$$

$$x' = \frac{\sqrt[4]{157464} + 2\sqrt[4]{2916} + 4\sqrt[4]{54} + 8}{38} = 1 + \frac{1}{x''} \qquad \Big| \; 1 \;\Big|\; 2$$

$$x'' = \frac{\sqrt[4]{157464} + 3\sqrt[4]{2916} + 9\sqrt[4]{54}}{27} = 2 + \frac{1}{x'''} \qquad \Big| \; 1 \;\Big|\; 3$$

$$x''' = \frac{9\sqrt[4]{157464} + 24\sqrt[4]{2916} + 64\sqrt[4]{54} + 78}{278} = 2 + \frac{1}{x^{IV}} \qquad \Big| \; 3 \;\Big|\; 8$$

$$x^{IV} = \frac{49\sqrt[4]{157464} + 133\sqrt[4]{2916} + 361\sqrt[4]{54} + 694}{667} = 5 + \frac{1}{x^{V}} \qquad \Big| \; 7 \;\Big|\; 19$$

$$x^{V} = \frac{1444\sqrt[4]{157464} + 3914\sqrt[4]{2916} + 10609\sqrt[4]{54} + 20197}{46463}$$

$$= 2 + \frac{1}{x^{VI}} \qquad \Big| \; 38 \;\Big|\; 103$$

$$x^{VI} = \frac{6889\sqrt[4]{157464} + 18675\sqrt[4]{2916} + 50625\sqrt[4]{54} + 72549}{141291}$$

$$= 3 + \frac{1}{x^{VII}} \qquad \Big| \; 83 \;\Big|\; 225$$

$$x^{VII} = \frac{82369\sqrt[4]{157464} + 223286\sqrt[4]{2916} + 605284\sqrt[4]{54} + 918954}{2496038}$$

$$= 2 + \frac{1}{x^{VIII}} \qquad \Big| \; 287 \;\Big|\; 778$$

u. s. w. $\qquad \Big| \; 657 \;\Big|\; 1781$

$$x = \sqrt[4]{250} = 3 + \frac{1}{x'} \qquad \Big| \; 0 \;\Big|\; 1$$

$$x' = \frac{\sqrt[4]{15625000} + 3\sqrt[4]{62500} + 9\sqrt[4]{250} + 27}{169} = 1 + \frac{1}{x''} \qquad \Big| \; 1 \;\Big|\; 3$$

$$x'' = \frac{\sqrt[4]{15625000} + 4\sqrt[4]{62500} + 16\sqrt[4]{250} + 58}{6} = 41 + \frac{1}{x'''} \qquad \Big| \; 1 \;\Big|\; 4$$

$$x''' = \frac{1764\sqrt[4]{15625000} + 7014\sqrt[4]{62500} + 27889\sqrt[4]{250} + 107852}{127679}$$

$$= 3 + \frac{1}{x^{IV}} \qquad \Big| \; 42 \;\Big|\; 167$$

$$x^{IV} = \frac{\left\{\begin{array}{c} 16129\sqrt[4]{15625000} + 64135\sqrt[4]{62500} + 255025\sqrt[4]{250} \\ + 488125 \end{array}\right\}}{1590375}$$

$$= 2 + \frac{1}{x^{V}} \qquad \Big| \; 127 \;\Big|\; 505$$

u. s. w. $\qquad \Big| \; 296 \;\Big|\; 1177$

Digitized by Google

$x = \sqrt[5]{2} = 1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[5]{16} + \sqrt[5]{8} + \sqrt[5]{4} + \sqrt[5]{2} + 1}{1} = 6 + \frac{1}{x''}$	1	1
$x'' = \frac{216\sqrt[5]{16} + 252\sqrt[5]{8} + 294\sqrt[5]{4} + 343\sqrt[5]{2} + 191}{1255} = 1 + \frac{1}{x'''}$	6	7
$x''' = \frac{343\sqrt[5]{16} + 392\sqrt[5]{8} + 448\sqrt[5]{4} + 512\sqrt[5]{2} - 140}{846} = 2 + \frac{1}{x^{IV}}$	7	8
$x^{IV} = \frac{8000\sqrt[5]{16} + 9200\sqrt[5]{8} + 10580\sqrt[5]{4} + 12167\sqrt[5]{2} + 1272}{36343} = 1 + \frac{1}{x^{V}}$	20	23
$x^{V} = \frac{19683\sqrt[5]{16} + 22599\sqrt[5]{8} + 25947\sqrt[5]{4} + 29791\sqrt[5]{2} - 16657}{68663} = 1 + \frac{1}{x^{VI}}$	27	31
$x^{VI} = \frac{\left\{\begin{matrix} 103823\sqrt[5]{16} + 119286\sqrt[5]{8} + 137052\sqrt[5]{4} + 157464\sqrt[5]{2} \\ -91962 \end{matrix}\right\}}{475010} = 1 + \frac{1}{x^{VII}}$	47	54
$x^{VII} = \frac{\left\{\begin{matrix} 405224\sqrt[5]{16} + 465460\sqrt[5]{8} + 534650\sqrt[5]{4} + 614125\sqrt[5]{2} \\ + 95606 \end{matrix}\right\}}{960123} = 3 + \frac{1}{x^{VIII}}$	74	85
u. s. w.	269	309

$x = \sqrt[5]{3} = 1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[5]{81} + \sqrt[5]{27} + \sqrt[5]{9} + \sqrt[5]{3} + 1}{2} = 4 + \frac{1}{x''}$	1	1
$x'' = \frac{64\sqrt[5]{81} + 80\sqrt[5]{27} + 100\sqrt[5]{9} + 125\sqrt[5]{3} + 143}{53} = 14 + \frac{1}{x'''}$	4	5
$x''' = \frac{\left\{\begin{matrix} 185193\sqrt[5]{81} + 230679\sqrt[5]{27} + 287337\sqrt[5]{9} + 357911\sqrt[5]{3} \\ + 386393 \end{matrix}\right\}}{846820} = 2 + \frac{1}{x^{IV}}$	57	71
$x^{IV} = \frac{\left\{\begin{matrix} 1643032\sqrt[5]{81} + 2046828\sqrt[5]{27} + 2549862\sqrt[5]{9} \\ + 3176523\sqrt[5]{3} - 270855 \end{matrix}\right\}}{8752803} = 1 + \frac{1}{x^{V}}$	118	147
u. s. w.	175	218

$x = \sqrt[5]{5} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[5]{625} + \sqrt[5]{125} + \sqrt[5]{25} + \sqrt[5]{5} + 1}{4} =$	$2 + \frac{1}{x''}$	1	1
$x'' = \frac{8\sqrt[5]{625} + 12\sqrt[5]{125} + 18\sqrt[5]{25} + 27\sqrt[5]{5} - 1}{83} =$	$1 + \frac{1}{x'''}$	2	3
$x''' = \frac{27\sqrt[5]{625} + 36\sqrt[5]{125} + 48\sqrt[5]{25} + 64\sqrt[5]{5} - 42}{191} =$	$1 + \frac{1}{x^{IV}}$	3	4
$x^{IV} = \frac{125\sqrt[5]{625} + 175\sqrt[5]{125} + 245\sqrt[5]{25} + 343\sqrt[5]{5} - 229}{1182}$	$= 1 + \frac{1}{x^{V}}$	5	7
$x^{V} = \frac{512\sqrt[5]{625} + 704\sqrt[5]{125} + 968\sqrt[5]{25} + 1331\sqrt[5]{5} + 87}{2789}$	$= 2 + \frac{1}{x^{VI}}$	8	11
$x^{VI} = \frac{9261\sqrt[5]{625} + 12789\sqrt[5]{125} + 17661\sqrt[5]{25} + 24389\sqrt[5]{5} - 851}{90644}$	$= 1 + \frac{1}{x^{VII}}$	21	29
$x^{VII} = \frac{\left\{ 24389\sqrt[5]{625} + 33640\sqrt[5]{125} + 46400\sqrt[5]{25} + 64000\sqrt[5]{5} - 24505 \right\}}{155745}$	$= 2 + \frac{1}{x^{VIII}}$	29	40
$x^{VIII} = \frac{\left\{ 493039\sqrt[5]{625} + 680269\sqrt[5]{125} + 938599\sqrt[5]{25} + 1295029\sqrt[5]{5} + 1435305 \right\}}{957554}$	$= 8 + \frac{1}{x^{IX}}$	79	109
u. s. w.		661	912

$x = \sqrt[5]{7} =$	$1 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{\sqrt[5]{2401} + \sqrt[5]{343} + \sqrt[5]{49} + \sqrt[5]{7} + 1}{6} =$	$2 + \frac{1}{x''}$	1	1
$x'' = \frac{8\sqrt[5]{2401} + 12\sqrt[5]{343} + 18\sqrt[5]{49} + 27\sqrt[5]{7} + 31}{19}$	$= 9 + \frac{1}{x'''}$	2	3
$x''' = \frac{\left\{ 6859\sqrt[5]{2401} + 10108\sqrt[5]{343} + 14896\sqrt[5]{49} + 21952\sqrt[5]{7} + 19474 \right\}}{122325}$	$= 1 + \frac{1}{x^{IV}}$	19	28
$x^{IV} = \frac{\left\{ 9261\sqrt[5]{2401} + 13671\sqrt[5]{343} + 20181\sqrt[5]{49} + 29791\sqrt[5]{7} + 7385 \right\}}{40444}$	$= 4 + \frac{1}{x^{V}}$	21	31
u. s. w.		103	152

$$x = \sqrt[6]{41} = \sqrt[6]{A} = \qquad 1 + \frac{1}{x'} \qquad \Big| \; 0 \; \Big| \; 1$$

$$x' = \frac{\sqrt[6]{A^5} + \sqrt[6]{A^4} + \sqrt[6]{A^3} + \sqrt[6]{A^2} + \sqrt[6]{A} + 1}{40} = \qquad 1 + \frac{1}{x''} \qquad \Big| \; 1 \; \Big| \; 1$$

$$x'' = \frac{\sqrt[6]{A^5} + 2\sqrt[6]{A^4} + 4\sqrt[6]{A^3} + 8\sqrt[6]{A^2} + 16\sqrt[6]{A} + 9}{23} = 5 + \frac{1}{x'''} \qquad \Big| \; 1 \; \Big| \; 2$$

$$x''' = \frac{\left\{\begin{array}{c} 1296\sqrt[6]{A^5} + 2376\sqrt[6]{A^4} + 4356\sqrt[6]{A^3} \\ + 7986\sqrt[6]{A^2} + 14641\sqrt[6]{A} + 3286 \end{array}\right\}}{141335} = \qquad 1 + \frac{1}{x^{IV}} \qquad \Big| \; 6 \; \Big| \; 11$$

$$x^{IV} = \frac{\left\{\begin{array}{c} 2401\sqrt[6]{A^5} + 4459\sqrt[6]{A^4} + 8281\sqrt[6]{A^3} \\ + 15379\sqrt[6]{A^2} + 28561\sqrt[6]{A} + 50299 \end{array}\right\}}{3200} = 98 + \frac{1}{x^{V}} \qquad \Big| \; 7 \; \Big| \; 13$$

u. s. w. $\qquad \Big| \; 692 \; \Big| \; 1285$

$$x = \sqrt[7]{601} = \sqrt[7]{A} = \qquad 2 + \frac{1}{x'} \qquad \Big| \; 0 \; \Big| \; 1$$

$$x' = \frac{\left\{\begin{array}{c} \sqrt[7]{A^6} + 2\sqrt[7]{A^5} + 4\sqrt[7]{A^4} + 8\sqrt[7]{A^3} \\ + 16\sqrt[7]{A^2} + 32\sqrt[7]{A} + 64 \end{array}\right\}}{473} = \qquad 2 + \frac{1}{x''} \qquad \Big| \; 1 \; \Big| \; 1$$

$$x'' = \frac{\left\{\begin{array}{c} 32\sqrt[7]{A^6} + 80\sqrt[7]{A^5} + 200\sqrt[7]{A^4} + 500\sqrt[7]{A^3} \\ + 1250\sqrt[7]{A^2} + 3125\sqrt[7]{A} + 7214 \end{array}\right\}}{1197} = 44 + \frac{1}{x'''} \qquad \Big| \; 2 \; \Big| \; 5$$

u. s. w. $\qquad \Big| \; 89 \; \Big| \; 222$

$$x = \sqrt[7]{2000} = \sqrt[7]{A} = \qquad 2 + \frac{1}{x'} \qquad \Big| \; 0 \; \Big| \; 1$$

$$x' = \frac{\left\{\begin{array}{c} \sqrt[7]{A^6} + 2\sqrt[7]{A^5} + 4\sqrt[7]{A^4} + 8\sqrt[7]{A^3} \\ + 16\sqrt[7]{A^2} + 32\sqrt[7]{A} + 64 \end{array}\right\}}{1872} = \qquad 1 + \frac{1}{x''} \qquad \Big| \; 1 \; \Big| \; 2$$

$$x'' = \frac{\left\{\begin{array}{c} \sqrt[7]{A^6} + 3\sqrt[7]{A^5} + 9\sqrt[7]{A^4} + 27\sqrt[7]{A^3} \\ + 81\sqrt[7]{A^2} + 243\sqrt[7]{A} + 542 \end{array}\right\}}{187} = \qquad 25 + \frac{1}{x'''} \qquad \Big| \; 1 \; \Big| \; 3$$

$$x''' = \frac{\left\{\begin{array}{c} 11881376\sqrt[7]{A^6} + 35187152\sqrt[7]{A^5} + 104208104\sqrt[7]{A^4} \\ + 308616308\sqrt[7]{A^3} + 913979066\sqrt[7]{A^2} \\ + 2706784157\sqrt[7]{A} + 7435588267 \end{array}\right\}}{15097085147}$$

$$= 3 + \frac{1}{x^{IV}} \qquad \Big| \; 26 \; \Big| \; 77$$

u. s. w. $\qquad \Big| \; 79 \; \Big| \; 234$

$$x = \sqrt[11]{10} = \sqrt[11]{A} = 1 + \frac{1}{x'} \qquad \Bigg| \quad 0 \quad \Big| \quad 1$$

$$x' = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \sqrt[11]{A^{10}} + \sqrt[11]{A^9} + \sqrt[11]{A^8} + \sqrt[11]{A^7} + \sqrt[11]{A^6} \\ + \sqrt[11]{A^5} + \sqrt[11]{A^4} + \sqrt[11]{A^3} + \sqrt[11]{A^2} + \sqrt[11]{A} + 1 \end{array} \right\}}{9} = 4 + \frac{1}{x''} \qquad \Bigg| \quad 1 \quad \Big| \quad 1$$

$$x'' = \frac{\left\{ \begin{array}{l} 4^9 \sqrt[11]{A^{10}} + 4^8.5 \sqrt[11]{A^9} + 4^7.5^2 \sqrt[11]{A^8} + 4^6.5^3 \sqrt[11]{A^7} \\ + 4^5.5^4 \sqrt[11]{A^6} + 4^4.5^5 \sqrt[11]{A^5} + 4^3.5^6 \sqrt[11]{A^4} \\ + 4^2.5^7 \sqrt[11]{A^3} + 4.5^8 \sqrt[11]{A^2} + 5^9 \sqrt[11]{A} + 720135 \end{array} \right\}}{6885085} = 3 + \frac{1}{x'''} \qquad \Bigg| \quad 4 \quad \Big| \quad 5$$

$$x''' = \frac{\left\{ \begin{array}{c} 13^9 \sqrt[11]{A^{10}} + 13^8.16 \sqrt[11]{A^9} + 13^7.16^2 \sqrt[11]{A^8} \\ + 13^6.16^3 \sqrt[11]{A^7} + 13^5.16^4 \sqrt[11]{A^6} \\ + 13^4.16^5 \sqrt[11]{A^5} + 13^3.16^6 \sqrt[11]{A^4} \\ + 13^2.16^7 \sqrt[11]{A^3} + 13.16^8 \sqrt[11]{A^2} \\ + 16^9 \sqrt[11]{A} - 16781535080 \end{array} \right\}}{329417895954} = 2 + \frac{1}{x^{IV}} \qquad \Bigg| \quad 13 \quad \Big| \quad 16$$

u. s. w. $\qquad \Big| \quad 30 \quad \Big| \quad 37$

§. 10.

Man kann auch die irrationale Grösse $\sqrt[n]{A}$ in einen Kettenbruch verwandeln, ohne die Nenner der vollständigen Quotienten rational zu machen, und zwar in folgender Weise:

		Nenner.	Zähler.
$x=\sqrt[n]{A}=a+\dfrac{\sqrt[n]{A}-a}{1}=$	$a+\dfrac{1}{x'}$	0	1
$x'=\dfrac{1}{\sqrt[n]{A}-a}=a'+\dfrac{1-a'(\sqrt[n]{A}-a)}{\sqrt[n]{A}-a}=$	$a'+\dfrac{1}{x''}$	1	a
$x''=\dfrac{\sqrt[n]{A}-a}{aa'+1-a'\sqrt[n]{A}}$ $=a''+\dfrac{\sqrt[n]{A}-a-(aa'+1)a''+a'a''\sqrt[n]{A}}{aa'+1-a'\sqrt[n]{A}}=$	$a''+\dfrac{1}{x'''}$	a'	$aa'+1$
$x'''=\dfrac{aa'+1-a'\sqrt[n]{A}}{(a'a''+1)\sqrt[n]{A}-(aa'+1)a''-a}$ $=a'''+\dfrac{\left\{\begin{array}{c}aa'+1-a'\sqrt[n]{A}-(a'a''+1)a'''\sqrt[n]{A}\\+(aa'+1)a''a'''+aa'''\end{array}\right\}}{(a'a''+1)\sqrt[n]{A}-(aa'+1)a''-a}=$	$a'''+\dfrac{1}{x^{IV}}$	$a'a''+1$	$(aa'+1)a''+a$
$x^{IV}=\dfrac{(a'a''+1)\sqrt[n]{A}-(aa'+1)a''-a}{\left\{\begin{array}{c}(aa'+1)a''a'''+aa'''+aa'+1\\-[(a'a''+1)a'''+a']\sqrt[n]{A}\end{array}\right\}}$	u. s. w.	$(a'a''+1)a'''+a'$	$(aa'+1)a''a'''+aa'''+aa'+1$

Digitized by Google

Bis hieher ist immer $x^{(n)}=\frac{\pm p^0\mp q^0\sqrt[n]{A}}{\mp p\pm q\sqrt[n]{A}}=\frac{\pm(p^0-q^0\sqrt[n]{A})}{\mp(p-q\sqrt[n]{A})}=\frac{p^0-q^0\sqrt[n]{A}}{q\sqrt[n]{A}-p}$, wobei die oberen Zeichen für die Näherungsbrüche ungerader Ordnung, die unteren für die Näherungsbrüche gerader Ordnung gelten. Diese Formel wird allgemein gültig sein, wenn der folgende vollständige Quotient $x^{(n+1)}=\frac{\mp p\pm q\sqrt[n]{A}}{\pm p'\mp q'\sqrt[n]{A}}$ ist.

Dies wird aber folgendermassen bewiesen:

$$x^{(n)}=\frac{\pm p^0\mp q^0\sqrt[n]{A}}{\mp p\pm q\sqrt[n]{A}}=m+\frac{\pm p^0\mp q^0\sqrt[n]{A}\pm mp\mp mq\sqrt[n]{A}}{\mp p\pm q\sqrt[n]{A}}=m+\frac{1}{x^{(n+1)}}$$

$$x^{(n+1)}=\frac{\mp p\pm q\sqrt[n]{A}}{\pm mp\pm p^0\mp mq\sqrt[n]{A}\mp q^0\sqrt[n]{A}}=\frac{\mp p\pm q\sqrt[n]{A}}{\pm p'\mp q'\sqrt[n]{A}}$$

Nenner.	Zähler.
q^0	p^0
q	p
$mq+q^0=q'$	$mp+p^0=p'$

§. 11.

Es ist nun noch nachzuweisen, dass der hier gefundene Werth für $x^{(n)}$ dem in §. 3. angegebenen gleich ist, dass also:

$$\frac{\pm p^0\mp q^0\sqrt[n]{A}}{\mp p\pm q\sqrt[n]{A}}=\frac{\left\{\begin{array}{c}q^{n-2}\sqrt[n]{A^{n-1}}+q^{n-3}p\sqrt[n]{A^{n-2}}+q^{n-4}p^2\sqrt[n]{A^{n-3}}+\ldots\\ \ldots+q^2p^{n-4}\sqrt[n]{A^3}+qp^{n-3}\sqrt[n]{A^2}+p^{n-2}\sqrt[n]{A}\pm(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A)\end{array}\right\}}{\mp(p^n-q^nA)}.$$

Die Reihe der irrationalen Grössen im Zähler dieser letzteren Formel ist aber eine geometrische Progression von $n-1$ Gliedern. Das erste Glied derselben ist $=q^{n-2}\sqrt[n]{A^{n-1}}$, das letzte $=p^{n-2}\sqrt[n]{A}$, und der Exponent $=\frac{p}{q\sqrt[n]{A}}$. Folglich ist die Summe der Glieder

$$\frac{\frac{p^{n-1}}{q}-q^{n-2}\sqrt[n]{A^{n-1}}}{\frac{p}{q\sqrt[n]{A}}-1}=\frac{p^{n-1}-q^{n-1}\sqrt[n]{A^{n-1}}}{\frac{p}{\sqrt[n]{A}}-q}=\frac{p^{n-1}\sqrt[n]{A}-q^{n-1}A}{p-q\sqrt[n]{A}},$$

mithin:

$$x^{(n)}=\frac{\frac{p^{n-1}\sqrt[n]{A}-q^{n-1}A}{p-q\sqrt[n]{A}}\pm(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A)}{\mp(p^n-q^nA)}$$

$$=\frac{p^{n-1}\sqrt[n]{A}-q^{n-1}A\pm(p-q\sqrt[n]{A})(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A)}{\mp(p-q\sqrt[n]{A})(p^n-q^nA)}.$$

Dieser letzte Ausdruck muss nun $=\frac{\pm(p^0-q^0\sqrt[n]{A})}{\mp(p-q\sqrt[n]{A})}$ sein. Dann ist:

$$\pm(p^0-q^0\sqrt[n]{A})(p^n-q^nA)$$

$$=p^{n-1}\sqrt[n]{A}-q^{n-1}A\pm(p-q\sqrt[n]{A})(p^0p^{n-1}-q^0q^{n-1}A),$$

$$\pm p^0p^n\mp p^0q^nA\mp p^nq^0\sqrt[n]{A}\pm q^0q^nA\sqrt[n]{A}$$

$$=p^{n-1}\sqrt[n]{A}-q^{n-1}A\pm p^0p^n\mp pq^0q^{n-1}A\mp p^0p^{n-1}q\sqrt[n]{A}\pm q^0q^nA\sqrt[n]{A},$$

$$\mp p^0q^nA\mp p^nq^0\sqrt[n]{A}=-q^{n-1}A\mp pq^0q^{n-1}A+p^{n-1}\sqrt[n]{A}\mp p^0p^{n-1}q\sqrt[n]{A},$$

$$\pm(pq^0-p^0q)q^{n-1}A-p^{n-1}\sqrt[n]{A}=-q^{n-1}A\pm(pq^0-p^0q)p^{n-1}\sqrt[n]{A},$$

$$(pq^0-p^0q)q^{n-1}A\mp p^{n-1}\sqrt[n]{A}=\mp q^{n-1}A+(pq^0-p^0q)p^{n-1}\sqrt[n]{A}.$$

Diese letzte Gleichung ist aber richtig, weil $pq^0-p^0q=\mp1$.

Digitized by Google

§. 12.

Zahlenbeispiele, berechnet nach der Formel:

$$x^{(n)} = \frac{p^0 - q^0 \sqrt[n]{A}}{q\sqrt[n]{A} - p}.$$

$x = \sqrt[3]{890} = 9{,}6190017 = 9 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{1}{\sqrt[3]{890} - 9} = \frac{1}{0{,}6190017} = 1 + \frac{1}{x''}$	1	9
$x'' = \frac{9 - \sqrt[3]{890}}{\sqrt[3]{890} - 10} = \frac{-0{,}6190017}{-0{,}3809983} = 1 + \frac{1}{x'''}$	1	10
$x''' = \frac{10 - \sqrt[3]{890}}{2\sqrt[3]{890} - 19} = \frac{0{,}3809983}{0{,}2380034} = 1 + \frac{1}{x^{IV}}$	2	19
$x^{IV} = \frac{19 - 2\sqrt[3]{890}}{3\sqrt[3]{890} - 29} = \frac{-0{,}2380034}{-0{,}1429949} = 1 + \frac{1}{x^{V}}$	3	29
$x^{V} = \frac{29 - 3\sqrt[3]{890}}{5\sqrt[3]{890} - 48} = \frac{0{,}1429949}{0{,}0950085} = 1 + \frac{1}{x^{VI}}$	5	48
$x^{VI} = \frac{48 - 5\sqrt[3]{890}}{8\sqrt[3]{890} - 77} = \frac{-0{,}0950085}{-0{,}0479864} = 1 + \frac{1}{x^{VII}}$	8	77
$x^{VII} = \frac{77 - 8\sqrt[3]{890}}{13\sqrt[3]{890} - 125} = \frac{0{,}0479864}{0{,}0470221} = 1 + \frac{1}{x^{VIII}}$	13	125
$x^{VIII} = \frac{125 - 13\sqrt[3]{890}}{21\sqrt[3]{890} - 202} = \frac{-0{,}0470221}{-0{,}0009643} = 48 + \frac{1}{x^{IX}}$	21	202
$x^{IX} = \frac{202 - 21\sqrt[3]{890}}{1021\sqrt[3]{890} - 9821} = \frac{0{,}0009643}{0{,}0007357} = 1 + \frac{1}{x^{X}}$	1021	9821
$x^{X} = \frac{9821 - 1021\sqrt[3]{890}}{1042\sqrt[3]{890} - 10023} = \frac{-0{,}0007357}{-0{,}0002286}$		
$= 3 + \frac{1}{x^{XI}}$	1042	10023
$x^{XI} = \frac{10023 - 1042\sqrt[3]{890}}{4147\sqrt[3]{890} - 39890} = \frac{0{,}0002286}{0{,}0000499}$		
$= 4 + \frac{1}{x^{XII}}$	4147	39890
	17630	169583

Digitized by Google

$x = \sqrt[7]{601} = 2,494492 = \quad 2 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{1}{\sqrt[7]{601} - 2} = \frac{1}{0,494492} = \quad 2 + \frac{1}{x''}$	1	2
$x'' = \frac{2 - \sqrt[7]{601}}{2\sqrt[7]{601} - 5} = \frac{-0,494492}{-0,011016} = \quad 44 + \frac{1}{x'''}$	2	5
$x''' = \frac{5 - 2\sqrt[7]{601}}{89\sqrt[7]{601} - 222} = \frac{0,011016}{0,009788} = \quad 1 + \frac{1}{x^{IV}}$	89	222
$x^{IV} = \frac{222 - 89\sqrt[7]{601}}{91\sqrt[7]{601} - 227} = \frac{-0,009788}{-0,001228} = 7 + \frac{1}{x^{V}}$	1	227
	726	1811

$x = \sqrt[13]{10000} = 2,030918 = \quad 2 + \frac{1}{x'}$	0	1
$x' = \frac{1}{\sqrt[13]{10000} - 2} = \frac{1}{0,030918} = \quad 32 + \frac{1}{x''}$	1	2
$x'' = \frac{2 - \sqrt[13]{10000}}{32\sqrt[13]{10000} - 65} = \frac{-0,030918}{-0,010624} = 2 + \frac{1}{x'''}$	32	65
$x''' = \frac{65 - 32\sqrt[13]{10000}}{65\sqrt[13]{10000} - 132} = \frac{0,010624}{0,009670} = \quad 1 + \frac{1}{x^{IV}}$	65	132
$x^{IV} = \frac{132 - 65\sqrt[13]{10000}}{97\sqrt[13]{10000} - 197} = \frac{-0,009670}{-0,000954} = 10 + \frac{1}{x^{V}}$	97	197
	1035	2102

§. 13.

Die Formel $\frac{p^0 - q^0\sqrt[n]{A}}{q\sqrt[n]{A} - p}$ ist freilich viel einfacher als die Hauptformel in §. 3.; auch ist die Berechnung der Zahlenbeispiele nach derselben nicht so zeitraubend wie das in §. 8. angegebene Verfahren. Diese Berechnung ist aber, wie sich aus der Betrachtung der Beispiele in §. 12. ergibt, fast werthlos, und zwar aus folgenden Gründen:

1. Um nach der Formel $\frac{p^0 - q^0\sqrt[n]{A}}{q\sqrt[n]{A} - p}$ eine irrationale Grösse in einen Kettenbruch zu verwandeln, muss vorher der Werth dieser Grösse in anderer Weise ermittelt werden, und zwar ziemlich genau, weil sonst die Berechnung leicht geradezu unmöglich wird, indem sich negative Zahlen als Kettenbruchsnenner ergeben, wovon man durch einen Versuch sich überzeugen kann.

2. Durch vorstehende Berechnung sind eigentlich nicht die irrationalen Grössen $\sqrt[3]{890}$, $\sqrt[7]{601}$ und $\sqrt[13]{10000}$, sondern nur die endlichen Zahlen 9,6190017, 2,494492 und 2,030918 in Kettenbrüche verwandelt worden.

3. Diese Berechnungsweise ist von dem gewöhnlichen Verfahren, einen gemeinen Bruch in einen Kettenbruch zu verwandeln, gar nicht verschieden, wie der Augenschein lehrt.

Digitized by Google

Berichtigungen zu dem Aufsatze Nr. VIII. des Herrn Koutny in Brünn in diesem Hefte.

S. 51. letzte Zeile: Hinter der letzten grossen Klammer] fehlt eine erhöhete 2 (Quadrat) und ist also zu setzen $]^2$.

S. 56. Z. 5. v. o. statt p im Zähler des ersten Bruchs s. m. p^2.

S. 58. Z. 23. v. o. statt „Letzteren“ s. m. „letzteren.“

S. 59. Z. 11. v. o. statt $\frac{q^2}{a^2-b^2}$ s. m. $\frac{q^2c^2}{a^2-b^2}$.

S. 61. Z. 5. v. u. statt „Letzteren“ s. m. „letzteren.“

S. 62. Z. 3. v. u. statt $\frac{Bp}{b^2}$ s. m. $\frac{Bq}{b^2}$.

S. 63. Z. 7. v. u. statt $\frac{r^2}{c^3}$ s. m. $\frac{r^2}{c^4}$.

S. 65. Z. 5. v. u. Die Nummer (17) gehört zur vorhergehenden Gleichung $\frac{\varphi^2}{\varphi^2-1}=$ etc. in Z. 7. v. u.

S. 68. Z. 9. v. o. statt „$-\varphi^2$“ s. m. „$=\varphi^2$.“

S. 68. Z. 8. v. u. Im Nenner des grossen Bruchs am Ende desselben s. m. „$a^2\varepsilon_2^4$“ an die Stelle von „$a^2\varepsilon_1^4$.“

S. 69. Z. 8. v. o. In dem Nenner des grossen Bruchs zu Anfange desselben s. m. „$\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2$“ statt „$c^2\varepsilon_1^2\varepsilon_2^2$“; man tilge also c^2.

S. 74. Z. 8. v. u. statt „dem Ellipsoide“ s. m. „der Kugel.“

S. 76. Z. 7. v. o. statt „in vertikalen Diametralebenen“ s. m. „in der vertikalen Diametralebene.“

S. 76. Z. 8. v. o. statt „$O''C'$“ s. m. „$O''C''$.“

S. 76. Z. 18. v. o. statt „Radius“ s. m. „Durchmesser.“

S. 76. Z. 20. v. o. statt „benutzen“ s. m. „benützen.“

S. 77. Z. 15. v. o. statt „parallel $\gamma\varepsilon_1$“ s. m. „parallel zu $\gamma\varepsilon_1$.“

S. 78. Z. 7. v. u. statt „ebenfalls“ s. m. „allenfalls.“

S. 78. Z. 5. v. u. statt „Benutzung“ s. m. „Benützung.“

S. 78. Z. 3. v. u. statt p s. m. P.

S. 79. Z. 4. v. o. statt p s. m. P.

Auf der Figurentafel IV. fehlt in der Figur auf der linken Seite der unteren Hälfte an den Durchschnittspunkten der Linien $O'G$ und $O'F$ mit der äussersten elliptischen Umfangslinie der Buchstabe r.

Diese im Archiv sonst ganz ungewöhnliche grössere Anzahl von Berichtigungen, welche übrigens bei Weitem dem grössten Theile nach nicht auf Rechnung der Druckerei und des Correctors kommt, ist leider entstanden, weil wegen der durch den Krieg, während welches der betreffende Aufsatz gedruckt wurde, eine Zeit lang völlig unterbrochenen Communication — in Folge eingezogener Nachrichten — eine letzte Correctur nach Brünn sicher zu senden ganz unmöglich war. G.

Digitized by Google

X.

Auf das Entfernungsorts - Dreieck Bezügliches

Von

Herrn Professor Dr. *H. Emsmann*

an der Realschule I. Ordnung in Stettin.

---

1. In dem Programme der Königl. Landesschule Pforta vom 21. Mai 1851 behandelt mein innig verehrter Lehrer, der 1855 verstorbene Professor Carl Friedr. Andr. Jacobi, die Entfernungsörter geradliniger Dreiecke. Erst seit 1858 erhält unsere Anstalt regelmässig die Programme der Gymnasien. Es war mir daher das eben näher bezeichnete Programm nicht bekannt, als ich auf den im Archiv Theil XLV. S. 353. abgedruckten Satz kam: „Schlägt man mit jeder Dreiecksseite um ihre Endpunkte Kreise und verbindet die Durchschnittspunkte, in welchen die mit derselben Seite geschlagenen Kreise die an dem jedesmaligen Centrum anliegende Seite schneiden, so laufen die drei Verbindungsstrecken unter sich parallel.“

Dieser Satz war mir neu, und daher hielt ich ihn der Mittheilung nicht unwerth. Durch meinen Bruder, den Oberlehrer Dr. G. Emsmann an der Realschule I. Ordnung zu Frankfurt a. d. O., bin ich indessen darauf aufmerksam gemacht worden, dass derselbe Satz von Jacobi in dem bezeichneten Programme bereits ausgesprochen sei. Die Sache ist richtig, und bedaure ich nur, dass ich die schöne Arbeit des Mannes, dem ich gerade soviel verdanke, nicht früher gekannt habe.

Gleichwohl wage ich es noch neben Jacobi's Abhandlung mit den folgenden Zeilen aufzutreten. Der von mir unabhängig

gefundene Satz hatte mein Interesse noch anderweitig in Anspruch genommen und mich zum Theil zu Resultaten geführt, welche ich in Jacobi's Programme nicht finde. Einige dieser Resultate mitzutheilen, ist meine Absicht.

2. Es scheint mir nöthig, den von Jacobi genommenen Gang wenigstens in den Hauptzügen anzugeben.

a) Die Untersuchung geht unter Nr. 4. von dem Beweise des folgenden Lehrsatzes aus:

> „Nimmt man auf zwei Dreiecksseiten und zwar von ihren nicht gemeinschaftlichen Endpunkten aus Segmente von gleicher Grösse mit der dritten Seite, so ist die durch die beiden auf jenen ersten Seiten erhaltenen Punkte bestimmte Gerade in ihrer unbegrenzten Länge der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, für welche das Aggregat ihrer Entfernungen von den Dreiecksseiten eine unveränderliche Grösse bildet."

Eine solche Gerade nennt Jacobi einen Entfernungsort.

Ist Dreieck ABC gegeben und AE auf $AC = AB$, ebenso BD auf BC auch gleich AB, so ist die durch D und E gelegte Gerade der Entfernungsort für die Seite c. Fällt man von irgend einem Punkte N dieses Entfernungsortes auf a die Normale NK, ebenso NL auf b und NO auf c, so ist:

$$NK + NL + NO = \frac{2.ABDE}{c}.$$

Zweckmässig unterscheidet Jacobi bei jeder Dreiecksseite eine innere und eine äussere Flanke, von deren jene den beiden anderen Seiten zugewendet, diese hingegen ihnen abgewendet ist. Unter Nr. 5. wird dann die Regel aufgestellt, dass jede Normale additiv ist, deren zugehörige (auf ihr normal stehende) Seite den Punkt N auf ihrer inneren Flanke hat, subtractiv im entgegengesetzten Falle.

b) Den obigen Lehrsatz a) verallgemeinert Jacobi unter Nr. 8. durch den Nachweis des folgenden:

> „Nimmt man auf zwei Dreiecksseiten von ihren nicht gemeinschaftlichen Endpunkten aus Segmente von gleicher Grösse mit der dritten Seite und zieht von einem beliebigen Punkte

Digitized by Google

N der durch diese beiden Punkte bestimmten Geraden nach den einzelnen Seiten des Dreiecks Linien unter einerlei Winkel, so ist das Aggregat derselben eine unveränderliche von der besonderen Lage des Punktes *N* unabhängige Länge."

c) Hierauf weist Jacobi unter Nr. 9. nach, dass, wenn man die drei Entfernungsörter des Dreiecks construirt, dieselben unter einander parallel sind.

d) Hiermit im Zusammenhange steht der unter Nr. 27. erwiesene Lehrsatz:

„Verlängert man von drei äusseren Winkelhalbirenden eines ungleichseitigen Dreiecks jede bis zum Durchschnitt mit der Gegenseite der Ecke, durch welche sie hindurchgeht, so liegen diese drei Punkte in gerader Linie und zwar ist dieselbe den Entfernungsörtern des Dreiecks parallel."

e) Ohne weiter auf den Inhalt des 72 Nummern auf 50 Quartseiten nebst zwei — 16 Figuren enthaltenden — Tafeln umfassenden Programmes einzugehen, erlaube ich mir nur noch diejenigen Leser des Archivs, welchen Jacobi's Abhandlung zugänglich ist, besonders auf dieselbe aufmerksam zu machen.

3. Der Jacobi'sche Satz (2. a)), wiewohl schon verallgemeinert (2. b)), ist einer noch grösseren Verallgemeinerung fähig. Nämlich:

„Nimmt man auf zwei Dreiecksseiten von ihren nicht gemeinschaftlichen Endpunkten aus Segmente, welche einem beliebigen — also dem *q*ten — Theile der dritten Seite gleich sind, und zieht von einem beliebigen Punkte *N* der durch diese beiden Punkte bestimmten Geraden nach den einzelnen Seiten des Dreiecks Linien unter einerlei Winkel; so ist das Aggregat aus der Strecke nach der Dreieckseite, von welcher nicht abgeschnitten wurde, und dem *q*ten Theile derjenigen, welche nach den beiden anderen Seiten, auf welchen abgeschnitten wurde, gezogen sind, eine unveränderliche von der besonderen Lage des Punktes *N* unabhängige Länge.

Digitized by Google

Hierbei gilt in Bezug auf das Rechnungszeichen die (unter 2. a)) oben angegebene Regel. — Ist $q = 1$, so erhält man den von Jacobi unter seiner Nr. 8 (s. o. 2. b)) aufgestellten Satz, und ist $q = 1$ und der Winkel φ, unter welchem die Strecken nach den Seiten gezogen sind, $= 90^0$, so ist das Resultat der Satz, welchen Jacobi als Ausgangspunkt für seine Untersuchung genommen hat.

Anmerkung. Ist in Taf. V. Fig. 1. im Dreiecke ABC die Strecke $AE = BD = q \,.\, AB$, und sind von dem beliebigen Punkte N auf der durch D und E gelegten Geraden die Strecken NK' nach a, NL' nach b und NO' nach c so gezogen, dass $\angle NK'C = \angle NL'A = \angle NO'B = \varphi$ ist, so fälle man noch die Normalen NK auf a, NL auf b und NO auf c. Es ist dann:

$$\Delta BND = \tfrac{1}{2} BD.KN = \tfrac{1}{2} BD.NK'.\sin\varphi = \tfrac{1}{2} qcNK'.\sin\varphi,$$

ebenso:

$$\Delta ANE = \tfrac{1}{2} AE.NL = \tfrac{1}{2} AE.NL'.\sin\varphi = \tfrac{1}{2} qcNL'.\sin\varphi,$$

desgleichen:

$$\Delta ANB = \tfrac{1}{2} AB.NO = \tfrac{1}{2} AB.NO'.\sin\varphi = \tfrac{1}{2} cNO'.\sin\varphi.$$

Nun ist:

$$\Delta ANB + \Delta ANE - \Delta BND = \text{Viereck } AEDB = V,$$

also stets:

$$\frac{2V}{c\sin\varphi} = NO' + q.NL' - q.NK'.$$

Zusatz. Nimmt man auf b und c von ihren nicht gemeinschaftlichen Endpunkten Segmente $= qa$, auf a und c Segmente $= qb$ und auf a und b Segmente $= qc$ und bezeichnet den Punkt N auf den bezüglichen Entfernungsörtern mit N_a, N_b, N_c, ebenso das bezügliche Viereck mit V_a, V_b und V_c, so ist:

$$\frac{2V_a}{a} = (N_aK' + qN_aL' + qN_aO')\sin\varphi,$$

$$\frac{2V_b}{b} = (qN_bK' + N_bL' + qN_bO')\sin\varphi,$$

$$\frac{2V_c}{c} = (qN_cK' + qN_cL' + N_cO')\sin\varphi;$$

und für $\varphi = 90^0$:

Digitized by Google

$$\frac{2V_a}{a} = N_aK + qN_aL + qN_aO,$$

$$\frac{2V_b}{b} = qN_bK + N_bL + qN_bO,$$

$$\frac{2V_c}{c} = qN_cK + qN_cL + N_cO;$$

wobei in Betreff des Rechnungszeichens die unter 2. a) angegebene Regel gilt.

4. Während Jacobi vorzugsweise die Beziehungen der Aggregate dieser Entfernungen und zwar nur unter den Beschränkungen, welche sein nur für $q = 1$ geltender Satz ihm auferlegt, untersucht, habe ich besonders die drei Entfernungsortsstrecken (worunter ich nicht die unbegrenzten Geraden, welche durch die Theilpunkte gehen, sondern nur die durch diese Theilpunkte bestimmten Strecken verstehe) und die Beziehungen der Theilpunkte selbst ins Auge gefasst. Das Folgende bezieht sich hierauf. Dass dabei sich allerdings auch bereits von Jacobi für seinen speciellen Fall Gefundenes als Resultat ergiebt, versteht sich von selbst.

5. Construirt man in einem ungleichseitigen Dreiecke ABC, in welchem $a > b > c$ ist, die drei Entfernungsortsstrecken und ist BJ auf $c = CH$ auf $b = qa$, ebenso CF auf $a = AG$ auf $c = qb$, desgleichen AE auf $b = BD$ auf $a = qc$; so entstehen die Kreisvierecke $ADCJ$, $AHFB$ und $CEGB$. (Taf. V. Fig. 2. für $q = \frac{2}{3}$, und (Taf. V. Fig. 3. für $q = 1$.).

Beweis.

Es ist:

$$qa.c = qc.a, \text{ also } BJ.AB = BD.BC;$$
$$qb.a = qa.b, \text{ also } CF.BC = CH.AC;$$
$$qc.b = qb.c, \text{ also } AE.AC = AG.AB.$$

Zusatz. Für $q = 1$ versteht sich dies sofort, da diese Vierecke sich dann als Abschnitte eines gleichschenkligen Dreieckes herausstellen, in welchem die gleichen Seiten parallel mit der Basis geschnitten sind.

6. Verbindet man die Durchschnittspunkte auf zwei Seiten, welche von ihrem gemeinschaftlichen Endpunkte aus erhalten worden sind, so erhält man drei unter sich congruente Dreiecke,

Digitized by Google

welche im Allgemeinen dem Urdreiecke ähnlich, aber für $q = 1$ auch mit diesem congruent sind.

Es sind (Taf. V. Fig. 2. und Taf. V. Fig. 3.) die betreffenden Dreiecke AEG, BJD und CFH. Es ergiebt sich dies aus den Kreisvierecken (5.), weil $\angle BDJ = \angle CFH = A$, $\angle CHF = \angle AEG = B$ und $\angle AGE = \angle BJD = C$; folgt aber auch schon aus dem gleichen Verhältnisse, respective für $q = 1$ aus der Gleichheit, zweier Seiten und der Gleichheit des eingeschlossenen Winkels in Bezug auf das Urdreieck.

Es ist also allgemein:

$$\Delta AEG \cong \Delta BJD \cong \Delta CFH, \text{ aber nur} \sim \Delta ABC,$$

und

$$EG = qa, \quad DJ = qb \text{ und } FH = qc;$$

aber für $q = 1$:

$$\Delta AEG \cong \Delta BJD \cong \Delta CFH \cong \Delta ABC$$

und

$$EG = a, \; DJ = b \text{ und } FH = c.$$

7. Verbindet man die Durchschnittspunkte auf zwei Seiten, welche von ihrem gemeinschaftlichen Endpunkte aus erhalten worden sind, so entstehen durch den gegenseitigen Durchschnitt drei gleichschenkelige Dreiecke, von denen je eines die Strecke zur Grundseite hat, welche zwischen den auf derselben Seite des Urdreiecks abgetragenen Theilpunkten liegt.

In Taf. V. Fig. 2. und Taf. V. Fig. 3. sind die betreffenden Durchschnittspunkte K von FH und DJ; L von FH und GE; M von DJ und GE. — Dass $DK = FK$, $HL = LE$ und $JM = GM$ ist, folgt unmittelbar aus 6.

8. Die **Spitzen der drei gleichschenkligen Dreiecke** (7.) bilden ein Dreieck, dessen Seiten sich verhalten wie die Sinus der doppelten Winkel des Urdreiecks.

B e w e i s.

In den gleichschenkeligen Dreiecken ist der Basiswinkel entweder gleich einem Winkel des Urdreiecks oder gleich dem Nebenwinkel eines solchen, folglich der Winkel an der Spitze entweder $= 180^\circ - 2A$ oder $= 180^\circ - 2B$ oder $= 180^\circ - 2C$, oder $= 180^\circ - 2(180^\circ - A) = 2A - 180^\circ$ oder $= 2B - 180^\circ$ oder $= 2C - 180^\circ$. Es ist aber $\sin(180^\circ - 2A) = \sin 2A$ u. s. w., und wenn $2A > 180^\circ$ ist, $\sin(2A - 180^\circ) = -\sin 2A$ u. s. w., in welchem Falle

Digitized by Google

der Werth jedoch ebenfalls positiv wird, da $\sin 2A$ an sich negativ ist. Die Winkel des Dreiecks KLM sind aber entweder die Winkel an der Spitze der gleichschenkeligen Dreiecke selbst oder deren Nebenwinkel.

Zusatz 1. Ist das Urdreieck rechtwinkelig, so laufen zwei Seiten des Dreiecks KLM parallel. Das Dreieck ist also unendlich lang.

Zusatz 2. Ist das Urdreieck gleichschenkelig, so ist es auch ΔKLM.

Zusatz 3. Ist das Urdreieck gleichseitig, so ist es auch ΔKLM.

9. Fällt man von den Spitzen der gleichschenkeligen Dreiecke (7.) auf die zugehörigen Grundseiten die Normalen KN, LO und MP (Taf. V. Fig. 2.), so werden die Grundseiten bekanntlich halbirt und es ergiebt sich allgemein:

a)
$$KN = -\tfrac{1}{2}DF.\text{tgs}A,$$
$$LO = \tfrac{1}{2}HE.\text{tgs}B,$$
$$MP = \tfrac{1}{2}GJ.\text{tgs}C.$$

Da nun:

b)
$$-DF = -a + qb + qc,$$
$$HE = qa - b + qc,$$
$$GJ = qa + qb - c$$

ist, so folgt aus a):

$$KN = \tfrac{1}{2}(-a + qb + qc)\text{tgs}A,$$
$$LO = \tfrac{1}{2}(qa - b + qc)\text{tgs}B,$$
$$MP = \tfrac{1}{2}(qa + qb - c)\text{tgs}C.$$

c) Folglich ist für $q = 1$ (Taf. V. Fig. 3.):

$$KN = \tfrac{1}{2}DF.\text{tgs}A = \tfrac{1}{2}(-a + b + c)\text{tgs}A,$$
$$LO = \tfrac{1}{2}HE.\text{tgs}B = \tfrac{1}{2}(a - b + c)\text{tgs}B,$$
$$MP = \tfrac{1}{2}GJ.\text{tgs}C = \tfrac{1}{2}(a + b - c)\text{tgs}C.$$

d) Construirt man in das ΔABC (Taf. V. Fig. 3.) den eingeschriebenen Kreis und bezeichnet den Abstand der Dreiecksspitze A von dem Berührungspunkte mit x, ebenso den der Dreiecksspitze B mit y und den der Dreiecksspitze C mit z, so ist bekanntlich:

$$-a + b + c = 2x, \text{ also } = DF,$$
$$a - b + c = 2y, \text{ also } = HE,$$
$$a + b - c = 2z, \text{ also } = GJ.$$

Digitized by Google

Folglich sind für $q = 1$ die Strecken, welche zwischen den auf derselben Seite des Urdreiecks abgetragenen Theilpunkten liegen, doppelt so gross als der Abstand des Berührungspunktes des in das Urdreieck eingeschriebenen Kreises von der Dreiecksspitze, welche der betreffenden Seite gegenüberliegt.

e) Ist r der Radius des eingeschriebenen Kreises, so ist bekanntlich:

$$x = r.\text{ctg}\,\tfrac{1}{2}A,\ y = r.\text{ctg}\,\tfrac{1}{2}B,\ z = r.\text{ctg}\,\tfrac{1}{2}C;$$

also ist:

$$DF.HE.GJ = 8r^3\text{ctg}\,\tfrac{1}{2}A.\text{ctg}\,\tfrac{1}{2}B.\text{ctg}\,\tfrac{1}{2}C$$
$$= 8r^3(\text{ctg}\,\tfrac{1}{2}A + \text{ctg}\,\tfrac{1}{2}B + \text{ctg}\,\tfrac{1}{2}C).$$

f) Es ist aber auch für $q = 1$ (Taf. V. Fig. 3.) $BN = BF + \tfrac{1}{2}DF = a - b + \tfrac{1}{2}(-a + b + c) = \tfrac{1}{2}(a - b + c)$ und $CN = \tfrac{1}{2}(a + b - c)$; ebenso $AP = AG - \tfrac{1}{2}GJ = \tfrac{1}{2}(-a + b + c)$ und $BP = \tfrac{1}{2}(a - b + c)$; desgleichen $CO = AE - \tfrac{1}{2}HE = \tfrac{1}{2}(a + b - c)$ und $AO = \tfrac{1}{2}(-a + b + c)$; folglich treffen die Höhen der gleichschenkeligen Dreiecke (für $q = 1$) in die Berührungspunkte des Kreises, welcher in das Urdreieck eingeschrieben ist.

g) Es ist also (nach c)) für $q = 1$, wie allerdings auch schon aus d) folgt:

$$KN = x.\text{tgs}A,$$
$$LO = y.\text{tgs}B,$$
$$MP = z.\text{tgs}C;$$

d. h. die Höhen der drei gleichschenkeligen Dreiecke sind, wenn man die ganzen Dreiecksseiten selbst abgetragen hat, gleich den Normalen, welche man in den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kreises auf einer der beiden Seiten, auf welchen die Grundseite des betreffenden gleichschenkeligen Dreiecks nicht liegt, errichtet und bis zum Durchschnitte mit der anderen Seite verlängert. Es ist also in Taf. V. Fig. 3.:

$$KN = PX' = OX'';\ LO = NY' = PY'';\ MP = OZ' = NZ''.$$

h) Aus f) folgt, dass für $q = 1$ die Höhen der gleichschenkeligen Dreiecke sich in dem Mittelpunkte des Kreises schneiden, welcher in das Urdreieck eingeschrieben ist.

i) Hieraus folgt, dass man den Mittelpunkt des in ein Dreieck eingeschriebenen Kreises finden kann, wenn man auf zwei Dreiecksseiten die beiden anliegenden abschneidet, die zwischen den beiden Theilpunkten liegende Strecke halbirt und in den so

Digitized by Google

erhaltenen beiden Punkten auf den betreffenden Seiten Normalen errichtet. Der Durchschnittspunkt der beiden Normalen ist der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises und jede Normale selbst der Halbmesser desselben.

10. Diese für $q = 1$ so einfachen Beziehungen sind offenbar nur Specialitäten der allgemeinen Werthe für ein beliebiges q. Es fragt sich nun, welches diese allgemeinen Werthe sind und welche Bedeutung dieselben haben.

Zunächst ist (Taf. V. Fig. 2.) allgemein:

$$AP = \tfrac{1}{2}(-qa + qb + c) = \tfrac{1}{2}(-a + b + c) + \frac{1-q}{2}(a-b),$$

$$AO = \tfrac{1}{2}(-qa + b + qc) = \tfrac{1}{2}(-a + b + c) + \frac{1-q}{2}(a-c),$$

$$BN = \tfrac{1}{2}(a - qb + qc) = \tfrac{1}{2}(a - b + c) + \frac{1-q}{2}(b-c),$$

$$BP = \tfrac{1}{2}(qa - qb + c) = \tfrac{1}{2}(a - b + c) + \frac{1-q}{2}(b-a),$$

$$CO = \tfrac{1}{2}(qa + b - qc) = \tfrac{1}{2}(a + b - c) + \frac{1-q}{2}(c-a),$$

$$CN = \tfrac{1}{2}(a + qb - qc) = \tfrac{1}{2}(a + b - c) + \frac{1-q}{2}(c-b).$$

Es fallen also die Punkte N, O und P mit den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kreises zusammen, wenn $q = 1$ ist, da man dann die unter f) aufgestellten Werthe und $AP = AO$, $BN = BP$, $CO = CN$ erhält. Ausserdem ist dies der Fall, wenn das Dreieck gleichseitig ist, für jeden Werth von q. Bei dem gleichschenkeligen Dreiecke gilt dasselbe nur für den auf der Grundseite liegenden Punkt. Im Allgemeinen liegen die Fusspunkte der Normalen abweichend von den Berührungspunkten des eingeschriebenen Kreises und zwar um $\frac{1-q}{2}$ von der Differenz der Seite, welche der Dreiecksspitze gegenüber liegt, von welcher aus, und derjenigen, welche der Dreiecksspitze gegenüber liegt, nach welcher hin der Abstand genommen wird. Diese Grösse ist additiv zu nehmen, wenn jene Seite die grössere, aber subtractiv, wenn sie die kleinere ist.

11. Es ist:

Digitized by Google

$$\tfrac{1}{2}(-a+qb+qc)=\tfrac{1}{2}(-a+b+c)-\frac{1-q}{2}(b+c),$$

$$\tfrac{1}{2}(qa-b+qc)=\tfrac{1}{2}(a-b+c)-\frac{1-q}{2}(a+c),$$

$$\tfrac{1}{2}(qa+qb-c)=\tfrac{1}{2}(a+b-c)-\frac{1-q}{2}(a+b);$$

folglich sind die allgemeinen Werthe, welche in 9. b) für die Höhen der gleichschenkeligen Dreiecke aufgestellt sind:

$$KN=\tfrac{1}{2}(-a+qb+qc)\operatorname{tgs}A=[\tfrac{1}{2}(-a+b+c)-\frac{1-q}{2}(b+c)]\operatorname{tgs}A,$$

$$LO=\tfrac{1}{2}(qa-b+qc)\operatorname{tgs}B=[\tfrac{1}{2}(a-b+c)-\frac{1-q}{2}(a+c)]\operatorname{tgs}B,$$

$$MP=\tfrac{1}{2}(qa+qb-c)\operatorname{tgs}C=[\tfrac{1}{2}(a+b-c)-\frac{1-q}{2}(a+b)]\operatorname{tgs}C.$$

Um also den allgemeinen Ausdruck, welcher dem unter 9. g) für $q=1$ gefundenen entspricht, zu erhalten, muss man den Abstand des Berührungspunktes des eingeschriebenen Kreises von der betreffenden Dreiecksspitze um $\frac{1-q}{2}$ der Summe aus den beiden die Winkelspitze einschliessenden Seiten von der Berührungsstelle aus verringern und in diesen Endpunkten Normalen bis zum Durchschnitte mit der anderen Seite errichten.

12. 9. b) führt verallgemeinert auf folgendes Ergebniss:

Nimmt man auf jeder Dreiecksseite zwei Segmente, von denen jedes gleich dem $q$ten Theile der anliegenden Seite ist und zwar von dem mit der anliegenden Seite gemeinschaftlichen Endpunkte aus, so schneiden sich die in den Halbirungspunkten der Strecken, welche durch die auf derselben Seite liegenden Theilpunkte bestimmt sind, errichteten drei Normalen in einem Punkte.

Ist in Taf. V. Fig. 4. ($q=\frac{3}{5}$) $BD=AE=qc$; $CF=AG=qb$; $BJ=CH=qa$; ferner $DN=FN$, $EO=HO$, $GP=JP$; endlich $NZ''Y'$ normal auf DF, ebenso $Z'OX''$ auf EH, desgleichen $X'PY''$ auf GJ: so schneiden sich diese letzteren in R.

B e w e i s.

Es schneiden sich zunächst zwei dieser Normalen z. B. PY'' und NZ'' in R. Fällt man nun von diesem Durchschnittspunkte eine Normale auf AC und trifft diese AC in O', so ist — wenn

Digitized by Google

man von O' eine Normale auf PR fällt, wegen $\angle PRO' = 180^0 - A$, und wenn man ebenso von O' auf NR eine Normale fällt, wegen $\angle NRO' = C -$:

$$RO' = \frac{AP - AO'.\cos A}{\sin A} = \frac{NC - CO'.\cos C}{\sin C}.$$

Folglich ist:

$$[AP - (b - CO')\cos A]\sin C = (NC - CO'.\cos C)\sin A,$$

folglich:

$$CO'.(\sin A\cos C + \cos A\sin C) = NC.\sin A - AP.\sin C + b\cos A\sin C$$

also:

$$CO' = \frac{NC.\sin A - AP.\sin C + b\cos A\sin C}{\sin B}.$$

Setzt man nun $\sin A = \frac{1}{2bc}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$ und ebenso für $\sin B$ und $\sin C$ die entsprechenden Werthe, so wird:

$$CO' = \frac{2a.NC - 2c.AP + 2bc\cos A}{2b}.$$

Da aber $2bc\cos A = b^2 + c^2 - a^2$ ist, ferner $AP = \frac{1}{2}(-qa + qb + c)$ und $CN = \frac{1}{2}(a + qb - qc)$, so erhält man:

$$CO' = \frac{b^2 - qbc + qab}{2b} = \tfrac{1}{2}(qa + b - qc).$$

Eine Normale auf AC von R, dem Durchschnittspunkte der Normalen PY'' und NZ'', trifft also AC so, dass der Abstand von $C = \frac{1}{2}(qa + b - qc)$, also von $A = \frac{1}{2}(-qa + b + qc)$ ist, folglich geht eine im Punkte O auf AC errichtete Normale, da für diese nach der Annahme $CO = \frac{1}{2}(qa + b - qc)$ und $AO = \frac{1}{2}(-qa + b + qc)$ sein soll, in denselben Punkt R, in welchem sich die beiden anderen Normalen, die in N und P errichtet sind, schneiden.

Zusatz 1. Dieser Punkt R wird für $q = 1$ der Mittelpunkt des in das Urdreieck eingeschriebenen Kreises (s. 9.). Würde man in dem vorhergehenden Beweise $q = 1$ annehmen, so erhielte man, da $AP = \frac{1}{2}(-a + b + c)$ und $CN = \frac{1}{2}(a + b - c)$ wird, $CO' = \frac{1}{2}(a + b - c)$, also $= CN$, und $AO' = \frac{1}{2}(-a + b + c)$, also $= AP$, d. h. die Berührungspunkte des eingeschriebenen Kreises.

Zusatz 2. Die Normalen KN, LO und PM sind Transver-

Digitized by Google

salen des Dreiecks KLM, welche die Winkel, respective die Aussenwinkel desselben halbiren, da sie von den Spitzen der gleichschenkeligen Dreiecke auf deren Grundseiten gefällt sind. Folglich ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt R der Mittelpunkt eines Berührungskreises des Dreiecks KLM und zwar des inneren, wenn R innerhalb des Dreiecks liegt, oder eines äusseren, wenn R ausserhalb seine Stelle hat.

Zusatz 3. Für $q=1$ wird R Mittelpunkt 1) des in ΔABC eingeschriebenen Kreises; 2) des in ΔKLM eingeschriebenen; 3) da (Taf. V. Fig. 3.) wegen $KN=PX'=OX''$ auch $KR=RX'=RX''$ wird, des um $\Delta KX'X''$ beschriebenen; ebenso 4) des um $\Delta LY'Y''$ und 5) des um $\Delta MZ'Z''$ beschriebenen, da $RL=RY'=RY''$ ist wegen $LO=NY'=PY''$ und $RM=RZ'=RZ''$ wegen $MP=OZ'=NZ''$.

Zusatz 4. Der Abstand des Punktes R von einer Dreiecksseite ist gleich der Summe aus dem $q$ten Theile des Abstandes des Mittelpunktes des eingeschriebenen Kreises (also qr) und dem $(1-q)$ten Theile des Abstandes des Mittelpunkts des umschriebenen Kreises von derselben Seite.

Es ist nämlich:

$$RN=\frac{BP-BN.\cos B}{\sin B}=\frac{CO-CN.\cos C}{\sin C},$$

$$RO=\frac{NC-CO.\cos C}{\sin C}=\frac{AP-AO.\cos A}{\sin A},$$

$$RP=\frac{AO-AP.\cos A}{\sin A}=\frac{BN-BP.\cos B}{\sin B} \text{ (s. in 12.)};$$

also mit Berücksichtigung von 10. und weil $a=b\cos C+c\cos B$ u.s.w.

$$RN=\frac{(a-b+c)(1-\cos B)-(1-q)b(\cos B+\cos C-1)}{2\sin B}$$

$$=\frac{(a+b-c)(1-\cos C)-(1-q)c(\cos B+\cos C-1)}{2\sin C}$$

$$=\tfrac{1}{2}(a-b+c)\operatorname{tgs}\tfrac{1}{2}B-\frac{(1-q)b(\cos B+\cos C-1)}{2\sin B}$$

$$=\tfrac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{tgs}\tfrac{1}{2}C-\frac{(1-q)c(\cos B+\cos C-1)}{2\sin C}.$$

Aehnliche Werthe ergeben sich für RO und RP; da aber

$$r=\tfrac{1}{2}(-a+b+c)\operatorname{tgs}\tfrac{1}{2}A=\tfrac{1}{2}(a-b+c)\operatorname{tgs}\tfrac{1}{2}B=\tfrac{1}{2}(a+b-c)\operatorname{tgs}\tfrac{1}{2}C$$

Digitized by Google

und $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{1}{R}$ ist, so erhält man:

$$RN = r - \frac{(1-q)(\cos B + \cos C - 1)a}{2\sin A} = r - \frac{(1-q)(r - R\cos A)a}{2R.\sin A}$$

$$= r - (1-q)(r - R.\cos A) \quad (\text{da } 2R\sin A = a \text{ ist})$$

$$= qr + (1-q)R\cos A.$$

Ebenso:

$$RO = qr + (1-q)R.\cos B$$

und

$$RP = qr + (1-q)R.\cos C.$$

Es ist aber $R.\cos A$ der Abstand des Mittelpunktes des umschriebenen Kreises von a, ebenso $R.\cos B$ von b und $R.\cos C$ von c; bezeichnet man diese mit R_a, R_b und R_c, so ist also:

$$RN = qr + (1-q)R_a;\quad RO = qr + (1-q)R_b;\quad RP = qr + (1-q)R_c.$$

Anmerkung. Wegen des Abstandes des Punktes R von den Seiten des ΔKLM vergl. Zusatz 2.

13. Das Product aus den 3 Höhen der gleichschenkeligen Dreiecke 9. b) ist im Allgemeinen:

$$KN.LO.MP = \tfrac{1}{8}(-a+qb+qc)(qa-b+qc)(qa+qb-c)\text{tgs}A.\text{tgs}B.\text{tgs}C$$

$$= \tfrac{1}{8}(-a+qb+qc)(qa-b+qc)(qa+qb-c)(\text{tgs}A+\text{tgs}B+\text{tgs}C).$$

Hieraus ergeben sich für $q = 1$ mehrere einfache Formeln:

a) $KN.LO.MP = \tfrac{1}{8}(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)\text{tgs}A.\text{tgs}B.\text{tgs}C$

$$= \tfrac{1}{8}(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(\text{tgs}A+\text{tgs}B+\text{tgs}C).$$

Da

$$(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = 16\Delta^2$$

ist, so folgt:

b) $KN.LO.MP = \dfrac{2\Delta^2\text{tgs}A.\text{tgs}B.\text{tgs}C}{a+b+c} = \dfrac{2\Delta^2(\text{tgs}A+\text{tgs}B+\text{tgs}C)}{a+b+c}.$

Da $2\Delta = r(a+b+c)$ ist, wo r den Radius des eingeschriebenen Kreises bezeichnet, und $abc = 4R\Delta$ für R als Radius des umschriebenen Kreises, so folgt:

c) $KN.LO.MP = \Delta r.\text{tgs}A.\text{tgs}B.\text{tgs}C = \Delta r(\text{tgs}A + \text{tgs}B + \text{tgs}C)$

$$= \tfrac{1}{4}abc\frac{r}{R}\text{tgs}A.\text{tgs}B.\text{tgs}C = \tfrac{1}{4}abc\frac{r}{R}(\text{tgs}A+\text{tgs}B+\text{tgs}C).$$

Digitized by Google

also:

d) $KN.LO.MP:abc = r.\text{tgs}A.\text{tgs}B.\text{tgs}C:4R$
$= r.\sin A.\sin B.\sin C:4R.\cos A.\cos B.\cos C.$

14. Für die gleichen Seiten der gleichschenkeligen Dreiecke (9. b)) erhält man allgemein:

$$KD = \tfrac{1}{2}(-a+qb+qc)\sec A = [\tfrac{1}{2}(-a+b+c) - \frac{1-q}{2}(b+c)]\sec A;$$

$$LH = \tfrac{1}{2}(qa-b+qc)\sec B = [\tfrac{1}{2}(a-b+c) - \frac{1-q}{2}(a+c)]\sec B;$$

$$MG = \tfrac{1}{2}(qa+qb-c)\sec C = [\tfrac{1}{2}(a+b-c) - \frac{1-q}{2}(a+b)]\sec C.$$

Also ist:

$$KD.LH.MG$$
$$= \frac{(-a+qb+qc)(qa-b+qc)(qa+qb-c)}{8\cos A.\cos B.\cos C}$$
$$= -\frac{(-a+qb+qc)(qa-b+qc)(qa+qb-c)}{2(1+\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C)}$$
$$= \frac{(-a+qb+qc)(qa-b+qc)(qa+qb-c)}{8(\sin A.\sin B.\cos C+\sin A.\sin C.\cos B+\sin B.\sin C.\cos A-1)}.$$

Also für $q=1$:

$$KD.LH.MG = \frac{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{8\cos A.\cos B.\cos C}$$

u. s. w.

$$= \frac{2\Delta^2}{(a+b+c)\cos A.\cos B.\cos C}$$
$$= \frac{\Delta r}{\cos A.\cos B.\cos C} = \tfrac{1}{4}abc\,\frac{r}{R}\cdot\frac{1}{\cos A.\cos B.\cos C}$$

u. s. w.

Also:

$$KD.LH.MG:abc = r:4R.\cos A.\cos B.\cos C.$$

15. Die Entfernungsortsstrecken HJ, FG und DE haben im Allgemeinen folgende Werthe:

Digitized by Google

$$HJ^2 = AJ^2 + AH^2 + 2AJ.AH.\cos A$$
$$= (qa-c)^2 + (b-qa)^2 + 2(qa-c)(b-qa)\cos A$$
$$= a^2 - 2qa(-qa+b+c)(1-\cos A)$$
$$= a^2 - 4qa(-qa+b+c)\sin^2\tfrac{1}{2}A$$
$$= a^2 - \frac{qa}{bc}(-qa+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$$
$$= a^2 - \frac{qa}{bc}[(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)+(1-q)a(a-b+c)(a+b-c)]$$
$$= \frac{a^2b^2c^2 - qabc(-qa+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{b^2c^2}$$
$$= \frac{a}{bc}[abc - q(-qa+b+c)(a-b+c)(a+b-c)]$$
$$= \frac{(y+z)^2[(x+y)(x+z)(y+z)-4q(1-q)yz(y+z)-8qxyz]}{(x+y)(x+z)(y+z)} \text{(s. 9.d)).}$$

Ebenso:

$$FG^2 = b^2 - 2qb(a-qb+c)(1-\cos B)$$
$$= b^2 - 4qb(a-qb+c)\sin^2\tfrac{1}{2}B$$
$$= b^2 - \frac{qb}{ac}(a-qb+c)(-a+b+c)(a+b-c)$$
$$= \frac{a^2b^2c^2 - qabc(a-qb+c)(-a+b+c)(a+b-c)}{a^2c^2}$$
$$= \frac{b}{ac}[abc - q(-a+b+c)(a-qb+c)(a+b-c)]$$
$$= \frac{(x+z)^2[(x+y)(x+z)(y+z)-4q(1-q)xz(x+z)-8qxyz]}{(x+y)(x+z)(y+z)}.$$

Desgleichen:

$$DE^2 = c^2 - 2qc(a+b-qc)(1-\cos C)$$
$$= c^2 - 4qc(a+b-qc)\sin^2\tfrac{1}{2}C$$
$$= c^2 - \frac{qc}{ab}(a+b-qc)(-a+b+c)(a-b+c)$$
$$= \frac{a^2b^2c^2 - qabc(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-qc)}{a^2b^2}$$
$$= \frac{c}{ab}[abc - q(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-qc)]$$
$$= \frac{(x+y)^2[(x+y)(x+z)(y+z)-4q(1-q)xy(x+y)-8qxyz]}{(x+y)(x+z)(y+z)}.$$

Digitized by Google

Zusatz 1. Im Allgemeinen ist also:

$$HJ^2:FG^2 = a^2[abc-q(-qa+b+c)(a-b+c)(a+b-c)]$$
$$:b^2[abc-q(-a+b+c)(a-qb+c)(a+b-c)],$$

$$FG^2:DE^2 = b^2[abc-q(-a+b+c)(a-qb+c)(a+b-c)]$$
$$:c^2[abc-q(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-qc)],$$

$$DE^2:HJ^2 = c^2[abc-q(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-qc)]$$
$$:a^2[abc-q(-qa+b+c)(a-b+c)(a+b-c)].$$

Zusatz 2. Für $q=1$ ist daher:

$$HJ:FG:DE = a:b:c.$$

Zusatz 3. Speciell ergeben sich, wenn $q=1$ ist, folgende Werthe:

$$HJ^2 = a^2-2a(-a+b+c)(1-\cos A),$$
$$= a^2-4a(-a+b+c)\sin^2\tfrac{1}{2}A,$$
$$= a^2-\frac{a}{bc}(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$
$$= \frac{a^2b^2c^2-abc(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{b^2c^2},$$
$$= \frac{a}{bc}[abc-(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)],$$
$$= \frac{a}{bc}(abc-DF.HE.GJ) \quad \ldots \quad \text{(s. 9. d.)}$$
$$= a^2-\frac{16a\Delta^2}{bc(a+b+c)},$$
$$= a^2\left(1-\frac{4\Delta}{(a+b+c)R}\right),$$
$$= a^2\left(1-\frac{2r}{R}\right),$$
$$= \frac{4a}{bc}(R\Delta-2r^3\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}A.\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}B.\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C),$$
$$= \frac{4a}{bc}[R\Delta-2r^3(\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}A+\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}B+\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C)],$$
$$= \frac{a}{bc}(abc-8xyz),$$
$$= a^2-\frac{8xyz(y+z)}{(x+y)(x+z)},$$
$$= \frac{(y+z)^2[(x+y)(x+z)(y+z)-8xyz]}{(x+y)(x+z)(y+z)}.$$

Digitized by Google

Ebenso:

$$FG^2 = b^2-2b(a-b+c)(1-\cos B),$$
$$= b^2-4b(a-b+c)\sin^2\tfrac{1}{2}B,$$
$$= b^2-\frac{b}{ac}(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$
$$= \frac{a^2b^2c^2-abc(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a^2c^2},$$
$$= \frac{b}{ac}[abc-(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)],$$
$$= \frac{b}{ac}(abc-DF.HE.GJ),$$
$$= b^2-\frac{16b\Delta^2}{ac(a+b+c)},$$
$$= b^2(1-\frac{4\Delta}{(a+b+c)R}),$$
$$= b^2(1-\frac{2r}{R}),$$
$$= \frac{4b}{ac}(R\Delta-2r^3\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}A.\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}B.\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C),$$
$$= \frac{4b}{ac}[R\Delta-2r^3(\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}A+\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}B+\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C)],$$
$$= \frac{b}{ac}(abc-8xyz),$$
$$= b^2-\frac{8xyz(x+z)}{(x+y)(y+z)},$$
$$= \frac{(x+z)^2[(x+y)(x+z)(y+z)-(8xyz)]}{(x+y)(x+z)(y+z)}.$$

Dessgleichen:

$$DE^2 = c^2-2c(a+b-c)(1-\cos C),$$
$$= c^2-4c(a+b-c)\sin^2\tfrac{1}{2}C,$$
$$= c^2-\frac{c}{ab}(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$
$$= \frac{a^2b^2c^2-abc(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a^2b^2},$$
$$= \frac{c}{ab}[abc-(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)],$$
$$= \frac{c}{ab}(abc-DF.HE.GJ),$$

Zusatz 1. Im Allgemeinen ist also:

$$HJ^2:FG^2 = a^2[abc-q(-qa+b+c)(a-b+c)(a+b-c)]$$
$$:b^2[abc-q(-a+b+c)(a-qb+c)(a+b-c)],$$

$$FG^2:DE^2 = b^2[abc-q(-a+b+c)(a-qb+c)(a+b-c)]$$
$$:c^2[abc-q(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-qc)],$$

$$DE^2:HJ^2 = c^2[abc-q(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-qc)]$$
$$:a^2[abc-q(-qa+b+c)(a-b+c)(a+b-c)].$$

Zusatz 2. Für $q=1$ ist daher:

$$HJ:FG:DE = a:b:c.$$

Zusatz 3. Speciell ergeben sich, wenn $q=1$ ist, folgende Werthe:

$$HJ^2 = a^2-2a(-a+b+c)(1-\cos A),$$
$$= a^2-4a(-a+b+c)\sin^2\tfrac{1}{2}A,$$
$$= a^2-\frac{a}{bc}(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$
$$= \frac{a^2b^2c^2-abc(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{b^2c^2},$$
$$= \frac{a}{bc}[abc-(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)],$$
$$= \frac{a}{bc}(abc-DF.HE.GJ) \quad . \quad . \quad . \quad . \text{(s. 9. d.)}$$
$$= a^2-\frac{16a\Delta^2}{bc(a+b+c)},$$
$$= a^2\left(1-\frac{4\Delta}{(a+b+c)R}\right),$$
$$= a^2\left(1-\frac{2r}{R}\right),$$
$$= \frac{4a}{bc}(R\Delta-2r^3\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}A.\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}B.\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C),$$
$$= \frac{4a}{bc}[R\Delta-2r^3(\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}A+\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}B+\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C)],$$
$$= \frac{a}{bc}(abc-8xyz),$$
$$= a^2-\frac{8xyz(y+z)}{(x+y)(x+z)},$$
$$= \frac{(y+z)^2[(x+y)(x+z)(y+z)-8xyz]}{(x+y)(x+z)(y+z)}.$$

Digitized by Google

Ebenso:

$$FG^2 = b^2 - 2b(a-b+c)(1-\cos B),$$
$$= b^2 - 4b(a-b+c)\sin^2\tfrac{1}{2}B,$$
$$= b^2 - \frac{b}{ac}(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$
$$= \frac{a^2b^2c^2 - abc(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a^2c^2},$$
$$= \frac{b}{ac}[abc-(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)],$$
$$= \frac{b}{ac}(abc - DF.HE.GJ),$$
$$= b^2 - \frac{16b\Delta^2}{ac(a+b+c)},$$
$$= b^2\left(1 - \frac{4\Delta}{(a+b+c)R}\right),$$
$$= b^2\left(1 - \frac{2r}{R}\right),$$
$$= \frac{4b}{ac}(R\Delta - 2r^3 \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}A.\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}B.\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C),$$
$$= \frac{4b}{ac}[R\Delta - 2r^3(\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}A + \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}B + \operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C)],$$
$$= \frac{b}{ac}(abc - 8xyz),$$
$$= b^2 - \frac{8xyz(x+z)}{(x+y)(y+z)},$$
$$= \frac{(x+z)^2[(x+y)(x+z)(y+z) - (8xyz)]}{(x+y)(x+z)(y+z)}.$$

Dessgleichen:

$$DE^2 = c^2 - 2c(a+b-c)(1-\cos C),$$
$$= c^2 - 4c(a+b-c)\sin^2\tfrac{1}{2}C,$$
$$= c^2 - \frac{c}{ab}(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c),$$
$$= \frac{a^2b^2c^2 - abc(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{a^2b^2},$$
$$= \frac{c}{ab}[abc-(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)],$$
$$= \frac{c}{ab}(abc - DF.HE.GJ),$$

Digitized by Google

$$=c^2-\frac{16c\Delta^2}{ab(a+b+c)},$$

$$=c^2(1-\frac{4\Delta}{(a+b+c)R}),$$

$$=c^2(1-\frac{2r}{R}),$$

$$=\frac{4c}{ab}(R\Delta-2r^3\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}A.\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}B.\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C),$$

$$=\frac{4c}{ab}[R\Delta-2r^3(\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}A+\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}B+\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}C)],$$

$$=\frac{c}{ab}(abc-8xyz),$$

$$=c^2-\frac{8xyz(x+y)}{(x+z)(y+z)},$$

$$=\frac{(x+y)^2[(x+y)(x+z)(y+z)-8xyz]}{(x+y)(x+z)(y+z)}.$$

Zusatz 4. a) Ist $a>b>c$ und wird $qb+qc=a$, also $q=\frac{a}{b+c}$, so fallen D und F zusammen und es wird:

$$HJ^2=a^2-\frac{2a^2(a+b+c)(-a+b+c)(1-\cos A)}{(b+c)^2},$$

$$=a^2(1-\frac{16\Delta^2}{bc(b+c)^2})$$

u. s. w.

$$FG^2 \text{ oder } DG^2=b^2-\frac{2abc(a+b+c)(1-\cos B)}{(b+c)^2},$$

$$=b^2(1-\frac{16\Delta^2}{b(a-b+c)(b+c)^2}),$$

u. s. w.,

$$DE^2=c^2-\frac{2abc(a+b+c)(1-\cos C)}{(b+c)^2},$$

$$=c^2(1-\frac{16\Delta^2}{c(a+b-c)(b+c)^2}),$$

u. s. w.

b) Ist $a>b>c$ und $qc+qa=b$, also $q=\frac{b}{a+c}$, so fallen H und E zusammen und es wird:

Digitized by Google

$$HJ^2 = a^2 - \frac{2abc(a + b + c)(1-\cos A)}{(a+c)^2},$$

$$= a^2(1 - \frac{16\Delta^2}{a(-a+b+c)(a+c)^2});$$

$$FG^2 = b^2 - \frac{2b^2(a+b+c)(a-b+c)(1-\cos B)}{(a+c)^2},$$

$$= b^2(1 - \frac{16\Delta^2}{ac(a+c)^2});$$

$$DE^2 = c^2 - \frac{2abc(a+b+c)(1-\cos C)}{(a+c)^2},$$

$$= c^2(1 - \frac{16\Delta^2}{c(a+b-c)(a+c)^2}).$$

c) Ist $a > b > c$ und $qa + qb = c$, also $q = \frac{c}{a+b}$, so fallen J und G zusammen und man erhält:

$$HJ^2 = a^2 - \frac{2abc(a+b+c)(1-\cos A)}{(a+b)^2},$$

$$= a^2(1 - \frac{16\Delta^2}{a(-a+b+c)(a+b)^2});$$

$$FG^2 = b^2 - \frac{2abc(a+b+c)(1-\cos B)}{(a+b)^2},$$

$$= b^2(1 - \frac{16\Delta^2}{b(a-b+c)(a+b)^2});$$

$$DE^2 = c^2 - \frac{2c^2(a+b+c)(a+b-c)(1-\cos C)}{(a+b)^2},$$

$$= c^2(1 - \frac{16\,\Delta^2}{ab\,(a+b)^2}).$$

Es tritt dies z. B. ein bei Dreiecken mit folgenden Werthen:

a	b	c	$q = \frac{a}{b+c}$	$q = \frac{b}{a+c}$	$q = \frac{c}{a+b}$
4	3	2	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{7}$
5	4	2	$\frac{5}{6}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{9}$
5	4	3	$\frac{5}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
6	4	3	$\frac{6}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{3}{10}$
6	5	2	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{11}$
6	5	3	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{3}{11}$
6	5	4	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{11}$

Digitized by Google

16. Um die **Richtung der Entfernungsortsstrecken** zu ermitteln ist es wegen der Beziehungszeichen zweckmässig von dem Falle auszugehen, wo alle Theilpunkte auf den Seiten selbst liegen, also wo $c > qa$ ist, wenn $a > b > c$ angenommen wird.

Man erhält dann nach der Formel $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, und weil $a = b\cos C + c\cos B$ u. s. w. ist:

$$\cos AJH = \frac{a\cos B - qa(1 - \cos A)}{HJ},$$

$$\cos AHJ = \frac{a\cos C - qa(1 - \cos A)}{HJ},$$

$$\cos BGF = \frac{b\cos A - qb(1 - \cos B)}{FG},$$

$$\cos BFG = \frac{b\cos C - qb(1 - \cos B)}{FG},$$

$$\cos CED = \frac{c\cos A - qc(1 - \cos C)}{DE},$$

$$\cos CDE = \frac{c\cos B - qc(1 - \cos C)}{DE}.$$

Ferner ergeben sich folgende Werthe:

$$\sin AJH = \frac{a\sin B - qa\sin A}{HJ},$$

$$\sin AHJ = \frac{a\sin C - qa\sin A}{HJ},$$

$$\sin BGF = \frac{b\sin A - qb\sin B}{FG},$$

$$\sin BFG = \frac{b\sin C - qb\sin B}{FG},$$

$$\sin CED = \frac{c\sin A - qc\sin C}{DE},$$

$$\sin CDE = \frac{c\sin B - qc\sin C}{DE}.$$

Ist $qc > a$, so erhalten die cos. und sin. dieser Winkel sämmtlich den entgegengesetzten Werth, denn es liegen dann sämmtliche Theilpunkte auf den Verlängerungen der Seiten. Liegt der

Digitized by Google

eine Endpunkt einer Entfernungsortstrecke auf einer Seite des Dreiecks selbst, der andere aber auf der Verlängerung der anderen Seite, so bleibt für den Winkel, dessen Scheitelpunkt auf der Seite selbst liegt, der Cosinus unverändert, aber der Sinus erhält den entgegengesetzten Werth, während für den Winkel, dessen Scheitelpunkt auf der Verlängerung liegt, es umgekehrt ist, nämlich der Sinus unverändert bleibt, aber der Cosinus den entgegengesetzten Werth erhält.

Aus obigen Werthen folgt:

$$\cos AJH : \cos BGF$$
$$= a(q\cos A + \cos B - q)FG : b(\cos A + q\cos B - q)HJ,$$

$$\cos CED : \cos AHJ$$
$$= c(q\cos C + \cos A - q)HJ : a(\cos C + q\cos A - q)DE,$$

$$\cos BFG : \cos CDE$$
$$= b(q\cos B + \cos C - q)DE : c(\cos B + q\cos C - q)FG;$$

und:

$$\sin AJH : \sin BGF = a(\sin B - q\sin A)FG : b(\sin A - q\sin B)HJ,$$

$$\sin CED : \sin AHJ = c(\sin A - q\sin C)HJ : a(\sin C - q\sin A)DE,$$

$$\sin BFG : \sin CDE = b(\sin C - q\sin B)DE : c(\sin B - q\sin C)FG.$$

18. Da nun für $q = 1$ (15. Zus. 2.) $HJ : FG : DE = a : b : c$ ist, so wird in diesem Falle:

$$\cos AJH = \cos BGF,\ \sin AJH = -\sin BGF;$$

$$\cos CED = \cos AHJ,\ \sin CED = -\sin AHJ;$$

$$\cos BFG = \cos CDE,\ \sin BFG = -\sin CDE.$$

In diesem Falle liegen, wenn das Dreieck ungleichseitig und zwar $a > b > c$ ist, die Theilpunkte D, E und F auf den Seiten selbst, aber G, H und J auf den Verlängerungen. Es sind also $\cos AJH$ und $\cos BGF$ gleich und gleichbezeichnet (—); $\sin AJH$ (—) und $\sin BGF$ (+) gleich, aber entgegengesetzt bezeichnet; ferner $\cos CED$ (+) und $\cos AHJ$ (—) gleich, aber entgegengesetzt bezeichnet; $\sin CED$ (+) und $\sin AHJ$ (—1) ebenfalls; endlich $\cos BFG$ (+) und $\cos CDE$ (+) beide gleich und gleich bezeichnet; $\sin BFG$ (—) und $\sin CDE$ (+) gleich, aber entgegengesetzt bezeichnet Es sind daher $\angle AJH$ und $\angle BGF$ gleiche

Digitized by Google

innere Wechselwinkel; $\angle BFG$ und $\angle CDE$ gleiche äussere Wechselwinkel; $\angle CDE$ und $\angle AHJ$ verschränkte Winkel, die zusammen 180° betragen. Folglich laufen die drei Entfernungsortsstrecken für $q = 1$ parallel.

17. Nach 15. Zus. 3 ist für $q = 1$ $HJ^2 = a^2\left(1 - \frac{2r}{R}\right)$, $FG^2 = b^2\left(1 - \frac{2r}{R}\right)$ und $DE^2 = c^2\left(1 - \frac{2r}{R}\right)$. Ist $r = \frac{1}{2}R$, so ist das Dreieck gleichseitig. Dann sind die Entfernungsortsstrecken $= (1-q)a$. — Ist $\frac{2r}{R} = \frac{3}{4}$, also $r = \frac{3}{8}R$, so wird $HJ = \frac{1}{2}a$, $FG = \frac{1}{2}b$ und $DE = \frac{1}{2}c$.

Es führt dies zu interessanten Lösungen von Dreiecksaufgaben, z. B. ein gleichschenkeliges Dreieck zu construiren, in welchem $r = \frac{3}{8}R$ ist, dessgleichen ein ungleichseitiges Dreieck, wenn noch irgend eine Bestimmung gegeben ist. Doch es wird wohl Zeit abzubrechen und behalte ich mir daher eine weitere Ausführung noch vor.

Digitized by Google

XI.

Goniometrischer Beweis der von Herrn Dr. Lindman in Strengnäs Archiv Th. XLV. Nr. XVII. S. 348. mitgetheilten Relationen.

Von

Herrn *C. Thiel*,

Kandidaten der Mathematik in Greifswald.

Vorerinnerung des Herausgebers.

In Bezug auf die folgenden Entwickelungen des Herrn Thiel erlaube ich mir zu bemerken, dass Herr Doctor Lindman in Strengnäs in einem, wie immer, überaus freundlichen Briefe, für den ich ihm hier meinen besten Dank ausspreche, mir rücksichtlich des von mir in Thl. XLV. S. 348. Note*) ausgesprochenen Wunsches u. A. auch die folgende Mittheilung machte:

„Ut voluntati tuae satisfaciam, ejusmodi demonstrationem mere goniometricam dare propero. E formula notissima

$$\mathrm{Sin}\,3a = 3\,\mathrm{Sin}\,a - 4\,\mathrm{Sin}\,3a$$

prodit

$$3\,\mathrm{Sin}\,20^0 - 4\,\mathrm{Sin}^3 20^0 = \mathrm{Sin}\,60^0$$

vel

$$(3 - 4\,\mathrm{Sin}^2 20^0)\,\mathrm{Sin}\,20^0 = \mathrm{Sin}\,60^0.$$

Quum vero sit $\mathrm{Sin}^2 60^0 = \frac{3}{4}$, haec formula transit in

Digitized by Google

$$4(\mathrm{Sin}^2 60^0 - \mathrm{Sin}^2 20^0)\,\mathrm{Sin}\,20^0 = \mathrm{Sin}\,60^0,$$

unde beneficio formulae $\mathrm{Sin}^2\alpha - \mathrm{Sin}^2\beta = \mathrm{Sin}(\alpha+\beta)\,\mathrm{Sin}(\alpha-\beta)$ reperitur

$$4\,\mathrm{Sin}\,20^0\,\mathrm{Sin}\,40^0\,\mathrm{Sin}\,80^0 = \mathrm{Sin}\,60^0$$

vel, multiplicatione per $4\,\mathrm{Sin}\,60^0$ facta,

$$16\,\mathrm{Sin}\,20^0\,\mathrm{Sin}\,40^0\,\mathrm{Sin}\,60^0\,\mathrm{Sin}\,80^0 = 4\,\mathrm{Sin}^2 60^0 = 3. \quad \text{q. e. d.}$$

Data a. d. IV. Kal. Octobr. Strengn.

Setzt man in der bekannten Formel

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \qquad (1)$$

$\varphi = 20^0$, $\psi = 40^0$, so ist:

$$\sin 20^0 + \sin 40^0 = 2\sin 30^0 \cos(-10^0),$$

also, weil $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, $\cos(-10^0) = \cos 10^0 = \sin 80^0$ ist:

I. . . . . $\sin 20^0 + \sin 40^0 = \sin 80^0$.

Setzt man ferner in der Formel

$$\cos\varphi - \cos\psi = -2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi+\psi)\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi) \qquad (2)$$

$\frac{1}{2}(\varphi+\psi) = 40^0$, $\frac{1}{2}(\varphi-\psi) = -20^0$, so ist $\varphi = 20^0$, $\psi = 60^0$, also

$$\cos 20^0 - \cos 60^0 = -2\sin 40^0 \sin(-20^0),$$

oder, weil $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$, $\sin(-20^0) = -\sin 20^0$ ist:

$$2\sin 20^0 \sin 40^0 = \cos 20^0 - \tfrac{1}{2}.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $4\sin 80^0$, so ist:

$$8\sin 20^0 \sin 40^0 \sin 80 = 4\sin 80^0 \cos 20^0 - 2\sin 80^0.$$

Setzt man nun in (1) $\frac{1}{2}(\varphi+\psi) = 80^0$, $\frac{1}{2}(\varphi-\psi) = 20^0$, so ist $\varphi = 100^0$, $\psi = 60^0$, also

$$\sin 100^0 + \sin 60^0 = 2\sin 80^0 \cos 20^0,$$

und demnach:

$$8\sin 20^0 \sin 40^0 \sin 80^0 = 2\sin 100^0 + 2\sin 60^0 - 2\sin 80^0,$$

oder endlich, weil $\sin 100^0 = \sin 80^0$, $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$:

II. . . . . $8\sin 20^0 \sin 40^0 \sin 80^0 = \sqrt{3}$.

Digitized by Google

Multiplicirt man noch mit $2\sin 60^0 = \sqrt{3}$, so ergiebt sich

III. . . . . . $16\sin 20^0 \sin 40^0 \sin 60^0 \sin 80^0 = 3.$

Es war:

$$-2\sin 20^0 \sin 40^0 = \tfrac{1}{2} - \cos 20^0. \qquad (a)$$

Setzt man ferner in (2) $\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = 40^0$, $\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = 80^0$, so ist $\varphi = 120^0$, $\psi = -40^0$, also:

$$\cos 120^0 - \cos(-40^0) = -2\sin 40^0 \sin 80^0,$$

oder, weil $\cos 120^0 = -\cos 60^0 = -\tfrac{1}{2}$, $\cos(-40^0) = \cos 40^0$ ist:

$$2\sin 40^0 \sin 80^0 = \tfrac{1}{2} + \cos 40^0. \qquad (b)$$

Setzt man endlich in (2) $\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi) = 80^0$, $\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) = 20^0$, so ist $\varphi = 100^0$, $\psi = 60^0$, also

$$\cos 100^0 - \cos 60^0 = -2\sin 80^0 \sin 20^0,$$

oder, weil $\cos 100^0 = -\cos 80^0$, $\cos 60^0 = \tfrac{1}{2}$ ist:

$$2\sin 80^0 \sin 20^0 = \tfrac{1}{2} + \cos 80^0. \qquad (c)$$

Addirt man (a), (b) und (c), so ist:

$$2(-\sin 20^0 \sin 40^0 + \sin 40^0 \sin 80^0 + \sin 80^0 \sin 20^0)$$
$$= \tfrac{3}{2} + (-\cos 20^0 + \cos 40^0 + \cos 80^0).$$

Nach der Formel:

$$\cos\varphi + \cos\psi = 2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi + \psi)\cos\tfrac{1}{2}(\varphi - \psi) \qquad (3)$$

ist aber:

$$\cos 40^0 + \cos 80^0 = 2\cos 60^0 \cos(-20^0),$$

oder, weil $\cos 60^0 = \tfrac{1}{2}$, $\cos(-20^0) = \cos 20^0$ ist:

$$\cos 40^0 + \cos 80^0 = \cos 20^0,$$

also:

IV. . . $-\sin 20^0 \sin 40^0 + \sin 40^0 \sin 80^0 + \sin 80^0 \sin 20^0 = \tfrac{3}{4}.$

Wie oben gefunden wurde, ist

V. . . . . $\cos 20^0 - \cos 40^0 = \cos 80^0,$

welche Formel das Seitenstück zu I. bildet.

Digitized by Google

Setzt man in (3) $\frac{1}{2}(\varphi+\psi)=40^0$, $\frac{1}{2}(\varphi-\psi)=20^0$, so ist $\varphi=60^0$, $\psi=20^0$, also:

$$2\cos 20^0 \cos 40^0 = \cos 20^0 + \cos 60^0,$$

oder, weil $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ ist:

$$2\cos 20^0 \cos 40^0 = \cos 20^0 + \tfrac{1}{2}.$$

Multiplicirt man beiderseits mit $4\cos 80^0$, so ist:

$$8\cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0 = 4\cos 20^0 \cos 80^0 + 2\cos 80^0.$$

Setzt man nun in (3) $\frac{1}{2}(\varphi+\psi)=80^0$, $\frac{1}{2}(\varphi-\psi)=20^0$, so ist $\varphi=100^0$, $\psi=60^0$, also:

$$2\cos 20^0 \cos 80^0 = \cos 100^0 + \cos 60^0 = -\cos 80^0 + \tfrac{1}{2},$$

und demnach:

$$\text{VI.} \quad \ldots\ldots \quad 8\cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0 = 1,$$

das Seitenstück zu II.

Multiplicirt man noch mit $2\cos 60^0 = 1$, so ist:

$$\text{VII.} \quad \ldots \quad 16\cos 20^0 \cos 40^0 \cos 60^0 \cos 80^0 = 1.$$

Aus (3) erhält man ferner analog dem Vorigen

$$\begin{aligned} 2\cos 20^0 \cos 40^0 &= \cos 60^0 + \cos 20^0, \\ -2\cos 40^0 \cos 80^0 &= -\cos 120^0 - \cos 40^0, \\ 2\cos 80^0 \cos 20^0 &= \cos 60^0 + \cos 100^0; \end{aligned}$$

addirt man diese 3 Gleichungen, so erhält man, weil $\cos 120^0 = -\cos 60^0$, $\cos 100^0 = -\cos 80^0$ ist:

$$\begin{aligned} 2(\cos 20^0 \cos 40^0 - \cos 40^0 \cos 80^0 + \cos 80^0 \cos 20^0) \\ = \tfrac{1}{2} + (\cos 20^0 - \cos 40^0 - \cos 80^0), \end{aligned}$$

also nach V.:

$$\text{VIII.} \ldots \cos 20^0 \cos 40^0 - \cos 40^0 \cos 80^0 + \cos 80^0 \cos 20^0 = \tfrac{3}{4}.$$

III. und VII. addirt ergeben:

IX.

$$\sin 20^0 \sin 40^0 \sin 60^0 \sin 80^0 + \cos 20^0 \cos 40^0 \cos 60^0 \cos 80^0 = \tfrac{1}{4}.$$

Subtrahirt man VII. von III. so ist:

X.

$$\sin 20^0 \sin 40^0 \sin 60^0 \sin 80^0 - \cos 20^0 \cos 40^0 \cos 60^0 \cos 80 = \tfrac{1}{8}.$$

Digitized by Google

Durch Multiplication von I. und V. erhält man wieder I.; durch die von II. und VI. wieder II.; durch die von III. und VII. wieder III. Addirt man IV. und VIII., so ergiebt sich die identische Gleichung:

$$3\cos 60^0 = \tfrac{3}{2}.$$

Das Product von III. und VII. lässt sich auch schreiben, wenn man mit $\sin 90^0 = 1$ multiplicirt:

XI.

$$\sin 10^0 \sin 20^0 \sin 30^0 \sin 40^0 \sin 50^0 \sin 60^0 \sin 70^0 \sin 80^0 \sin 90^0$$

$$= \cos 0^0 \cos 10^0 \cos 20^0 \cos 30^0 \cos 40^0 \cos 50^0 \cos 60^0 \cos 70^0 \cos 80^0 = \tfrac{3}{256}.$$

XII.

Zur Construction von Dreiecken mit Benutzung der Eigenthümlichkeiten des Entfernungsortsdreiecks.

Von

Herrn Professor Dr. *H. Emsmann*

an der Realschule 1. Ordnung in Stettin.

In der Abhandlung: Auf das Entfernungsortsdreieck Bezügliches (Nr. X. S. 121.) haben sich manche Eigenthümlichkeiten ergeben, die eine Verwerthung wünschenswerth machen. Es scheint dies noch nicht hinreichend beachtet zu sein, und darum erlaube mir dazu einige Andeutungen zu geben.

Schon die von Jacobi nachgewiesene und auch von mir (Archiv. Theil XLV. S. 353.) angegebene Eigenthümlichkeit, dass die Entfernungsörter parallel sind der Linie, auf welcher die

Digitized by Google

Durchschnittspunkte der die Aussenwinkel eines Dreiecks Halbirenden mit den gegenüberliegenden Dreiecksseiten liegen, lässt sich zur Construction von Dreiecken verwerthen, wenn nämlich eine Entfernungsortsstrecke und ausserdem Grössen gegeben sind, durch welche die Gestalt des Dreiecks bestimmt wird. Die Lösung derartiger Aufgaben ist leicht und es genüge daher hier diese Andeutung. Es gehören hierher auch die Aufgaben $a-c$, $b-c$, C; $a-c$, $a-b$, A und $a-b$, $b-c$, B.

In den folgenden Zeilen beabsichtige ich auf einen anderen Fall hinzuweisen, um auf das Entfernungsortsdreieck die Aufmerksamkeit mehr hinzulenken, als dasselbe bisher gefunden zu haben scheint.

In der oben angezogenen Abhandlung ist in 15. Zus. 3. im Falle $q=1$ ist, d. h. die Seiten selbst und nicht aliquote Theile derselben abgeschnitten werden, für die Entfernungsortsstrecken gefunden worden:

$$K_a = a\sqrt{1-\frac{2r}{R}};\quad K_b = b\sqrt{1-\frac{2r}{R}};\quad K_c = c\sqrt{1-\frac{2r}{R}};$$

wo K_a, K_b und K_c die zu den respectiven Seiten a, b und c gehörigen Entfernungsortsstrecken, r den Radius des eingeschriebenen und R den des umschriebenen Kreises bedeuten.

Bekanntlich ist der Abstand der Mittelpunkte des ein- und umschriebenen Kreises bei einem Dreiecke $= e = \sqrt{R(R-2r)}$. Ist nun $r:R=m:n$, so wird $e=\frac{1}{n}R\sqrt{n(n-2m)}=\frac{1}{m}r\sqrt{n(n-2m)}$. In demselben Falle wird aber auch $K_a=\frac{1}{n}a\sqrt{n(n-2m)}$, $K_b=\frac{1}{n}b\sqrt{n(n-2m)}$ und $K_c=\frac{1}{n}c\sqrt{n(n-2m)}$. Hieraus ersieht man, dass man bei der Construction von Dreiecken, bei welchen unter den Bestimmungsstücken das Verhältniss der Radien des eingeschriebenen und umschriebenen Kreises sich befindet, die Lösung sowohl mit Benutzung der ersteren, als der zweiten Beziehung wird finden können. Dass man den letzteren Weg bereits versucht habe, ist mir nicht bekannt, und daher will ich hier an zwei Beispielen den Nachweis der Zweckmässigkeit des letzteren Weges unternehmen.

I. Zur Construction eines gleichschenkeligen Dreiecks sei das Verhältniss der Radien des eingeschriebenen und umschriebenen Kreises $r:R=m:n$ und ausserdem die Grundseite $a=p$ gegeben.

Digitized by Google

A n a l y s i s.

Da $K_a = \pm\frac{1}{n}a\sqrt{n(n-2m)}$ ist, so ist $K_a : a = \pm\sqrt{n(n-2m)} : n$, also K_a bestimmt. Bei dem gleichschenkeligen Dreiecke wird K_a durch die Höhe halbirt und ausserdem ist K_a parallel der Seite a, folglich ist ein Ort für den auf dem Schenkel des Dreiecks liegenden Endpunkt der Entfernungsortsstrecke K_a eine Parallele mit der Höhe in einem Abstande von derselben gleich der Hälfte der bestimmten Entfernungsortsstrecke; ein zweiter Ort ist aber ein Kreis, welcher mit der Basis um einen Endpunkt derselben geschlagen wird. Folglich ist die Richtung des Schenkels durch den Durchschnitt beider Oerter bestimmt; folglich wäre das Dreieck bestimmt. Da $K_a = \pm\frac{1}{n}a\sqrt{n(n-2m)}$ ist, so ist die Parallele mit der Höhe sowohl auf der einen, als auf der anderen Seite von dem Fusspunkte der Höhe in einem Abstande gleich der Hälfte der Entfernungsortsstrecke zu ziehen, und da der Kreis, welchen man mit der Basis um einen Endpunkt derselben zu schlagen hat, jede dieser Parallelen schneidet, so erhält man zwei verschiedene Stellen für den auf dem Schenkel liegenden Endpunkt der Entfernungsortsstrecke und mithin zwei verschiedene Dreiecke, welche den Anforderungen entsprechen,

C o n s t r u c t i o n. (Taf. V. Fig. 5.)

Man lege $BN = NO = n$ an einander; schneide von dem einem Endpunkte, z. B. von O aus, $OP = PM = m$ ab; schlage über BM einen Halbkreis; errichte in N die Normale SN auf BM bis zum Durchschnitte mit dem Kreise; verbinde B mit S; schlage um B mit p einen Kreis, welcher BO in C schneidet; halbire BC in D, also $BD = DC$; errichte auf BC in D die Normale DL bis zum Durchschnitte mit BS; schlage mit DL um D einen Kreis, welcher BC in E und E' schneidet; errichte in E und E' Normalen auf BC (Parallelen mit DL) bis zum Durchschnitte mit dem um B mit p geschlagenen Kreise in G und G'; ziehe BG und BG', welche DL in A und A' treffen; verbinde A und A' mit C: so sind ABC und $A'BC$ die verlangten Dreiecke.

B e w e i s.

1) Die Dreiecke haben die Basis $BC = p$, da sie gleich p gemacht ist.

Digitized by Google

2) Die Dreiecke sind gleichschenkelig, da $BD = DC$ ist und A und A' auf der in D auf BC errichteten Normalen liegen.

3) Zieht man GF und $G'F'$ parallel BC, so sind GF und $G'F'$ Hälften der Entfernungsortsstrecken für a, weil $BG = BG' = BC$ ist. Nun ist $FG = DE = DL$, ebenso $F'G' = DE' = DL$; aber $DL:BD = NS:BN$; folglich $\frac{1}{2}K_a : \frac{1}{2}a = \sqrt{n(n-2m)}:n$, d. h. $K_a = \frac{1}{n}a\sqrt{n(n-2m)} = a\sqrt{1-\frac{2m}{n}}$. Da jedoch auch $K_a = a\sqrt{1-\frac{2r}{R}}$ ist, so ist $\frac{2r}{R} = \frac{2m}{n}$, d. h. $r:R = m:n$.

II. Zur Construction eines gleichschenkeligen Dreiecks sei das Verhältniss der Radien des eingeschriebenen und umschriebenen Kreises $r:R = m:n$ und ausserdem die Länge der gleichen Seite $b = q$ gegeben.

Analysis.

Da $K_b = \pm\frac{1}{n}b\sqrt{n(n-2m)}$ ist, so ist $K_b : b = \sqrt{n(n-2m)} : n$, also K_b bestimmt. Es liegt aber bei dem gleichschenkeligen Dreiecke die Entfernungsortsstrecke K_b auf der Basis und es ist $a = b \pm K_b$, also erhält man zwei Werthe für a. Durch Basis und Schenkel ist das gleichschenkelige Dreieck bestimmt, also erhält man durch die gegebenen Bestimmungsstücke zwei den Anforderungen entsprechende Dreiecke.

Construction.

Construire zunächst wie im ersten Beispiele, nämlich (Taf. V. Fig. 6.) $BN = NO = n$; $OP = PM = m$; Halbkreis über BM; NS normal auf BM; ziehe BS; darauf schlage mit q um B einen Kreis, welcher BM in G schneidet; errichte GL normal in G auf BM bis zum Durchschnitt mit BS; schlage mit GL um G einen Kreis, welcher BM in C und C' trifft; halbire BC in D und BC' in D', also $BD = DC$ und $BD' = D'C'$; errichte in D und D' Normalen auf BC (Parallelen mit GL), welche den Kreis mit q um B in A und A' schneiden; ziehe AC und $A'C'$: so sind ABC und $A'BC'$ die verlangten Dreiecke.

Digitized by Google

Beweis.

1) Die Dreiecke sind gleichschenkelig, weil $BD = DC$ und $BD' = D'C'$ ist und A und A' auf den in D und D' errichteten Normalen liegen.

2) Die gleiche Seite hat die Länge q, weil BA und $BA' = BG = q$ sind.

3) $GC = BC - BG = BC - BA = a - b = + K_b$; ebenso $GC' = BG - BC' = BA - BC' = b - a = - K_b$. Nun ist $GL : GB = NS : BN$, d. h. GC oder $GC' : b = \sqrt{n(n-2m)} : n$; also $\pm K_b = \pm \frac{1}{n} b \sqrt{n(n-2m)} = \pm b \sqrt{1 - \frac{2m}{n}}$. Da jedoch auch $\pm K_b = \pm \sqrt{1 - \frac{2r}{R}}$ ist, so ist $r : R = m : n$.

Für $r : R = 3:8$ ergiebt sich sofort mit Benutzung der Entfernungsortsstrecke, dass der Schenkel des gleichschenkeligen Dreiecks doppelt so gross ist als die Basis, oder die Basis um den halben Schenkel länger, d. h. der Schenkel gleich $\frac{2}{3}$ der Basis. Im ersteren Falle ist die Höhe des Dreiecks $h = \frac{15}{8} R$, im zweiten $h = \frac{7}{8} R$.

Dies Beispiel genüge für die Fälle, wo das Verhältniss $r : R$ in bestimmten Zahlen gegeben ist, z. B. $r : R = 4:9$; $= 15:32$; $12:25$ u. s. w.

Digitized by Google

XIII.

Neue analytische Entwickelung der allgemeinsten Gesetze der Statik.

Von
dem Herausgeber.

Einleitung.

Die Lehren der Statik werden, insofern man nicht von dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten ausgeht, meistens so entwickelt, dass man sich von der Betrachtung der besonderen Fälle der auf einen Punkt wirkenden Kräfte, der parallelen Kräfte und der in einer und derselben Ebene wirkenden Kräfte nach und nach zu dem allgemeinsten Falle beliebig im Raume wirkender Kräfte und den sechs allgemeinen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts solcher Kräfte, die gewissermaassen die ganze Statik in einem einzigen einfachen analytischen Ausdrucke enthalten, erhebt. So viele Vortheile ein solcher Gang in mehreren Beziehungen namentlich für den ersten Unterricht darbietet: so hat es mir doch auf der anderen Seite immer wissenschaftlicher geschienen, den umgekehrten Weg zu verfolgen, also zuerst ganz im Allgemeinen die in Rede stehenden sechs Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht beliebiger Kräfte im Raume zu entwickeln, und aus denselben dann alles Uebrige als besondere Fälle abzuleiten. Auf einem solchen Wege habe ich in der vorliegenden Abhandlung die ganze Statik in ihren allgemeinsten Resultaten zu entwickeln versucht, wobei nichts weiter als der Satz von dem Parallelogramme der Kräfte vorausgesetzt und zu Grunde gelegt worden ist. Ausserdem unterscheiden

Digitized by Google

sich die folgenden Entwickelungen von der gewöhnlichen Darstellungsweise noch in einer anderen Beziehung. Bei dieser letzteren Darstellungsweise pflegt man nämlich nur bei parallelen Kräften zwischen positiven und negativen Kräften zu unterscheiden, in allen anderen Fällen aber stets alle Kräfte nur als positiv oder absolut zu betrachten, ein Gesichtspunkt, der mir immer zu eingeschränkt geschienen hat. Ich habe deshalb die Unterscheidung zwischen positiven und negativen Kräften ganz allgemein durchgeführt, was namentlich bei der Zerlegung der Kräfte nach gewissen gegebenen Richtungslinien mir manche Vortheile darzubieten scheint. Für das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in dem Falle unveränderlicher Systeme ist ein ganz allgemeiner analytischer, von der Betrachtung des unendlich Kleinen ganz unabhängiger Beweis gegeben worden, neben welchem man, wie ich glaube und hoffe, in dieser Abhandlung auch noch manches andere Neue, was der Beachtung nicht unwerth sein dürfte, finden wird.

§. 1.

Allgemeine Bestimmungen.

Allen unseren Betrachtungen legen wir im Allgemeinen ein rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz zu Grunde, auf welches wir die Lage aller Punkte und geraden Linien im Raume beziehen.

Die gerade Linie, in welcher eine Kraft wirkt, soll die **Richtungslinie** dieser Kraft genannt werden. Jeder in der Richtungslinie beliebig angenommene Punkt kann als **Angriffspunkt** der Kraft betrachtet werden, und theilt die Richtungslinie in zwei Theile, welche von dem in Rede stehenden Punkte an nach direct entgegengesetzten Richtungen hin gehen und in der Richtungslinie zwei **Richtungen** bestimmen, von denen die eine jederzeit die **positive Richtung**, die andere die **negative Richtung** genannt werden soll; eine feste Bestimmung oder Uebereinkunft hierüber ist jederzeit unbedingt erforderlich, wenn es auch an sich völlig gleichgültig ist, welche der beiden Richtungen als die positive und welche als die negative angenommen werden soll. Jede Kraft aber, welche in ihrer Richtungslinie nach der positiven oder negativen Richtung hin wirkt, soll selbst beziehungsweise als positiv oder als negativ betrachtet werden.

Die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche der positive Theil der Richtungslinie einer Kraft mit den positiven Theilen

Digitized by Google

der Axen der x, y, z einschliesst, sollen die **Bestimmungswinkel** der Richtungslinie genannt werden; bezeichnet man dieselben beziehungsweise durch α, β, γ: so hat man zwischen diesen Winkeln bekanntlich die Gleichung:

$$1) \ldots\ldots\ \cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$

und wenn a, b, c die Coordinaten eines beliebigen Punktes in der Richtungslinie bezeichnen, so sind bekanntlich:

$$2) \ldots\ldots\ \frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma}$$

die Gleichungen der Richtungslinie in Bezug auf das zu Grunde gelegte rechtwinklige Coordinatensystem der x, y, z. Da nach der obigen Bestimmung die Winkel α, β, γ immer der positiven Richtung der Richtungslinie entsprechen, die in der Richtungslinie wirkende Kraft aber nach dem Obigen als positiv oder negativ betrachtet wird, jenachdem dieselbe nach der positiven oder negativen Richtung hin wirkt, so ist klar, dass die Kraft immer als positiv oder als negativ betrachtet wird, jenachdem sie nach der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Richtung der Richtungslinie oder nach der entgegengesetzten, durch die Winkel $180^0-\alpha$, $180^0-\beta$, $180^0-\gamma$ bestimmten Richtung der Richtungslinie hin wirkt. Wenn daher im Folgenden gesagt wird, dass die Gleichungen 2) die Gleichungen der Richtungslinie einer Kraft P seien, so wird dabei immer stillschweigend vorausgesetzt, dass die Kraft P positiv oder negativ oder als positiv oder negativ zu betrachten sei, jenachdem sie nach der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Richtung oder nach der entgegengesetzten, durch die Winkel $180^0-\alpha$, $180^0-\beta$, $180^0-\gamma$ bestimmten Richtung der Richtungslinie hin wirkt.

Wenn wir uns die positive und negative Richtung der Richtungslinie von dem in der Richtungslinie liegenden beliebigen Punkte (abc) ausgehend denken, und (xyz) einen anderen beliebigen, aber bestimmten Punkt der Richtungslinie bezeichnet; so soll, jenachdem der Punkt (xyz) in der positiven oder negativen Richtung liegt, seine Entfernung von dem Punkte (abc) selbst beziehungsweise als positiv oder negativ betrachtet, und mit Beziehung hierauf im Allgemeinen durch r bezeichnet werden. Liegt nun der Punkt (xyz) in der positiven Richtung, so ist r positiv, sein absoluter Werth ist r, und folglich, da die Winkel α, β, γ jederzeit der positiven Richtung, in welcher (xyz) liegt, entsprechen, nach den bekanntesten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

Digitized by Google

$$x = a + r\cos\alpha,$$
$$y = b + r\cos\beta,$$
$$z = c + r\cos\gamma.$$

Liegt dagegen der Punkt (xyz) in der negativen Richtung, so ist r negativ, sein absoluter Werth ist $-r$, und da nun der negativen Richtung, in welcher (xyz) liegt, die Winkel $180^0-\alpha$, $180^0-\beta$, $180^0-\gamma$ entsprechen; so ist nach den bekanntesten Formeln der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$x = a + (-r)\cos(180^0 - \alpha),$$
$$y = b + (-r)\cos(180^0 - \beta),$$
$$z = c + (-r)\cos(180^0 - \gamma)$$

oder:

$$x = a + r\cos\alpha,$$
$$y = b + r\cos\beta,$$
$$z = c + r\cos\gamma.$$

Daher ist in beiden Fällen, und folglich in völliger Allgemeinheit:

$$3) \ldots\ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} x = a + r\cos\alpha, \\ y = b + r\cos\beta, \\ z = c + r\cos\gamma; \end{array}\right.$$

oder:

$$4) \ldots\ldots \frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma} = r,$$

folglich auch:

$$5) \ldots \cos\alpha = \frac{x-a}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y-b}{r}, \quad \cos\gamma = \frac{z-c}{r}.$$

Liegt, indem wir alle Richtungen von (abc) an rechnen, der Punkt (xyz) in der positiven Richtung und ist also r positiv, so wirkt die Kraft, jenachdem sie positiv oder negativ ist, von (abc) nach (xyz) oder nach der entgegengesetzten Richtung hin; liegt dagegen der Punkt (xyz) in der negativen Richtung und ist also r negativ, so wirkt die Kraft, jenachdem sie negativ oder positiv ist, von (abc) nach (xyz) oder nach der entgegengesetzten Richtung hin.

Wenn wir von einem beliebigen Punkte der Richtungslinie einer Kraft aus auf der Richtung dieser Kraft eine Gerade oder

Digitized by Google

Strecke abschneiden, welche sich zu der immer als positiv zu betrachtenden Längeneinheit eben so verhält wie die Kraft zu der gleichfalls stets als positiv zu betrachtenden Krafteinheit; so heisst diese Strecke die geometrische Darstellung der Kraft, und aus dem Vorhergehenden geht ganz von selbst hervor, dass die geometrische Darstellung einer Kraft mit dieser letzteren jederzeit gleiches Vorzeichen hat; ist die Kraft etwa durch P bezeichnet, so kann man im Folgenden der Einfachheit wegen ihre geometrische Darstellung immerhin auch durch P bezeichnen, weil es ja bei allen diesen Betrachtungen und Untersuchungen durchaus nur auf Verhältnisse oder Verhältnisszahlen ankommt.

§. 2.

Zerlegung einer Kraft in zwei Kräfte.

Die Gleichungen der Richtungslinie der Kraft P seien:

$$1) \quad \frac{x-a}{\cos\alpha}=\frac{y-b}{\cos\beta}=\frac{z-c}{\cos\gamma},$$

wo wir uns, da der Punkt (abc) in der Richtungslinie liegt, die Kraft P in diesem Punkte wirkend denken können. Die Gleichungen zweier anderen durch den Punkt (abc) gehenden Geraden seien:

$$2) \quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-a}{\cos\alpha_0}=\dfrac{y-b}{\cos\beta_0}=\dfrac{z-c}{\cos\gamma_0}, \\[2ex] \dfrac{x-a}{\cos\alpha_1}=\dfrac{y-b}{\cos\beta_1}=\dfrac{z-c}{\cos\gamma_1}. \end{array}\right.$$

Wir nehmen an, dass die drei, durch die Gleichungen 1) und 2) charakterisirten Geraden in einer Ebene liegen, was bekanntlich durch die Gleichung:

$$3) \quad \left.\begin{array}{r} \cos\alpha(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1) \\ +\cos\beta(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1) \\ +\cos\gamma(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1) \end{array}\right\}=0$$

bedingt wird. Unter diesen Voraussetzungen sollen wir nun die Kraft P in zwei Kräfte P_0, P_1 zerlegen, deren Richtungslinien die durch die Gleichungen 2) charakterisirten Geraden sind, in welchen also die beiden gesuchten Kräfte wirken.

Stellen wir zu dem Ende für (abc) als Anfangspunkt die ge-

Digitized by Google

gebene Kraft P geometrisch dar, so sind nach §. 1. 3) die Coordinaten des Endpunkts dieser geometrischen Darstellung:

$$a + P\cos\alpha,\quad b + P\cos\beta,\quad c + P\cos\gamma;$$

und die Gleichungen der durch diesen Punkt gelegten, mit der zweiten der durch die Gleichungen 2) charakterisirten Geraden parallelen Geraden sind folglich:

$$\frac{x-a-P\cos\alpha}{\cos\alpha_1} = \frac{y-b-P\cos\beta}{\cos\beta_1} = \frac{z-c-P\cos\gamma}{\cos\gamma_1}.$$

Bezeichnen wir den Durchschnittspunkt dieser Geraden mit der ersten der beiden durch die Gleichungen 2) charakterisirten Geraden mit $(x_0 y_0 z_0)$, so haben wir zwischen den Coordinaten x_0, y_0, z_0 die folgenden Gleichungen:

$$\frac{x_0-a}{\cos\alpha_0} = \frac{y_0-b}{\cos\beta_0} = \frac{z_0-c}{\cos\gamma_0} = P_0,$$

$$\frac{x_0-a-P\cos\alpha}{\cos\alpha_1} = \frac{y_0-b-P\cos\beta}{\cos\beta_1} = \frac{z_0-c-P\cos\gamma}{\cos\gamma_1};$$

wobei §. 1. 4) zu vergleichen ist. Hieraus ergeben sich unmittelbar die folgenden Gleichungen:

$$\frac{P_0\cos\alpha_0-P\cos\alpha}{\cos\alpha_1} = \frac{P_0\cos\beta_0-P\cos\beta}{\cos\beta_1} = \frac{P_0\cos\gamma_0-P\cos\gamma}{\cos\gamma_1},$$

und hieraus ferner die Gleichungen:

4)

$$P_0(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1) = P(\cos\alpha\cos\beta_1-\cos\beta\cos\alpha_1),$$

$$P_0(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1) = P(\cos\beta\cos\gamma_1-\cos\gamma\cos\beta_1),$$

$$P_0(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1) = P(\cos\gamma\cos\alpha_1-\cos\alpha\cos\gamma_1).$$

Auf ganz ähnliche Art erhält man die Gleichungen:

$$P_1(\cos\alpha_1\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos\alpha_0) = P(\cos\alpha\cos\beta_0-\cos\beta\cos\alpha_0),$$

$$P_1(\cos\beta_1\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos\beta_0) = P(\cos\beta\cos\gamma_0-\cos\gamma\cos\beta_0),$$

$$P_1(\cos\gamma_1\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos\gamma_0) = P(\cos\gamma\cos\alpha_0-\cos\alpha\cos\gamma_0)$$

oder:

5)

$$P_1(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1) = -P(\cos\alpha\cos\beta_0-\cos\beta\cos\alpha_0),$$

$$P_1(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1) = -P(\cos\beta\cos\gamma_0-\cos\gamma\cos\beta_0),$$

$$P_1(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1) = -P(\cos\gamma\cos\alpha_0-\cos\alpha\cos\gamma_0).$$

Digitized by Google

Aus den Systemen 4) und 5) erhält man, wenn man dieselben beziehungsweise mit $\cos\alpha_0$ und $\cos\alpha_1$ multiplicirt, und dann die beiden ersten, die beiden zweiten, die beiden dritten Gleichungen zu einander addirt, sehr leicht die folgenden Gleichungen:

$$(P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1)(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)$$

$$=P\{\cos\alpha(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)-\cos\beta(\cos\alpha_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\alpha_1)\},$$

$$(P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1)(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)$$

$$=-P\{\cos\beta(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)+\cos\gamma(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)\},$$

$$(P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1)(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)$$

$$=P\{\cos\gamma(\cos\alpha_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\alpha_1)+\cos\alpha(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)\};$$

folglich, weil nach 3):

$$\cos\beta(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)+\cos\gamma(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)$$
$$=-\cos\alpha(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)$$

ist:

$$(P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1)(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)$$
$$=P\cos\alpha(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1),$$

$$(P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1)(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)$$
$$=P\cos\alpha(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1),$$

$$(P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1)(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)$$
$$=P\cos\alpha(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1).$$

Wäre nun zu gleicher Zęit:

$$\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1=0,$$
$$\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1=0,$$
$$\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1=0;$$

so wäre:

$$(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)^2$$
$$+(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)^2$$
$$+(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)^2$$

Digitized by Google

$$= (\cos\alpha_0^2+\cos\beta_0^2+\cos\gamma_0^2)(\cos\alpha_1^2+\cos\beta_1^2+\cos\gamma_1^2)$$
$$-(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1)^2$$
$$=1-(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1)^2=0,$$

und nach bekannten Formeln würden also die Sinus der von den durch die Gleichungen 2) charakterisirten Geraden eingeschlossenen Winkel verschwinden, daher diese beiden Geraden zusammenfallen; es wäre folglich in der That für die Zerlegung der Kraft P nur eine Gerade als Richtungslinie gegeben, da ja doch nothwendig zwei Richtungslinien gegeben sein müssen, wenn überhaupt von der Zerlegung der Kraft P in zwei Kräfte soll die Rede sein können. Daher können die Grössen

$$\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1,$$
$$\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1,$$
$$\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1$$

nicht zu gleicher Zeit verschwinden, und es wird also immer mindestens eine dieser Grössen nicht verschwinden. Deshalb ergiebt sich aus den drei oben gefundenen Gleichungen durch Division immer die Gleichung:

$$P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1=P\cos\alpha.$$

Ueberhaupt aber erhält man auf ganz ähnliche Weise wie vorher die drei folgenden Gleichungen:

$$6)\;\ldots\ldots\left\{\begin{array}{l} P\cos\alpha=P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1,\\ P\cos\beta=P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1,\\ P\cos\gamma=P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1.\end{array}\right.$$

Wenn man diese drei Gleichungen quadrirt und dann zu einander addirt, so erhält man die Gleichung:

7)
$$P^2=(P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1)^2+(P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1)^2+(P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1)^2$$

oder:

8)
$$P^2=P_0^2+P_1^2+2P_0P_1(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1),$$

wo bekanntlich

$$\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\cos\beta_0\cos\beta_1+\cos\gamma_0\cos\gamma_1$$

der Cosinus des von den positiven Richtungen der beiden durch

die Gleichungen 2) charakterisirten Richtungslinien eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkels ist.

Die Kräfte P_0, P_1 erhält man mittelst der folgenden, aus 4) und 5) sich unmittelbar ergebenden Formeln:

$$9) \quad P_0 = \frac{\cos\alpha\ \cos\beta_1 - \cos\beta\ \cos\alpha_1}{\cos\alpha_0 \cos\beta_1 - \cos\beta_0 \cos\alpha_1} P$$

$$= \frac{\cos\beta\ \cos\gamma_1 - \cos\gamma\ \cos\beta_1}{\cos\beta_0 \cos\gamma_1 - \cos\gamma_0 \cos\beta_1} P$$

$$= \frac{\cos\gamma\ \cos\alpha_1 - \cos\alpha\ \cos\gamma_1}{\cos\gamma_0 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_0 \cos\gamma_1} P$$

und:

$$10) \quad P_1 = -\frac{\cos\alpha\ \cos\beta_0 - \cos\beta\ \cos\alpha_0}{\cos\alpha_0 \cos\beta_1 - \cos\beta_0 \cos\alpha_1} P$$

$$= -\frac{\cos\beta\ \cos\gamma_0 - \cos\gamma\ \cos\beta_0}{\cos\beta_0 \cos\gamma_1 - \cos\gamma_0 \cos\beta_1} P$$

$$= -\frac{\cos\gamma\ \cos\alpha_0 - \cos\alpha\ \cos\gamma_0}{\cos\gamma_0 \cos\alpha_1 - \cos\alpha_0 \cos\gamma_1} P.$$

Wenn man, wie es verstattet ist:

11)

$$\cos\alpha = \cos\theta\cos\omega, \quad \cos\alpha_0 = \cos\theta_0\cos\omega_0, \quad \cos\alpha_1 = \cos\theta_1\cos\omega_1,$$

$$\cos\beta = \sin\theta\cos\omega, \quad \cos\beta_0 = \sin\theta_0\cos\omega_0, \quad \cos\beta_1 = \sin\theta_1\cos\omega_1,$$

$$\cos\gamma = \sin\omega; \quad \cos\gamma_0 = \sin\omega_0; \quad \cos\gamma_1 = \sin\omega_1$$

setzt, so ist:

$$\cos\alpha\ \cos\beta_0 - \cos\beta\cos\alpha_0 = -\cos\omega\ \cos\omega_0\sin(\theta-\theta_0),$$

$$\cos\alpha\ \cos\beta_1 - \cos\beta\cos\alpha_1 = -\cos\omega\ \cos\omega_1\sin(\theta-\theta_1),$$

$$\cos\alpha_0\cos\beta_1 - \cos\beta_0\cos\alpha_1 = -\cos\omega_0\cos\omega_1\sin(\theta_0-\theta_1);$$

also nach 9) und 10):

$$12) \quad \left\{ \begin{array}{l} P_0 = \dfrac{\cos\omega\ \sin(\theta-\theta_1)}{\cos\omega_0\sin(\theta_0-\theta_1)} P, \\[2ex] P_1 = -\dfrac{\cos\omega\ \sin(\theta-\theta_0)}{\cos\omega_1\sin(\theta_0-\theta_1)} P. \end{array} \right.$$

Digitized by Google

Nehmen wir in den durch die Gleichungen 2) charakterisirten Richtungslinien der beiden gesuchten Kräfte P_0, P_1 beziehungsweise die beliebigen Punkte $(a_0 b_0 c_0)$, $(a_1 b_1 c_1)$ an, und bezeichnen deren gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernungen von dem Punkte (abc) beziehungsweise durch r_0, r_1; so ist nach §. 1. 5.):

$$\cos\alpha_0 = \frac{a_0 - a}{r_0},\quad \cos\beta_0 = \frac{b_0 - b}{r_0},\quad \cos\gamma_0 = \frac{c_0 - c}{r_0};$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_1 - a}{r_1},\quad \cos\beta_1 = \frac{b_1 - b}{r_1},\quad \cos\gamma_1 = \frac{c_1 - c}{r_1};$$

also nach 6):

$$13)\quad \left\{\begin{aligned} P\cos\alpha &= P_0\frac{a_0 - a}{r_0} + P_1\frac{a_1 - a}{r_1}, \\ P\cos\beta &= P_0\frac{b_0 - b}{r_0} + P_1\frac{b_1 - b}{r_1}, \\ P\cos\gamma &= P_0\frac{c_0 - c}{r_0} + P_1\frac{c_1 - c}{r_1}. \end{aligned}\right.$$

Ueber die Richtungen der positiven oder negativen Kräfte P_0 und P_1 mit Rücksicht auf die Lage der Punkte (abc), $(a_0 b_0 c_0)$ und (abc), $(a_1 b_1 c_1)$ ist schon in §. 1. das Nöthige im Allgemeinen bemerkt worden.

§. 3.

Zerlegung einer Kraft in drei Kräfte.

Die Gleichungen der Richtungslinie der Kraft P seien:

$$1)\quad \frac{x-a}{\cos\alpha} = \frac{y-b}{\cos\beta} = \frac{z-c}{\cos\gamma},$$

wo wir uns, da der Punkt (abc) in der Richtungslinie liegt, die Kraft P in diesem Punkte wirkend denken können. Die Gleichungen dreier anderen durch den Punkt (abc) gehenden Geraden seien:

$$2)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{x-a}{\cos\alpha_0} = \frac{y-b}{\cos\beta_0} = \frac{z-c}{\cos\gamma_0}, \\ &\frac{x-a}{\cos\alpha_1} = \frac{y-b}{\cos\beta_1} = \frac{z-c}{\cos\gamma_1}, \\ &\frac{x-a}{\cos\alpha_2} = \frac{y-b}{\cos\beta_2} = \frac{z-c}{\cos\gamma_2}; \end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

von denen wir annehmen, dass sie nicht in einer Ebene liegen. Unter diesen Voraussetzungen sollen wir nun die Kraft P in drei Kräfte P_0, P_1, P_2 zerlegen, deren Richtungslinien die durch die Gleichungen 2) charakterisirten Geraden sind, in welchen also die drei gesuchten Kräfte wirken.

Die Gleichung der durch die zweite und dritte der drei gegebenen Richtungslinien 2) bestimmten Ebene ist:

$$3) \quad \ldots \quad \left.\begin{array}{l}(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)(x-a)\\+(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\gamma_2)(y-b)\\+(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)(z-c)\end{array}\right\}=0.$$

Stellen wir für (abc) als Anfangspunkt die gegebene Kraft P geometrisch dar, so sind nach §. 1. 3.) die Coordinaten des Endpunkts dieser geometrischen Darstellung:

$$a+P\cos\alpha,\quad b+P\cos\beta,\quad c+P\cos\gamma;$$

und die Gleichung der durch diesen Punkt gelegten, mit der durch die Gleichung 3) charakterisirten Ebene parallelen Ebene ist also:

$$\left.\begin{array}{l}(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)(x-a-P\cos\alpha)\\+(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\gamma_2)(y-b-P\cos\beta)\\+(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)(z-c-P\cos\gamma)\end{array}\right\}=0.$$

Ist nun $(x_0y_0z_0)$ der Durchschnittspunkt dieser Ebene mit der ersten der drei gegebenen Richtungslinien, so haben wir zwischen den Coordinaten x_0, y_0, z_0 die folgenden Gleichungen:

$$\frac{x_0-a}{\cos\alpha_0}=\frac{y_0-b}{\cos\beta_0}=\frac{z_0-c}{\cos\gamma_0}=P_0,$$

$$\left.\begin{array}{l}(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)(x_0-a-P\cos\alpha)\\+(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\gamma_2)(y_0-b-P\cos\beta)\\+(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)(z_0-c-P\cos\gamma)\end{array}\right\}=0;$$

wobei §. 1. 4) zu vergleichen ist; woraus sich die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)(P_0\cos\alpha_0-P\cos\alpha)\\+(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\gamma_2)(P_0\cos\beta_0-P\cos\beta)\\+(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)(P_0\cos\gamma_0-P\cos\gamma)\end{array}\right\}=0$$

oder:

Digitized by Google

$$\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha_0(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)\\+\cos\beta_0(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\gamma_2)\\+\cos\gamma_0(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)\end{array}\right\}P_0$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)\\+\cos\beta(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\gamma_2)\\+\cos\gamma(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)\end{array}\right\}P$$

ergiebt.

Setzen wir nun der Kürze wegen:

4) . . . .
$$\begin{aligned}N = &\cos\alpha_0(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)\\&+\cos\beta_0(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\gamma_2)\\&+\cos\gamma_0(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)\\= &\cos\alpha_1(\cos\beta_2\cos\gamma_0-\cos\gamma_2\cos\beta_0)\\&+\cos\beta_1(\cos\gamma_2\cos\alpha_0-\cos\alpha_2\cos\gamma_0)\\&+\cos\gamma_1(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos\alpha_0)\\= &\cos\alpha_2(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)\\&+\cos\beta_2(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)\\&+\cos\gamma_2(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)\end{aligned}$$

und:

5) . . . .
$$\begin{aligned}N_{01} = &\cos\alpha(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)\\&+\cos\beta(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)\\&+\cos\gamma(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_{12} = &\cos\alpha(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)\\&+\cos\beta(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\gamma_2)\\&+\cos\gamma(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}N_{20} = &\cos\alpha(\cos\beta_2\cos\gamma_0-\cos\gamma_2\cos\beta_0)\\&+\cos\beta(\cos\gamma_2\cos\alpha_0-\cos\alpha_2\cos\gamma_0)\\&+\cos\gamma(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos\alpha_0);\end{aligned}$$

Digitized by Google

so haben wir nach dem Vorhergehenden zur Bestimmung der Kräfte P_0, P_1, P_2 überhaupt die drei folgenden Gleichungen:

$$6) \quad \left\{\begin{array}{l} NP_0 = N_{12}P, \\ NP_1 = N_{20}P, \\ NP_2 = N_{01}P; \end{array}\right.$$

wobei man zu bemerken hat, dass die Grösse N nicht verschwindet, weil, wenn dies der Fall wäre, die drei gegebenen Richtungslinien in einer Ebene liegen würden, was gegen die Voraussetzung streitet:

Nach 6) ist:

$$N(P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2)=(N_{12}\cos\alpha_0+N_{20}\cos\alpha_1+N_{01}\cos\alpha_2)P,$$
$$N(P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1+P_2\cos\beta_2)=(N_{12}\cos\beta_0+N_{20}\cos\beta_1+N_{01}\cos\beta_2)P,$$
$$N(P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1+P_2\cos\gamma_2)=(N_{12}\cos\gamma_0+N_{20}\cos\gamma_1+N_{01}\cos\gamma_2)P;$$

aber, wie man leicht aus 4) und 5) schliesst:

$$N_{12}\cos\alpha_0+N_{20}\cos\alpha_1+N_{01}\cos\alpha_2=N\cos\alpha,$$
$$N_{12}\cos\beta_0+N_{20}\cos\beta_1+N_{01}\cos\beta_2=N\cos\beta,$$
$$N_{12}\cos\gamma_0+N_{20}\cos\gamma_1+N_{01}\cos\gamma_2=N\cos\gamma;$$

also:

$$N(P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2)=NP\cos\alpha,$$
$$N(P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1+P_2\cos\beta_2)=NP\cos\beta,$$
$$N(P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1+P_2\cos\gamma_2)=NP\cos\gamma;$$

und folglich, weil N nicht verschwindet:

$$7) \quad \left\{\begin{array}{l} P\cos\alpha=P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2, \\ P\cos\beta=P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1+P_2\cos\beta_2, \\ P\cos\gamma=P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1+P_2\cos\gamma_2; \end{array}\right.$$

woraus sich:

$$\begin{aligned} 8) \quad P^2 = \; & (P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2)^2 \\ & +(P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1+P_2\cos\beta_2)^2 \\ & +(P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1+P_2\cos\gamma_2)^2 \end{aligned}$$

Digitized by Google

oder, wie man leicht findet, wenn man die Quadrate entwickelt:

$$9)\quad \begin{aligned} P^2 = \ & P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 \\ & + 2P_0 P_1 (\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1) \\ & + 2P_1 P_2 (\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2) \\ & + 2P_2 P_0 (\cos\alpha_2\cos\alpha_0 + \cos\beta_2\cos\beta_0 + \cos\gamma_2\cos\gamma_0) \end{aligned}$$

ergiebt. Die Grössen:

$$\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1\,,$$

$$\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\beta_1\cos\beta_2 + \cos\gamma_1\cos\gamma_2\,,$$

$$\cos\alpha_2\cos\alpha_0 + \cos\beta_2\cos\beta_0 + \cos\gamma_2\cos\gamma_0$$

sind die Cosinus der von den positiven Theilen der drei gegebenen Richtungslinien eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel.

Nehmen wir in den durch die Gleichungen 2) charakterisirten Richtungslinien der drei gesuchten Kräfte P_0, P_1, P_2 beziehungsweise die beliebigen Punkte $(a_0 b_0 c_0)$, $(a_1 b_1 c_1)$, $(a_2 b_2 c_2)$ an, und bezeichnen deren gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernungen von dem Punkte (abc) beziehungsweise durch r_0, r_1, r_2; so ist nach §. 1. 5.):

$$\cos\alpha_0 = \frac{a_0 - a}{r_0},\quad \cos\beta_0 = \frac{b_0 - b}{r_0},\quad \cos\gamma_0 = \frac{c_0 - c}{r_0};$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{a_1 - a}{r_1},\quad \cos\beta_1 = \frac{b_1 - b}{r_1},\quad \cos\gamma_1 = \frac{c_1 - c}{r_1};$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{a_2 - a}{r_2},\quad \cos\beta_2 = \frac{b_2 - b}{r_2},\quad \cos\gamma_2 = \frac{c_2 - c}{r_2};$$

also nach 7):

$$10)\ldots \left\{ \begin{aligned} P\cos\alpha &= P_0\frac{a_0 - a}{r_0} + P_1\frac{a_1 - a}{r_1} + P_2\frac{a_2 - a}{r_2}, \\ P\cos\beta &= P_0\frac{b_0 - b}{r_0} + P_1\frac{b_1 - b}{r_1} + P_2\frac{b_2 - b}{r_2}, \\ P\cos\gamma &= P_0\frac{c_0 - c}{r_0} + P_1\frac{c_1 - c}{r_1} + P_2\frac{c_2 - c}{r_2}. \end{aligned} \right.$$

Digitized by Google

Ueber die Richtungen der positiven oder negativen Kräfte P_0, P_1, P_2 mit Rücksicht auf die Lage der Punkte (abc), $(a_0b_0c_0)$: (abc), $(a_1b_1c_1)$; (abc), $(a_2b_2c_2)$ ist schon in §. 1. das Nöthige bemerkt worden.

§. 4.

Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht zwischen zwei Kräften.

Wenn, wie wir jetzt annehmen wollen, zwei Kräfte P_0, P_1 mit einander im Gleichgewichte sind, so müssen ihre Richtungslinien in eine Gerade zusammenfallen. Fielen nämlich die Richtungslinien nicht in eine Gerade zusammen, so würden sich in denselben offenbar immer zwei Punkte A_0, A_1 so annehmen lassen, dass die Gerade A_0A_1 wenigstens mit der einen der beiden Richtungslinien nicht zusammenfällt, weshalb wir jetzt annehmen wollen, dass A_0A_1 mit der Richtungslinie der Kraft P_0 nicht zusammenfällt. Weil nach der Voraussetzung die Kräfte P_0, P_1 im Gleichgewichte sind, so wird das System auch dann noch in Ruhe bleiben, wenn man sich den Punkt A_1 als fest denkt. Die Kraft P_0, deren Richtung mit A_0A_1 nicht zusammenfällt, kann man in dem Punkte A_0 in zwei Kräfte zerlegen, von denen die eine, welche auch verschwinden kann, im Allgemeinen in die Gerade A_0A_1 fällt, und also jedenfalls von dem festen Punkte A_1 vollständig aufgehoben wird, die andere, welche nie verschwinden kann, auf A_0A_1 senkrecht steht; diese letztere allein übrig bleibende, nie verschwindende Kraft muss also nothwendig eine Drehung des Systems um den Punkt A_1 hervorbringen, was gegen das Obige streitet. Daher fallen die Richtungslinien der beiden sich im Gleichgewichte befindenden Kräfte P_0, P_1 in eine Gerade zusammen, wie behauptet wurde. Dass nun aber ferner im Falle des Gleichgewichts die Kräfte P_0, P_1 einander absolut gleich sein und nach entgegengesetzten Richtungen hin wirken müssen, fällt auf der Stelle in die Augen, weil, wenn dies nicht der Fall wäre, die beiden Kräfte sich offenbar auf eine nicht verschwindende Resultirende zurückführen lassen würden, also nicht im Gleichgewichte sein könnten, wie doch vorausgesetzt wurde.

Um nun Dieses analytisch auszudrücken, wollen wir annehmen, dass

$$1) \ldots \ldots \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x-x_0}{\cos\alpha_0}=\dfrac{y-y_0}{\cos\beta_0}=\dfrac{z-z_0}{\cos\gamma_0}, \\[2ex] \dfrac{x-x_1}{\cos\alpha_1}=\dfrac{y-y_1}{\cos\beta_1}=\dfrac{z-z_1}{\cos\gamma_1} \end{array} \right.$$

Digitized by Google

die Gleichungen der Richtungslinien der beiden Kräfte P_0, P_1 seien. Weil nach der Voraussetzung diese beiden Kräfte im Gleichgewichte sind, so fallen nach dem Obigen die Richtungslinien in eine Gerade zusammen. Nehmen wir in den Richtungslinien zwei beliebige Punkte $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ und $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ an, so ist nach 1):

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi_0 - x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{\eta_0 - y_0}{\cos\beta_0} = \frac{\zeta_0 - z_0}{\cos\gamma_0}, \\ \frac{\xi_1 - x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{\eta_1 - y_1}{\cos\beta_1} = \frac{\zeta_1 - z_1}{\cos\gamma_1}. \end{array} \right.$$

Bezeichnen wir die gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernung des Punktes $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ von dem Punkte $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$, indem wir diese Punkte in der Richtungslinie der Kraft P_0 liegend annehmen, durch r_0; die gehörig als positiv oder negativ betrachtete Entfernung des Punktes $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ von dem Punkte $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$, indem wir diese Punkte in der Richtungslinie der Kraft P_1 liegend annehmen, durch r_1; so ist nach §. 1. 4):

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\xi_1 - \xi_0}{\cos\alpha_0} = \frac{\eta_1 - \eta_0}{\cos\beta_0} = \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{\cos\gamma_0} = r_0, \\ \frac{\xi_0 - \xi_1}{\cos\alpha_1} = \frac{\eta_0 - \eta_1}{\cos\beta_1} = \frac{\zeta_0 - \zeta_1}{\cos\gamma_1} = r_1; \end{array} \right.$$

folglich:

$$\xi_1 - \xi_0 = r_0 \cos\alpha_0,$$

$$\eta_1 - \eta_0 = r_0 \cos\beta_0,$$

$$\zeta_1 - \zeta_0 = r_0 \cos\gamma_0$$

und:

$$\xi_0 - \xi_1 = r_1 \cos\alpha_1,$$

$$\eta_0 - \eta_1 = r_1 \cos\beta_1,$$

$$\zeta_0 - \zeta_1 = r_1 \cos\gamma_1;$$

also, wenn man addirt:

$$r_0 \cos\alpha_0 + r_1 \cos\alpha_1 = 0,$$

$$r_0 \cos\beta_0 + r_1 \cos\beta_1 = 0,$$

$$r_0 \cos\gamma_0 + r_1 \cos\gamma_1 = 0;$$

oder:

Digitized by Google

$$\cos\alpha_0 + \frac{r_1}{r_0}\cos\alpha_1 = 0,$$

$$\cos\beta_0 + \frac{r_1}{r_0}\cos\beta_1 = 0,$$

$$\cos\gamma_0 + \frac{r_1}{r_0}\cos\gamma_1 = 0.$$

Weil nun aber nach dem Obigen die Kräfte P_0, P_1 absolut gleich sind und nach entgegengesetzten Richtungen hin wirken, so ist, wie leicht erhellet, in völliger Allgemeinheit:

$$\frac{r_1}{r_0} = \frac{P_1}{P_0},$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\cos\alpha_0 + \frac{P_1}{P_0}\cos\alpha_1 = 0,$$

$$\cos\beta_0 + \frac{P_1}{P_0}\cos\beta_1 = 0,$$

$$\cos\gamma_0 + \frac{P_1}{P_0}\cos\gamma_1 = 0;$$

folglich:

$$4) \quad \ldots\ldots \quad \left\{\begin{array}{l} P_0\cos\alpha_0 + P_1\cos\alpha_1 = 0, \\ P_0\cos\beta_0 + P_1\cos\beta_1 = 0, \\ P_0\cos\gamma_0 + P_1\cos\gamma_1 = 0. \end{array}\right.$$

Ferner ist nach 3):

$$\cos\alpha_0 = \frac{\xi_1 - \xi_0}{r_0}, \quad \cos\beta_0 = \frac{\eta_1 - \eta_0}{r_0}, \quad \cos\gamma_0 = \frac{\zeta_1 - \zeta_0}{r_0}$$

und:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\xi_0 - \xi_1}{r_1}, \quad \cos\beta_1 = \frac{\eta_0 - \eta_1}{r_1}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{\zeta_0 - \zeta_1}{r_1};$$

also:

$$P_0(\xi_0\cos\beta_0 - \eta_0\cos\alpha_0) = \frac{P_0}{r_0}\{\xi_0(\eta_1 - \eta_0) - \eta_0(\xi_1 - \xi_0)\},$$

$$P_0(\eta_0\cos\gamma_0 - \zeta_0\cos\beta_0) = \frac{P_0}{r_0}\{\eta_0(\zeta_1 - \zeta_0) - \zeta_0(\eta_1 - \eta_0)\},$$

$$P_0(\zeta_0\cos\alpha_0 - \xi_0\cos\gamma_0) = \frac{P_0}{r_0}\{\zeta_0(\xi_1 - \xi_0) - \xi_0(\zeta_1 - \zeta_0)\}$$

Digitized by Google

und:

$$P_1(\xi_1 \cos\beta_1 - \eta_1 \cos\alpha_1) = \frac{P_1}{r_1}\{\xi_1(\eta_0 - \eta_1) - \eta_1(\xi_0 - \xi_1)\},$$

$$P_1(\eta_1 \cos\gamma_1 - \zeta_1 \cos\beta_1) = \frac{P_1}{r_1}\{\eta_1(\zeta_0 - \zeta_1) - \zeta_1(\eta_0 - \eta_1)\},$$

$$P_1(\zeta_1 \cos\alpha_1 - \xi_1 \cos\gamma_1) = \frac{P_1}{r_1}\{\zeta_1(\xi_0 - \xi_1) - \xi_1(\zeta_0 - \zeta_1)\};$$

folglich, wenn man addirt, weil

$$\frac{P_0}{r_0} = \frac{P_1}{r_1}$$

ist:

$$P_0(\xi_0 \cos\beta_0 - \eta_0 \cos\alpha_0) + P_1(\xi_1 \cos\beta_1 - \eta_1 \cos\alpha_1) = 0,$$
$$P_0(\eta_0 \cos\gamma_0 - \zeta_0 \cos\beta_0) + P_1(\eta_1 \cos\gamma_1 - \zeta_1 \cos\beta_1) = 0,$$
$$P_0(\zeta_0 \cos\alpha_0 - \xi_0 \cos\gamma_0) + P_1(\zeta_1 \cos\alpha_1 - \xi_1 \cos\gamma_1) = 0.$$

Nach 2) ist aber:

$$\xi_0 \cos\beta_0 - \eta_0 \cos\alpha_0 = x_0 \cos\beta_0 - y_0 \cos\alpha_0,$$
$$\eta_0 \cos\gamma_0 - \zeta_0 \cos\beta_0 = y_0 \cos\gamma_0 - z_0 \cos\beta_0,$$
$$\zeta_0 \cos\alpha_0 - \xi_0 \cos\gamma_0 = z_0 \cos\alpha_0 - x_0 \cos\gamma_0$$

und:

$$\xi_1 \cos\beta_1 - \eta_1 \cos\alpha_1 = x_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\alpha_1,$$
$$\eta_1 \cos\gamma_1 - \zeta_1 \cos\beta_1 = y_1 \cos\gamma_1 - z_1 \cos\beta_1,$$
$$\zeta_1 \cos\alpha_1 - \xi_1 \cos\gamma_1 = z_1 \cos\alpha_1 - x_1 \cos\gamma_1;$$

also nach dem Obigen:

$$P_0(x_0 \cos\beta_0 - y_0 \cos\alpha_0) + P_1(x_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\alpha_1) = 0,$$
$$P_0(y_0 \cos\gamma_0 - z_0 \cos\beta_0) + P_1(y_1 \cos\gamma_1 - z_1 \cos\beta_1) = 0,$$
$$P_0(z_0 \cos\alpha_0 - x_0 \cos\gamma_0) + P_1(z_1 \cos\alpha_1 - x_1 \cos\gamma_1) = 0.$$

Hieraus ergiebt sich nun der folgende Satz:

Wenn die Kräfte P_0, P_1, deren Richtungslinien durch die Gleichungen:

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha_0}=\frac{y-y_0}{\cos\beta_0}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma_1}$$

charakterisirt werden, im Gleichgewichte sind, so ist:

$$P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1=0,$$
$$P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1=0,$$
$$P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1=0;$$

$$P_0(x_0\cos\beta_0-y_0\cos\alpha_0)+P_1(x_1\cos\beta_1-y_1\cos\alpha_1)=0,$$
$$P_0(y_0\cos\gamma_0-z_0\cos\beta_0)+P_1(y_1\cos\gamma_1-z_1\cos\beta_1)=0,$$
$$P_0(z_0\cos\alpha_0-x_0\cos\gamma_0)+P_1(z_1\cos\alpha_1-x_1\cos\gamma_1)=0;$$

oder in abkürzender Schreibweise:

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\quad \Sigma P\cos\beta=0,\quad \Sigma P\cos\gamma=0;$$

$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0,$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)=0,$$
$$\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0.$$

Wir wollen jetzt untersuchen, ob sich dieser Satz auch umkehren lässt, nämlich: ob, wenn die vorstehenden sechs Gleichungen erfüllt sind, sich behaupten lässt, dass die Kräfte P_0, P_1 im Gleichgewichte sind.

Aus den Gleichungen:

$$P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1=0,$$
$$P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1=0,$$
$$P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1=0$$

folgt:

$$P_0\cos\alpha_0=-P_1\cos\alpha_1,$$
$$P_0\cos\beta_0=-P_1\cos\beta_1,$$
$$P_0\cos\gamma_0=-P_1\cos\gamma_1;$$

also, wenn man diese Gleichungen quadrirt und dann zu einander addirt:

Digitized by Google

$$P_0^2 = P_1^2,$$

folglich:

$$P_1 = \pm P_0,$$

und daher nach Vorstehendem:

$$\cos\alpha_1 = \mp\cos\alpha_0,$$

$$\cos\beta_1 = \mp\cos\beta_0,$$

$$\cos\gamma_1 = \mp\cos\gamma_0;$$

also:

$$\alpha_1 = \begin{cases} 180^0 - \alpha_0 \\ \alpha_0 \end{cases}$$

$$\beta_1 = \begin{cases} 180^0 - \beta_0 \\ \beta_0 \end{cases}$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} 180^0 - \gamma_0 \\ \gamma_0 \end{cases}$$

immer mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander. Hieraus ergiebt sich mittelst einer sehr einfachen Betrachtung sogleich, dass die Kräfte P_0, P_1 absolut gleich und dass ihre Richtungslinien einander parallel sind, dass sie aber nach entgegengesetzten Seiten hin wirken.

Ferner ergiebt sich aus den Gleichungen:

$$P_0(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) + P_1(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) = 0,$$

$$P_0(y_0\cos\gamma_0 - z_0\cos\beta_0) + P_1(y_1\cos\gamma_1 - z_1\cos\beta_1) = 0,$$

$$P_0(z_0\cos\alpha_0 - x_0\cos\gamma_0) + P_1(z_1\cos\alpha_1 - x_1\cos\gamma_1) = 0$$

mittelst des Vorhergehenden, wenn man nämlich für

$$P_1 \text{ und } \cos\alpha_1,\quad \cos\beta_1,\quad \cos\gamma_1$$

respective

$$\pm P_0 \text{ und } \mp\cos\alpha_0,\quad \mp\cos\beta_0,\quad \mp\cos\gamma_0$$

setzt:

$$x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0 - (x_1\cos\beta_0 - y_1\cos\alpha_0) = 0,$$

$$y_0\cos\gamma_0 - z_0\cos\beta_0 - (y_1\cos\gamma_0 - z_1\cos\beta_0) = 0,$$

$$z_0\cos\alpha_0 - x_0\cos\gamma_0 - (z_1\cos\alpha_0 - x_1\cos\gamma_0) = 0;$$

und wenn man für

Digitized by Google

$$P_0 \text{ und } \cos\alpha_0, \quad \cos\beta_0, \quad \cos\gamma_0$$

respective

$$\pm P_1 \text{ und } \mp\cos\alpha_1, \quad \mp\cos\beta_1, \quad \mp\cos\gamma_1:$$

setzt:

$$-(x_0\cos\beta_1 - y_0\cos\alpha_1) + (x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) = 0,$$

$$-(y_0\cos\gamma_1 - z_0\cos\beta_1) + (y_1\cos\gamma_1 - z_1\cos\beta_1) = 0,$$

$$-(z_0\cos\alpha_1 - x_0\cos\gamma_1) + (z_1\cos\alpha_1 - x_1\cos\gamma_1) = 0.$$

Daher haben wir die Gleichungen:

$$x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0 = x_1\cos\beta_0 - y_1\cos\alpha_0,$$

$$y_0\cos\gamma_0 - z_0\cos\beta_0 = y_1\cos\gamma_0 - z_1\cos\beta_0,$$

$$z_0\cos\alpha_0 - x_0\cos\gamma_0 = z_1\cos\alpha_0 - x_1\cos\gamma_0$$

und:

$$x_0\cos\beta_1 - y_0\cos\alpha_1 = x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1,$$

$$y_0\cos\gamma_1 - z_0\cos\beta_1 = y_1\cos\gamma_1 - z_1\cos\beta_1,$$

$$z_0\cos\alpha_1 - x_0\cos\gamma_1 = z_1\cos\alpha_1 - x_1\cos\gamma_1;$$

also die Gleichungen:

$$(x_1 - x_0)\cos\beta_0 = (y_1 - y_0)\cos\alpha_0,$$

$$(y_1 - y_0)\cos\gamma_0 = (z_1 - z_0)\cos\beta_0,$$

$$(z_1 - z_0)\cos\alpha_0 = (x_1 - x_0)\cos\gamma_0$$

und:

$$(x_0 - x_1)\cos\beta_1 = (y_0 - y_1)\cos\alpha_1,$$

$$(y_0 - y_1)\cos\gamma_1 = (z_0 - z_1)\cos\beta_1,$$

$$(z_0 - z_1)\cos\alpha_1 = (x_0 - x_1)\cos\gamma_1;$$

oder die Gleichungen:

$$\frac{x_1 - x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{y_1 - y_0}{\cos\beta_0} = \frac{z_1 - z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\frac{x_0 - x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{y_0 - y_1}{\cos\beta_1} = \frac{z_0 - z_1}{\cos\gamma_1}.$$

Vergleicht man diese Gleichungen mit den Gleichungen 1), so

Digitized by Google

überzeugt man sich auf der Stelle, dass der in der Richtungslinie der Kraft P_1 liegende Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ in der Richtungslinie der Kraft P_0 und der in der Richtungslinie der Kraft P_0 liegende Punkt $(x_0 y_0 z_0)$ in der Richtungslinie der Kraft P_1 liegt, so dass also die Richtungslinien der Kräfte P_0, P_1 mit einander zusammenfallen.

Aus allem Bisherigen ergiebt sich ganz unzweideutig, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Kräfte P_0, P_1 absolut gleich sind und nach direct entgegengesetzten Richtungen hin wirken, sich also im Gleichgewichte befinden; daher haben wir den folgenden Satz:

Wenn

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha_0}=\frac{y-y_0}{\cos\beta_0}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma_1}$$

die Gleichungen der Richtungslinien der Kräfte P_0, P_1 sind, und die Gleichungen:

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\quad \Sigma P\cos\beta=0,\quad \Sigma P\cos\gamma=0;$$

$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0,$$

$$\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)=0,$$

$$\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0$$

Statt finden; so sind die beiden Kräfte P_0, P_1 im Gleichgewichte.

Aus den beiden vorhergehenden Sätzen ergiebt sich nun aber der folgende Satz:

Wenn die Gleichungen der Richtungslinien der zwei Kräfte P_0, P_1:

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha_0}=\frac{y-y_0}{\cos\beta_0}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma_1}$$

sind, so sind:

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\quad \Sigma P\cos\beta=0,\quad \Sigma P\cos\gamma=0;$$

Digitized by Google

$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0,$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0,$$
$$\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0$$

die **nothwendigen** Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht dieser zwei Kräfte.

§. 5.

Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht zwischen drei Kräften.

Wenn drei Kräfte P_0, P_1, P_2 im Gleichgewichte sind, so müssen ihre Richtungslinien immer in einer Ebene liegen. Wir wollen einmal annehmen, die Richtungen der drei sich im Gleichgewichte befindenden Kräfte P_0, P_1, P_2 lägen nicht in einer Ebene. Nehmen wir dann in den Richtungslinien drei Punkte A_0, A_1, A_2 an, so liegen diese drei Punkte entweder nicht in einer geraden Linie, oder dieselben liegen in einer geraden Linie. Wäre das Letztere der Fall, so würde immer mindestens eine der drei Richtungslinien nicht mit dieser Geraden zusammenfallen, weil, wenn mit dieser Geraden alle drei Richtungslinien zusammenfielen, die drei Richtungslinien in einer Ebene liegen würden, was gegen die Annahme ist. Fällt nun etwa die Richtungslinie der Kraft P_2 nicht mit der in Rede stehenden Geraden zusammen, so nehme man in dieser Richtungslinie einen von A_2 verschiedenen Punkt A_2' an; dann sind A_0, A_1, A_2' drei Punkte in den Richtungslinien der drei Kräfte, die nicht in einer Geraden liegen, so dass man also in den Richtungslinien der drei Kräfte immer drei nicht in gerader Linie liegende, also ein Dreieck bildende Punkte annehmen kann, welche wir von jetzt an durch A_0, A_1, A_2 bezeichnen wollen. Nun muss es unter den Richtungslinien immer mindestens eine geben, welche nicht in der Ebene des Dreiecks $A_0A_1A_2$ liegt, weil im entgegengesetzten Falle alle drei Richtungslinien in einer Ebene liegen würden, was gegen die Annahme ist. Diese Kraft, deren Richtungslinie nicht in der Ebene des Dreiecks $A_0A_1A_2$ liegt, sei etwa P_2. Weil nach der Voraussetzung die Kräfte P_0, P_1, P_2 im Gleichgewichte sind, so muss das System auch dann noch in Ruhe sein, wenn man sich A_0A_1 als eine feste Axe denkt. Die Kraft P_2 aber, deren Richtungslinie nicht in der Ebene des Dreiecks $A_0A_1A_2$ liegt, kann man im Punkte A_2 in zwei Kräfte zerlegen, von denen die eine in der Ebene $A_0A_1A_2$ wirkt, die andere

Digitized by Google

jedenfalls nicht verschwindende Kraft auf dieser Ebene senkrecht steht; da nun die erstere Kraft von der festen Axe $A_0 A_1$ ganz aufgehoben wird, so bleibt bloss die letztere auf der Ebene $A_0 A_1 A_2$ senkrecht stehende nicht verschwindende Kraft übrig, welche offenbar nothwendig eine Drehung des Systems um die feste Axe $A_0 A_1$ hervorbringen muss, so dass dasselbe also nicht in Ruhe sein kann, was es nach dem Obigen doch sein müsste. Es ist also falsch, dass unter der Voraussetzung, dass die Kräfte P_0, P_1, P_2 sich im Gleichgewichte befinden, deren Richtungslinien nicht in einer Ebene liegen könnten, und diese Richtungslinien müssen also unter der in Rede stehenden Voraussetzung jederzeit in einer Ebene liegen, wie behauptet wurde.

Wir wollen jetzt wieder annehmen, dass die Kräfte P_0, P_1, P_2 sich im Gleichgewichte befinden, und dass also ihre drei Richtungslinien nach dem so eben Bewiesenen in einer Ebene liegen. Unter der Voraussetzung nun, dass in den Richtungslinien der drei Kräfte sich drei nicht in gerader Linie liegende, also ein Dreieck bestimmende Punkte A_0, A_1, A_2 annehmen lassen, kann man die Kraft P_0 in dem Punkte A_0 in zwei in den Richtungslinien A_0A_1, A_2A_0; die Kraft P_1 in dem Punkte A_1 in zwei in den Richtungslinien A_1A_2, A_0A_1; die Kraft P_2 in dem Punkte A_2 in zwei in den Richtungslinien A_2A_0, A_1A_2 wirkende Kräfte zerlegen; und es lässt sich nun leicht übersehen, dass jede der zwei in den Richtungslinien A_0A_1, A_1A_2, A_2A_0 wirkenden Kräfte einander gleich und direct entgegengesetzt sein müssen. Weil nämlich die Kräfte P_0, P_1, P_2 nach der Voraussetzung im Gleichgewichte sind, so sind auch die sämmtlichen in den Richtungslinien A_0A_1, A_1A_2, A_2A_0 wirkenden Kräfte im Gleichgewichte, und das System muss also auch dann noch in Ruhe bleiben, wenn man sich einen der drei Punkte A_0, A_1, A_2 als fest denkt. Denken wir uns aber etwa den Punkt A_2 als fest, so werden von diesem festen Punkte die in den Richtungslinien A_1A_2, A_2A_0 wirkenden Kräfte ganz aufgehoben, und es bleiben bloss die beiden in der Richtungslinie A_0A_1 wirkenden Kräfte übrig; wären nun diese beiden Kräfte nicht einander gleich und direct entgegengesetzt, so würden sie sich jederzeit auf eine in der Richtungslinie A_0A_1 wirkende nicht verschwindende Kraft reduciren, welche nothwendig eine Drehung des Systems um den festen Punkt A_2 hervorbringen müsste, was mit dem Obigen, wonach das System sich in Ruhe befindet, im Widerspruch steht. Also sind die in der Richtungslinie A_0A_1 wirkenden Kräfte einander gleich und direct entgegengesetzt, was in ganz gleicher Weise auch von den in den Richtungslinien A_1A_2 und A_2A_0 wirkenden Kräften gezeigt wer-

Digitized by Google

den kann, so dass also hierdurch unsere obige Behauptung vollständig bewiesen ist.

Die Gleichungen der Richtungslinien der drei Kräfte P_0, P_1, P_2 seien beziehungsweise:

$$1)\ \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} \frac{x-x_0}{\cos\alpha_0}=\frac{y-y_0}{\cos\beta_0}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma_0}, \\ \frac{x-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma_1}, \\ \frac{x-x_2}{\cos\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\cos\beta_2}=\frac{z-z_2}{\cos\gamma_2}; \end{array}\right.$$

wobei wir annehmen wollen, dass diese Richtungslinien nicht sämmtlich unter einander zusammenfallen, unter welcher Voraussetzung sich in denselben offenbar immer drei nicht in gerader Linie liegende, also ein Dreieck bestimmende Punkte A_0, A_1, A_2 annehmen lassen, deren Coordinaten wir durch ξ_0, η_0, ζ_0; ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2 bezeichnen wollen, und in die wir uns die Kräfte P_0, P_1, P_2 versetzt denken können.

Unter der Voraussetzung, dass die drei Kräfte P_0, P_1, P_2 unter einander im Gleichgewichte sind, müssen nach dem Obigen ihre Richtungslinien in einer Ebene liegen, und diese Ebene muss also mit der Ebene des Dreiecks $A_0A_1A_2$ zusammenfallen.

Die als positiv betrachteten Seiten

$$A_0A_1,\quad A_1A_2,\quad A_2A_0$$

des Dreiecks $A_0A_1A_2$ bezeichnen wir beziehungsweise durch

$$r_{01},\quad r_{12},\quad r_{20}.$$

Die in dem Punkte A_0 wirkende Kraft P_0 zerlegen wir in zwei Kräfte nach den Richtungslinien A_0A_1 und A_2A_0, und bezeichnen dieselben, indem wir sie als positiv oder negativ betrachten, jenachdem sie von A_0 nach A_1 und A_2 oder nach den entgegengesetzten Seiten hin wirken, durch P_{01} und P_{02}; dann ist nach §. 2. 13):

$$2)\ \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} P_0\cos\alpha_0=P_{01}\frac{\xi_1-\xi_0}{r_{01}}+P_{02}\frac{\xi_2-\xi_0}{r_{20}}, \\ P_0\cos\beta_0=P_{01}\frac{\eta_1-\eta_0}{r_{01}}+P_{02}\frac{\eta_2-\eta_0}{r_{20}}, \\ P_0\cos\gamma_0=P_{01}\frac{\zeta_1-\zeta_0}{r_{01}}+P_{02}\frac{\zeta_2-\zeta_0}{r_{20}}. \end{array}\right.$$

Digitized by Google

Die in dem Punkte A_1 wirkende Kraft P_1 zerlegen wir in zwei Kräfte nach den Richtungslinien A_1A_2 und A_0A_1, und bezeichnen dieselbe, indem wir sie als positiv oder negativ betrachten, jenachdem sie von A_1 nach A_2 und A_0 oder nach den entgegengesetzten Seiten hin wirken, durch P_{12} und P_{10}; dann ist nach §. 2. 13):

$$3) \ldots \left\{ \begin{aligned} P_1 \cos\alpha_1 &= P_{12}\frac{\xi_2-\xi_1}{r_{12}} + P_{10}\frac{\xi_0-\xi_1}{r_{01}}, \\ P_1 \cos\beta_1 &= P_{12}\frac{\eta_2-\eta_1}{r_{12}} + P_{10}\frac{\eta_0-\eta_1}{r_{01}}, \\ P_1 \cos\gamma_1 &= P_{12}\frac{\zeta_2-\zeta_1}{r_{12}} + P_{10}\frac{\zeta_0-\zeta_1}{r_{01}}. \end{aligned} \right.$$

Die in dem Punkte A_2 wirkende Kraft P_2 zerlegen wir in zwei Kräfte nach den Richtungslinien A_2A_0 und A_1A_2, und bezeichnen dieselben, indem wir sie als positiv oder negativ betrachten, jenachdem sie von A_2 nach A_0 und A_1 oder nach den entgegengesetzten Seiten hin wirken, durch P_{20} und P_{21}; dann ist nach §. 2. 13):

$$4) \ldots \left\{ \begin{aligned} P_2 \cos\alpha_2 &= P_{20}\frac{\xi_0-\xi_2}{r_{20}} + P_{21}\frac{\xi_1-\xi_2}{r_{12}}, \\ P_2 \cos\beta_2 &= P_{20}\frac{\eta_0-\eta_2}{r_{20}} + P_{21}\frac{\eta_1-\eta_2}{r_{12}}, \\ P_2 \cos\gamma_2 &= P_{20}\frac{\zeta_0-\zeta_2}{r_{20}} + P_{21}\frac{\zeta_1-\zeta_2}{r_{12}}. \end{aligned} \right.$$

Durch Addition der vorhergehenden Gleichungen erhält man:

$$P_0\cos\alpha_0 + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2$$

$$= (P_{01}-P_{10})\frac{\xi_1-\xi_0}{r_{01}} + (P_{12}-P_{21})\frac{\xi_2-\xi_1}{r_{12}} + (P_{20}-P_{02})\frac{\xi_0-\xi_2}{r_{20}},$$

$$P_0\cos\beta_0 + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2$$

$$= (P_{01}-P_{10})\frac{\eta_1-\eta_0}{r_{01}} + (P_{12}-P_{21})\frac{\eta_2-\eta_1}{r_{12}} + (P_{20}-P_{02})\frac{\eta_0-\eta_2}{r_{20}},$$

$$P_0\cos\gamma_0 + P_1\cos\gamma_1 + P_2\cos\gamma_2$$

$$= (P_{01}-P_{10})\frac{\zeta_1-\zeta_0}{r_{01}} + (P_{12}-P_{21})\frac{\zeta_2-\zeta_1}{r_{12}} + (P_{20}-P_{02})\frac{\zeta_0-\zeta_2}{r_{20}}.$$

Digitized by Google

Weil nun aber nach der Voraussetzung die Kräfte P_0, P_1, P_2 im Gleichgewichte sind, so ist nach dem oben Bewiesenen mit Rücksicht auf die vorher gegebenen Bestimmungen:

$$P_{01}=P_{10},\quad P_{12}=P_{21},\quad P_{20}=P_{02};$$

also nach vorstehenden Gleichungen:

$$5)\ \ldots\ \left\{\begin{array}{l} P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2=0,\\ P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1+P_2\cos\beta_2=0,\\ P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1+P_2\cos\gamma_2=0. \end{array}\right.$$

Ferner erhält man aus den Gleichungen 2), 3), 4):

$$\begin{aligned} P_0(\xi_0\cos\beta_0-\eta_0\cos\alpha_0)= \quad & P_{01}\left\{\frac{\xi_0(\eta_1-\eta_0)}{r_{01}}-\frac{\eta_0(\xi_1-\xi_0)}{r_{01}}\right\}\\ &+P_{02}\left\{\frac{\xi_0(\eta_2-\eta_0)}{r_{20}}-\frac{\eta_0(\xi_2-\xi_0)}{r_{20}}\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_1(\xi_1\cos\beta_1-\eta_1\cos\alpha_1)= \quad & P_{12}\left\{\frac{\xi_1(\eta_2-\eta_1)}{r_{12}}-\frac{\eta_1(\xi_2-\xi_1)}{r_{12}}\right\}\\ &+P_{10}\left\{\frac{\xi_1(\eta_0-\eta_1)}{r_{01}}-\frac{\eta_1(\xi_0-\xi_1)}{r_{01}}\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2(\xi_2\cos\beta_2-\eta_2\cos\alpha_2)= \quad & P_{20}\left\{\frac{\xi_2(\eta_0-\eta_2)}{r_{20}}-\frac{\eta_2(\xi_0-\xi_2)}{r_{20}}\right\}\\ &+P_{21}\left\{\frac{\xi_2(\eta_1-\eta_2)}{r_{12}}-\frac{\eta_2(\xi_1-\xi_2)}{r_{12}}\right\}; \end{aligned}$$

also, wenn man addirt, weil:

$$P_{01}=P_{10},\quad P_{12}=P_{21},\quad P_{20}=P_{02}$$

ist:

$$\left.\begin{array}{r} P_0(\xi_0\cos\beta_0-\eta_0\cos\alpha_0)\\ +P_1(\xi_1\cos\beta_1-\eta_1\cos\alpha_1)\\ +P_2(\xi_2\cos\beta_2-\eta_2\cos\alpha_2) \end{array}\right\}=0;$$

weil nun aber nach 1):

Digitized by Google

$$\frac{\xi_0 - x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{\eta_0 - y_0}{\cos\beta_0} = \frac{\zeta_0 - z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\frac{\xi_1 - x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{\eta_1 - y_1}{\cos\beta_1} = \frac{\zeta_1 - z_1}{\cos\gamma_1},$$

$$\frac{\xi_2 - x_2}{\cos\alpha_2} = \frac{\eta_2 - y_2}{\cos\beta_2} = \frac{\zeta_2 - z_2}{\cos\gamma_2}$$

und folglich:

$$\xi_0\cos\beta_0 - \eta_0\cos\alpha_0 = x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0,$$

$$\xi_1\cos\beta_1 - \eta_1\cos\alpha_1 = x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1,$$

$$\xi_2\cos\beta_2 - \eta_2\cos\alpha_2 = x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2$$

ist, so ist nach dem Obigen:

$$\left.\begin{array}{r} P_0(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) \\ +P_1(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) \\ +P_2(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2) \end{array}\right\} = 0,$$

und wir haben daher jetzt überhaupt die folgenden Gleichungen:

6)

$$\left.\begin{array}{r} P_0(x_0\cos\beta_0 - y_0\cos\alpha_0) \\ +P_1(x_1\cos\beta_1 - y_1\cos\alpha_1) \\ +P_2(x_2\cos\beta_2 - y_2\cos\alpha_2) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r} P_0(y_0\cos\gamma_0 - z_0\cos\beta_0) \\ +P_1(y_1\cos\gamma_1 - z_1\cos\beta_1) \\ +P_2(y_2\cos\gamma_2 - z_2\cos\beta_2) \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{r} P_0(z_0\cos\alpha_0 - x_0\cos\gamma_0) \\ +P_1(z_1\cos\alpha_1 - x_1\cos\gamma_1) \\ +P_2(z_2\cos\alpha_2 - x_2\cos\gamma_2) \end{array}\right\} = 0.$$

Aus den Gleichungen 5) und 6) ergiebt sich jetzt also der folgende Satz:

Wenn die drei Kräfte P_0, P_1, P_2, deren nicht sämmtlich zusammenfallende Richtungslinien durch die Gleichungen:

Digitized by Google

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha_0}=\frac{y-y_0}{\cos\beta_0}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma_1},$$

$$\frac{x-x_2}{\cos\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\cos\beta_2}=\frac{z-z_2}{\cos\gamma_2}$$

charakerisirt werden, unter einander im Gleichgewichte sind; so ist immer:

$$P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2=0,$$
$$P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1+P_2\cos\beta_2=0,$$
$$P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1+P_2\cos\gamma_2=0$$

und:

$$\left.\begin{array}{r}P_0(x_0\cos\beta_0-y_0\cos\alpha_0)\\+P_1(x_1\cos\beta_1-y_1\cos\alpha_1)\\+P_2(x_2\cos\beta_2-y_2\cos\alpha_2)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}P_0(y_0\cos\gamma_0-z_0\cos\beta_0)\\+P_1(y_1\cos\gamma_1-z_1\cos\beta_1)\\+P_2(y_2\cos\gamma_2-z_2\cos\beta_2)\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{r}P_0(z_0\cos\alpha_0-x_0\cos\gamma_0)\\+P_1(z_1\cos\alpha_1-x_1\cos\gamma_1)\\+P_2(z_2\cos\alpha_2-x_2\cos\gamma_2)\end{array}\right\}=0;$$

oder in abkürzender Schreibweise:

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\quad \Sigma P\cos\beta=0,\quad \Sigma P\cos\gamma=0;$$

$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0,$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)=0,$$
$$\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0.$$

Wir wollen nun untersuchen, ob sich dieser Satz auch umkehren lässt, nämlich: ob, wenn diese sechs Gleichungen erfüllt sind, sich immer schliessen lässt, dass dann die Kräfte P_0, P_1, P_2,

Digitized by Google

unter einander im Gleichgewichte sind, wobei alle Grössen die ihnen im Vorhergehenden beigelegten Bedeutungen behalten sollen.

Zuerst bemerken wir, dass, wenn die sechs obigen Gleichungen erfüllt sind, dann immer auch die sechs Gleichungen:

7)

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\quad \Sigma P\cos\beta=0,\quad \Sigma P\cos\gamma=0;$$

$$\Sigma P(\xi\cos\beta-\eta\cos\alpha)=0,$$

$$\Sigma P(\eta\cos\gamma-\zeta\cos\beta)=0,$$

$$\Sigma P(\zeta\cos\alpha-\xi\cos\gamma)=0$$

erfüllt sind, was aus dem Vorhergehenden ohne Weiteres und ganz von selbst hervorgeht.

Wenn wir die Gleichungen:

$$P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2=0,$$

$$P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1+P_2\cos\beta_2=0,$$

$$P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1+P_2\cos\gamma_2=0$$

nach der Reihe mit:

$$\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2,$$

$$\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\gamma_2,$$

$$\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2;$$

oder mit:

$$\cos\beta_2\cos\gamma_0-\cos\gamma_2\cos\beta_0,$$

$$\cos\gamma_2\cos\alpha_0-\cos\alpha_2\cos\gamma_0,$$

$$\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos\alpha_0;$$

oder mit:

$$\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1,$$

$$\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1,$$

$$\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1$$

multipliciren, und dann zu einander addiren; so erhalten wir die Gleichungen:

$$P_0N=0,\quad P_1N=0,\quad P_2N=0;$$

wo N die aus §. 3. bekannte Bedeutung hat; aus denen, wenn nur nicht, wie wir natürlich anzunehmen berechtigt sind, alle drei Kräfte verschwinden, jedenfalls

$$N=0$$

folgt, woraus sich ergiebt, dass die Richtungslinien der drei Kräfte in **einer** Ebene liegen.

Nehmen wir nun ganz dieselben Kräftezerlegungen vor wie früher, so erhalten wir die Ausdrücke:

$$P_0\cos\alpha_0=P_{01}\frac{\xi_1-\xi_0}{r_{01}}+P_{02}\frac{\xi_2-\xi_0}{r_{20}},$$

$$P_0\cos\beta_0=P_{01}\frac{\eta_1-\eta_0}{r_{01}}+P_{02}\frac{\eta_2-\eta_0}{r_{20}},$$

$$P_0\cos\gamma_0=P_{01}\frac{\zeta_1-\zeta_0}{r_{01}}+P_{02}\frac{\zeta_2-\zeta_0}{r_{20}};$$

$$P_1\cos\alpha_1=P_{12}\frac{\xi_2-\xi_1}{r_{12}}+P_{10}\frac{\xi_0-\xi_1}{r_{01}},$$

$$P_1\cos\beta_1=P_{12}\frac{\eta_2-\eta_1}{r_{12}}+P_{10}\frac{\eta_0-\eta_1}{r_{01}},$$

$$P_1\cos\gamma_1=P_{12}\frac{\zeta_2-\zeta_1}{r_{12}}+P_{10}\frac{\zeta_0-\zeta_1}{r_{01}};$$

$$P_2\cos\alpha_2=P_{20}\frac{\xi_0-\xi_2}{r_{20}}+P_{21}\frac{\xi_1-\xi_2}{r_{12}},$$

$$P_2\cos\beta_2=P_{20}\frac{\eta_0-\eta_2}{r_{20}}+P_{21}\frac{\eta_1-\eta_2}{r_{12}},$$

$$P_2\cos\gamma_2=P_{20}\frac{\zeta_0-\zeta_2}{r_{20}}+P_{21}\frac{\zeta_1-\zeta_2}{r_{12}};$$

welche, für

$$P_0\cos\alpha_0,\ P_0\cos\beta_0,\ P_0\cos\gamma_0;\quad P_1\cos\alpha_1,\ P_1\cos\beta_1,\ P_1\cos\gamma_1;$$
$$P_2\cos\alpha_2,\ P_2\cos\beta_2,\ P_2\cos\gamma_2$$

in die Gleichungen 7) gesetzt, zu den folgenden Gleichungen führen:

$$(P_{01}-P_{10})\,\frac{\xi_0-\xi_1}{r_{01}}+(P_{12}-P_{21})\,\frac{\xi_1-\xi_2}{r_{12}}+(P_{20}-P_{02})\,\frac{\xi_2-\xi_0}{r_{20}}=0,$$

$$(P_{01}-P_{10})\,\frac{\eta_0-\eta_1}{r_{01}}+(P_{12}-P_{21})\,\frac{\eta_1-\eta_2}{r_{12}}+(P_{20}-P_{02})\,\frac{\eta_2-\eta_0}{r_{20}}=0,$$

$$(P_{01}-P_{10})\,\frac{\zeta_0-\zeta_1}{r_{01}}+(P_{12}-P_{21})\,\frac{\zeta_1-\zeta_2}{r_{12}}+(P_{20}-P_{02})\,\frac{\zeta_2-\zeta_0}{r_{20}}=0$$

und:

$$(P_{01}-P_{10})\,\frac{\xi_0\eta_1-\eta_0\xi_1}{r_{01}}+(P_{12}-P_{21})\,\frac{\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2}{r_{12}}$$
$$+(P_{20}-P_{02})\,\frac{\xi_2\eta_0-\eta_2\xi_0}{r_{20}}=0,$$

$$(P_{01}-P_{10})\,\frac{\eta_0\zeta_1-\zeta_0\eta_1}{r_{01}}+(P_{12}-P_{21})\,\frac{\eta_1\zeta_2-\zeta_1\eta_2}{r_{12}}$$
$$+(P_{20}-P_{02})\,\frac{\eta_2\zeta_0-\zeta_2\eta_0}{r_{20}}=0,$$

$$(P_{01}-P_{10})\,\frac{\zeta_0\xi_1-\xi_0\zeta_1}{r_{01}}+(P_{12}-P_{21})\,\frac{\zeta_1\xi_2-\xi_1\zeta_2}{r_{12}}$$
$$+(P_{20}-P_{02})\,\frac{\zeta_2\xi_0-\xi_2\zeta_0}{r_{20}}=0.$$

Aus drei Gleichungen von der Form:

$$a_0x+b_0y+c_0z=0,$$
$$a_1x+b_1y+c_1z=0,$$
$$a_2x+b_2y+c_2z=0$$

ergeben sich bekanntlich immer die drei Gleichungen:

$$\{a_0(b_1c_2-c_1b_2)+a_1(b_2c_0-c_2b_0)+a_2(b_0c_1-c_0b_1)\}x=0,$$
$$\{a_0(b_1c_2-c_1b_2)+a_1(b_2c_0-c_2b_0)+a_2(b_0c_1-c_0b_1)\}y=0,$$
$$\{a_0(b_1c_2-c_1b_2)+a_1(b_2c_0-c_2b_0)+a_2(b_0c_1-c_0b_1)\}z=0.$$

Verbinden wir nun die drei Gleichungen:

Digitized by Google

$$(P_{01}-P_{10})\frac{\xi_0-\xi_1}{r_{01}}+(P_{12}-P_{21})\frac{\xi_1-\xi_2}{r_{12}}+(P_{20}-P_{02})\frac{\xi_2-\xi_0}{r_{20}}=0,$$

$$(P_{01}-P_{10})\frac{\eta_0-\eta_1}{r_{01}}+(P_{12}-P_{21})\frac{\eta_1-\eta_2}{r_{12}}+(P_{20}-P_{02})\frac{\eta_2-\eta_0}{r_{20}}=0,$$

$$(P_{01}-P_{10})\frac{\xi_0\eta_1-\eta_0\xi_1}{r_{01}}+(P_{12}-P_{21})\frac{\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2}{r_{12}}$$
$$+(P_{20}-P_{02})\frac{\xi_2\eta_0-\eta_2\xi_0}{r_{20}}=0$$

mit einander, und bemerken, dass:

$$\begin{aligned}
&(\xi_0-\xi_1)\{(\eta_1-\eta_2)(\xi_2\eta_0-\eta_2\xi_0)-(\eta_2-\eta_0)(\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)\}\\
&+(\eta_0-\eta_1)\{(\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)(\xi_2-\xi_0)-(\xi_2\eta_0-\eta_2\xi_0)(\xi_1-\xi_2)\}\\
&+(\xi_0\eta_1-\eta_0\xi_1)\{(\xi_1-\xi_2)(\eta_2-\eta_0)-(\xi_2-\xi_0)(\eta_1-\eta_2)\}\\
=\;&(\xi_0\eta_1-\eta_0\xi_1)\{(\xi_1-\xi_2)(\eta_2-\eta_0)-(\xi_2-\xi_0)(\eta_1-\eta_2)\}\\
&+(\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)\{(\xi_2-\xi_0)(\eta_0-\eta_1)-(\xi_0-\xi_1)(\eta_2-\eta_0)\}\\
&+(\xi_2\eta_0-\eta_2\xi_0)\{(\xi_0-\xi_1)(\eta_1-\eta_2)-(\xi_1-\xi_2)(\eta_0-\eta_1)\}\\
=\;&(\xi_0\eta_1-\eta_0\xi_1)\{\xi_0(\eta_1-\eta_2)+\xi_1(\eta_2-\eta_0)+\xi_2(\eta_0-\eta_1)\}\\
&+(\xi_1\eta_2-\eta_1\xi_2)\{\xi_0(\eta_1-\eta_2)+\xi_1(\eta_2-\eta_0)+\xi_2(\eta_0-\eta_1)\}\\
&+(\xi_2\eta_0-\eta_2\xi_0)\{\xi_0(\eta_1-\eta_2)+\xi_1(\eta_2-\eta_0)+\xi_2(\eta_0-\eta_1)\}\\
=\;&\{\xi_0(\eta_1-\eta_2)+\xi_1(\eta_2-\eta_0)+\xi_2(\eta_0-\eta_1)\}^2
\end{aligned}$$

ist; so erhalten wir die folgenden Gleichungen:

$$(P_{01}-P_{10})\{\xi_0(\eta_1-\eta_2)+\xi_1(\eta_2-\eta_0)+\xi_2(\eta_0-\eta_1)\}^2=0;$$
$$(P_{12}-P_{21})\{\xi_0(\eta_1-\eta_2)+\xi_1(\eta_2-\eta_0)+\xi_2(\eta_0-\eta_1)\}^2=0,$$
$$(P_{20}-P_{02})\{\xi_0(\eta_1-\eta_2)+\xi_1(\eta_2-\eta_0)+\xi_2(\eta_0-\eta_1)\}^2=0.$$

Durch ganz ähnliche Verbindungen dreier Gleichungen, wie so eben, erhalten wir aber, wenn der Kürze wegen:

$$[\xi\eta]=\xi_0(\eta_1-\eta_2)+\xi_1(\eta_2-\eta_0)+\xi_2(\eta_0-\eta_1),$$
$$[\eta\zeta]=\eta_0(\zeta_1-\zeta_2)+\eta_1(\zeta_2-\zeta_0)+\eta_2(\zeta_0-\zeta_1),$$
$$[\zeta\xi]=\zeta_0(\xi_1-\xi_2)+\zeta_1(\xi_2-\xi_0)+\zeta_2(\xi_0-\xi_1)$$

gesetzt wird, überhaupt die folgenden Gleichungen:

$$(P_{01}-P_{10})[\xi\eta]^2=(P_{12}-P_{21})[\xi\eta]^2=(P_{20}-P_{02})[\xi\eta]^2=0,$$
$$(P_{01}-P_{10})[\eta\zeta]^2=(P_{12}-P_{21})[\eta\zeta]^2=(P_{20}-P_{02})[\eta\zeta]^2=0,$$
$$(P_{01}-P_{10})[\zeta\xi]^2=(P_{12}-P_{21})[\zeta\xi]^2=(P_{20}-P_{02})[\zeta\xi]^2=0.$$

Die absoluten Werthe der Grössen

$$[\xi\eta],\quad [\eta\zeta],\quad [\zeta\xi]$$

sind bekanntlich die Projectionen des Dreiecks $A_0A_1A_2$ auf den Ebenen der

$$xy,\quad yz,\quad zx;$$

und weil nun nach einem bekannten Satze

$$\overline{A_0A_1A_2}^2=[\xi\eta]^2+[\eta\zeta]^2+[\zeta\xi]^2$$

ist, der Flächeninhalt des Dreiecks $A_0A_1A_2$ aber, insofern wir wieder annehmen, dass die Richtungslinien der drei Kräfte nicht zusammenfallen, nicht verschwindet, so können offenbar die Grössen

$$[\xi\eta],\quad [\eta\zeta],\quad [\zeta\xi]$$

nicht zugleich verschwinden, es muss wenigstens eine nicht verschwinden; daher muss in Folge der obigen Gleichungen jederzeit

$$P_{01}-P_{10}=0,\quad P_{12}-P_{21}=0,\quad P_{20}-P_{02}=0$$

oder

$$P_{01}=P_{10},\quad P_{12}=P_{21},\quad P_{20}=P_{02}$$

sein, woraus sich unmittelbar ergiebt, dass die Kräfte

$$P_{01},\ P_{10};\quad P_{12},\ P_{21};\quad P_{20},\ P_{02}$$

absolut gleich und direct entgegengesetzt, folglich die Kräfte P_0, P_1, P_2 im Gleichgewichte sind. Daher haben wir den folgenden Satz:

Wenn:

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha_0}=\frac{y-y_0}{\cos\beta_0}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma_0},$$
$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma_1},$$
$$\frac{x-x_2}{\cos\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\cos\beta_2}=\frac{z-z_2}{\cos\gamma_2}$$

die Gleichungen der nicht sämmtlich zusammenfallenden Richtungslinien der drei Kräfte P_0, P_1, P_2 sind, und die Gleichungen:

Digitized by Google

$$\Sigma P\cos\alpha = 0, \quad \Sigma P\cos\beta = 0, \quad \Sigma P\cos\gamma = 0;$$

$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0,$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0,$$
$$\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0$$

Statt finden; so sind die drei Kräfte P_0, P_1, P_2 unter einander im Gleichgewichte.

In Folge der beiden vorher bewiesenen Sätze lässt sich nun aber der folgende Satz aussprechen:

Wenn die Gleichungen der nicht sämmtlich zusammenfallenden Richtungslinien der drei Kräfte P_0, P_1, P_2:

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{y-y_0}{\cos\beta_0} = \frac{z-z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\cos\beta_1} = \frac{z-z_1}{\cos\gamma_1},$$

$$\frac{x-x_2}{\cos\alpha_2} = \frac{y-y_2}{\cos\beta_2} = \frac{z-z_2}{\cos\gamma_2}$$

sind; so sind:

$$\Sigma P\cos\alpha = 0, \quad \Sigma P\cos\beta = 0, \quad \Sigma P\cos\gamma = 0;$$

$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0,$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0,$$
$$\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0$$

die **nothwendigen** Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht dieser drei Kräfte.

Wir haben noch den Fall zu betrachten, wenn die Richtungslinien der drei Kräfte P_0, P_1, P_2 mit einander zusammenfallen, in welchem das Gleichgewicht der drei Kräfte offenbar dadurch vollständig bedingt wird, dass zwei dieser Kräfte in der gemeinschaftlichen Richtungslinie nach einer Seite hin wirken, die dritte nach der entgegengesetzten Seite hin wirkt, und dass die Summe der beiden ersten absolut genommenen Kräfte der dritten absolut genommenen Kraft gleich ist. Nehmen wir nun, um die Begriffe zu fixiren, an, dass die beiden Kräfte P_0, P_1 nach einer Seite hin wirken, die dritte Kraft P_2 nach der entgegen-

Digitized by Google

gesetzten Seite hin wirkt, und unterscheiden die folgenden, rücksichtlich der Vorzeichen der Kräfte möglichen Fälle:

P_0	P_1	P_2
positiv	positiv	positiv
negativ	negativ	negativ
positiv	positiv	negativ
negativ	negativ	positiv
positiv	negativ	positiv
negativ	positiv	negativ
positiv	negativ	negativ
negativ	positiv	positiv

so ist die Bedingungsgleichung für den Zustand des Gleichgewichts der drei Kräfte offenbar beziehungsweise:

$$P_0 + P_1 - P_2 = 0,$$

$$P_0 + P_1 + P_2 = 0,$$

$$P_0 - P_1 - P_2 = 0,$$

$$P_0 - P_1 + P_2 = 0;$$

und zwischen den Winkeln

$$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \quad \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$$

finden die folgenden Beziehungen Statt:

$$\begin{cases} \alpha_0 = \alpha_1 = 180^\circ - \alpha_2, \\ \beta_0 = \beta_1 = 180^\circ - \beta_2, \\ \gamma_0 = \gamma_1 = 180^\circ - \gamma_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2, \\ \beta_0 = \beta_1 = \beta_2, \\ \gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_0 = 180^\circ - \alpha_1 = 180^\circ - \alpha_2, \\ \beta_0 = 180^\circ - \beta_1 = 180^\circ - \beta_2, \\ \gamma_0 = 180^\circ - \gamma_1 = 180^\circ - \gamma_2; \end{cases}$$

Digitized by Google

$$\begin{cases} \alpha_0 = 180^0 - \alpha_1 = \alpha_2, \\ \beta_0 = 180^0 - \beta_1 = \beta_2, \\ \gamma_0 = 180^0 - \gamma_1 = \gamma_2; \end{cases}$$

folglich zwischen den Cosinussen dieser Winkel die folgenden Beziehungen:

$$\begin{cases} \cos\alpha_0 = \cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2, \\ \cos\beta_0 = \cos\beta_1 = -\cos\beta_2, \\ \cos\gamma_0 = \cos\gamma_1 = -\cos\gamma_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha_0 = \quad \cos\alpha_1 = \quad \cos\alpha_2, \\ \cos\beta_0 = \quad \cos\beta_1 = \quad \cos\beta_2, \\ \cos\gamma_0 = \quad \cos\gamma_1 = \quad \cos\gamma_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha_0 = -\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2, \\ \cos\beta_0 = -\cos\beta_1 = -\cos\beta_2, \\ \cos\gamma_0 = -\cos\gamma_1 = -\cos\gamma_2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\alpha_0 = -\cos\alpha_1 = \quad \cos\alpha_2, \\ \cos\beta_0 = -\cos\beta_1 = \quad \cos\beta_2, \\ \cos\gamma_0 = -\cos\gamma_1 = \quad \cos\gamma_2. \end{cases}$$

Werden nun in den einzelnen hier betrachteten Fällen die Gleichungen:

$$P_0 + P_1 - P_2 = 0,$$
$$P_0 + P_1 + P_2 = 0,$$
$$P_0 - P_1 - P_2 = 0,$$
$$P_0 - P_1 + P_2 = 0$$

als erfüllt vorausgesetzt, so folgen daraus durch Multiplication mit den obigen Cosinussen in allen Fällen die Gleichungen:

$$P_0 \cos\alpha_0 + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 = 0,$$
$$P_0 \cos\beta_0 + P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 = 0,$$
$$P_0 \cos\gamma_0 + P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 = 0.$$

Digitized by Google

Werden umgekehrt die Gleichungen:

$$P_0 \cos\alpha_0 + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 = 0,$$
$$P_0 \cos\beta_0 + P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 = 0,$$
$$P_0 \cos\gamma_0 + P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 = 0$$

als erfüllt vorausgesetzt; so hat man vor allen Dingen zu beachten, dass wegen der Gleichung

$$\cos\alpha_0^2 + \cos\beta_0^2 + \cos\gamma_0^2 = 1$$

jedenfalls mindestens in einer der drei folgenden Reihen:

$$\cos\alpha_0, \ \cos\alpha_1, \ \cos\alpha_2;$$
$$\cos\beta_0, \ \cos\beta_1, \ \cos\beta_2;$$
$$\cos\gamma_0, \ \cos\gamma_1, \ \cos\gamma_2$$

die absolut gleichen Grössen nicht verschwinden, und dass also aus den als erfüllt vorausgesetzten drei Gleichungen mit Rücksicht auf die obigen zwischen den Cosinussen Statt findenden Relationen jederzeit durch Division respective die Gleichungen:

$$P_0 + P_1 - P_2 = 0,$$
$$P_0 + P_1 + P_2 = 0,$$
$$P_0 - P_1 - P_2 = 0,$$
$$P_0 - P_1 + P_2 = 0$$

folgen.

Hieraus ergiebt sich, dass im vorliegenden Falle das Gleichgewicht zwischen den drei Kräften P_0, P_1, P_2 vollständig durch die drei Gleichungen:

$$P_0 \cos\alpha_0 + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 = 0,$$
$$P_0 \cos\beta_0 + P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 = 0,$$
$$P_0 \cos\gamma_0 + P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 = 0$$

bedingt wird.

Setzen wir nun aber diese Glsichungen als erfüllt voraus, so ist:

Digitized by Google

$$\begin{aligned}
&P_0(x_0\cos\beta_0-y_0\cos\alpha_0)\\
&+P_1(x_1\cos\beta_1-y_1\cos\alpha_1)\\
&+P_2(x_2\cos\beta_2-y_2\cos\alpha_2)\\
=&+P_0(x_0\cos\beta_0-y_0\cos\alpha_0)\\
&+P_1(x_1\cos\beta_1-y_1\cos\alpha_1)\\
&-(P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1)x_2+(P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1)y_2\\
=&\quad P_0\{(x_0-x_2)\cos\beta_0-(y_0-y_2)\cos\alpha_0\}\\
&+P_1\{(x_1-x_2)\cos\beta_1-(y_1-y_2)\cos\alpha_1\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P_0(y_0\cos\gamma_0-z_0\cos\beta_0)\\
&+P_1(y_1\cos\gamma_1-z_1\cos\beta_1)\\
&+P_2(y_2\cos\gamma_2-z_2\cos\beta_2)\\
=&\quad P_0(y_0\cos\gamma_0-z_0\cos\beta_0)\\
&+P_1(y_1\cos\gamma_1-z_1\cos\beta_1)\\
&-(P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1)y_2+(P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1)z_2\\
=&\quad P_0\{(y_0-y_2)\cos\gamma_0-(z_0-z_2)\cos\beta_0\}\\
&+P_1\{(y_1-y_2)\cos\gamma_1-(z_1-z_2)\cos\beta_1\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P_0(z_0\cos\alpha_0-x_0\cos\gamma_0)\\
&+P_1(z_1\cos\alpha_1-x_1\cos\gamma_1)\\
&+P_2(z_2\cos\alpha_2-x_2\cos\gamma_2)\\
=&\quad P_0(z_0\cos\alpha_0-x_0\cos\gamma_0)\\
&+P_1(z_1\cos\alpha_1-x_1\cos\gamma_1)\\
&-(P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1)z_2+(P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1)x_2\\
=&\quad P_0\{(z_0-z_2)\cos\alpha_0-(x_0-x_2)\cos\gamma_0\}\\
&+P_1\{(z_1-z_2)\cos\alpha_1-(x_1-x_2)\cos\gamma_1\}.
\end{aligned}$$

Weil aber die Richtungslinien der drei Kräfte nach der Voraussetzung mit einander zusammenfallen, so ist wegen deren Gleichungen:

$$\begin{aligned}
(x_0-x_2)\cos\beta_0&=(y_0-y_2)\cos\alpha_0,\\
(y_0-y_2)\cos\gamma_0&=(z_0-z_2)\cos\beta_0,\\
(z_0-z_2)\cos\alpha_0&=(x_0-x_2)\cos\gamma_0
\end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned}
(x_1-x_2)\cos\beta_1&=(y_1-y_2)\cos\alpha_1,\\
(y_1-y_2)\cos\gamma_1&=(z_1-z_2)\cos\beta_1,\\
(z_1-z_2)\cos\alpha_1&=(x_1-x_2)\cos\gamma_1;
\end{aligned}$$

also nach dem Obigen:

$$\left.\begin{aligned}
&P_0(x_0\cos\beta_0-y_0\cos\alpha_0)\\
&+P_1(x_1\cos\beta_1-y_1\cos\alpha_1)\\
&+P_2(x_2\cos\beta_2-y_2\cos\alpha_2)
\end{aligned}\right\}=0,$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} &P_0(y_0\cos\gamma_0 - z_0\cos\beta_0)\\ +&P_1(y_1\cos\gamma_1 - z_1\cos\beta_1)\\ +&P_2(y_2\cos\gamma_2 - z_2\cos\beta_2)\end{aligned}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &P_0(z_0\cos\alpha_0 - x_0\cos\gamma_0)\\ +&P_1(z_1\cos\alpha_1 - x_1\cos\gamma_1)\\ +&P_2(z_2\cos\alpha_2 - x_2\cos\gamma_2)\end{aligned}\right\} = 0;$$

woraus man sieht, dass im vorliegenden Falle diese letzteren Gleichungen jederzeit von selbst erfüllt sind, wenn die Gleichungen:

$$P_0\cos\alpha_0 + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 = 0,$$

$$P_0\cos\beta_0 + P_1\cos\beta_1 + P_2\cos\beta_2 = 0,$$

$$P_0\cos\gamma_0 + P_1\cos\gamma_1 + P_2\cos\gamma_2 = 0$$

erfüllt sind, oder dass im vorliegenden Falle jederzeit jene Gleichungen aus diesen Gleichungen folgen.

Mit Rücksicht auf die früheren Sätze kann man nun ohne alle Einschränkung den folgenden Satz aussprechen:

Wenn die Gleichungen der Richtungslinien der drei beliebigen Kräfte P_0, P_1, P_2

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{y-y_0}{\cos\beta_0} = \frac{z-z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{y-y_1}{\cos\beta_1} = \frac{z-z_1}{\cos\gamma_1},$$

$$\frac{x-x_2}{\cos\alpha_2} = \frac{y-y_2}{\cos\beta_2} = \frac{z-z_2}{\cos\gamma_2}$$

sind, so sind:

$$\Sigma P\cos\alpha = 0,\ \Sigma P\cos\beta = 0,\ \Sigma P\cos\gamma = 0;$$

$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0,$$

$$\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0,$$

$$\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0$$

die **nothwendigen** Bedingungsgleichungen für den Zustand des Gleichgewichts zwischen diesen drei Kräften.

§. 6.

Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht zwischen beliebig vielen Kräften.

Bevor wir zur Entwickelung der gesuchten Bedingungsgleichungen selbst übergehen, wollen wir zeigen, wie sich für auf einen Punkt wirkende Kräfte die Resultirende bestimmen lässt.

Die gegebenen, sämmtlich auf den Punkt (abc) wirkenden Kräfte seien:

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots.\ P_n$$

und:

1)

$$\frac{x-a}{\cos\alpha_0}=\frac{y-b}{\cos\beta_0}=\frac{z-c}{\cos\gamma_0},$$

$$\frac{x-a}{\cos\alpha_1}=\frac{y-b}{\cos\beta_1}=\frac{z-c}{\cos\gamma_1},$$

$$\frac{x-a}{\cos\alpha_2}=\frac{y-b}{\cos\beta_2}=\frac{z-c}{\cos\gamma_2},$$

u. s. w.

$$\frac{x-a}{\cos\alpha_n}=\frac{y-b}{\cos\beta_n}=\frac{z-c}{\cos\gamma_n}$$

seien die Gleichungen ihrer Richtungslinien; die Resultirende dieser Kräfte sei R und

$$\frac{x-a}{\cos\varphi}=\frac{y-b}{\cos\psi}=\frac{z-c}{\cos\chi}$$

seien die Gleichungen ihrer Richtungslinie.

Die Resultirende der Kräfte P_0, P_1 sei R_1 und

$$\frac{x-a}{\cos\varphi_1}=\frac{y-b}{\cos\psi_1}=\frac{z-c}{\cos\chi_1}$$

seien die Gleichungen ihrer Richtungslinie; so ist nach §. 2. 6):

$$R_1\cos\varphi_1=P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1,$$
$$R_1\cos\psi_1=P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1,$$
$$R_1\cos\chi_1=P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1.$$

Digitized by Google

Die Resultirende der Kräfte R_1, P_2, also die Resultirende der Kräfte P_0, P_1, P_2, sei R_2, und

$$\frac{x-a}{\cos\varphi_2}=\frac{y-b}{\cos\psi_2}=\frac{z-c}{\cos\chi_2}$$

seien die Gleichungen ihrer Richtungslinie; so ist nach §. 2. 6):

$$R_2\cos\varphi_2=R_1\cos\varphi_1+P_2\cos\alpha_2,$$
$$R_2\cos\psi_2=R_1\cos\psi_1+P_2\cos\beta_2,$$
$$R_2\cos\chi_2=R_1\cos\chi_1+P_2\cos\gamma_2;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$R_2\cos\varphi_2=P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2,$$
$$R_2\cos\psi_2=P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1+P_2\cos\beta_2,$$
$$R_2\cos\chi_2=P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1+P_2\cos\gamma_2.$$

Die Resultirende der Kräfte R_2, P_3, also die Resultirende der Kräfte P_0, P_1, P_2, P_3, sei R_3, und

$$\frac{x-a}{\cos\varphi_3}=\frac{y-b}{\cos\psi_3}=\frac{z-c}{\cos\chi_3}$$

seien die Gleichungen ihrer Richtungslinie; so ist nach §. 2. 6):

$$R_3\cos\varphi_3=R_2\cos\varphi_2+P_3\cos\alpha_3,$$
$$R_3\cos\psi_3=R_2\cos\psi_2+P_3\cos\beta_3,$$
$$R_3\cos\chi_3=R_2\cos\chi_2+P_3\cos\gamma_3;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$R_3\cos\varphi_3=P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2+P_3\cos\alpha_3,$$
$$R_3\cos\psi_3=P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1+P_2\cos\beta_2+P_3\cos\beta_3,$$
$$R_3\cos\chi_3=P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1+P_2\cos\gamma_2+P_3\cos\gamma_3.$$

Wie man auf diese Art weiter gehen kann, unterliegt keinem Zweifel, und es ist also nach dem sich hier kund gebenden Gesetze und in analoger Bezeichnung für eine beliebige Anzahl von Kräften:

Digitized by Google

$$R_n \cos \varphi_n = P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \ldots . + P_n \cos \alpha_n,$$
$$R_n \cos \psi_n = P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \ldots . + P_n \cos \beta_n,$$
$$R_n \cos \chi_n = P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \ldots . + P_n \cos \gamma_n;$$

oder, wenn man jetzt für R_n, φ_n, ψ_n, χ_n beziehungsweise R. φ, ψ, χ schreibt:

2)

$$R \cos \varphi = P_0 \cos \alpha_0 + P_1 \cos \alpha_1 + P_2 \cos \alpha_2 + \ldots . + P_n \cos \alpha_n,$$
$$R \cos \psi = P_0 \cos \beta_0 + P_1 \cos \beta_1 + P_2 \cos \beta_2 + \ldots . + P_n \cos \beta_n,$$
$$R \cos \chi = P_0 \cos \gamma_0 + P_1 \cos \gamma_1 + P_2 \cos \gamma_2 + \ldots . + P_n \cos \gamma_n;$$

oder in abkürzender Schreibweise:

3)

$$R \cos \varphi = \Sigma P \cos \alpha, \quad R \cos \psi = \Sigma P \cos \beta, \quad R \cos \chi = \Sigma P \cos \gamma;$$

aus welchen Gleichungen R, φ, ψ, χ bestimmt werden müssen, wobei wir uns jetzt nicht aufhalten, weil diese Bestimmung für unseren nächsten Zweck nicht erforderlich ist.

Wenn man in den durch die Gleichungen 1) charakterisirten Richtungslinien der Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots . P_n$$

beliebige Punkte

$$(x_0 y_0 z_0), (x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2), \ldots ., (x_n y_n z_n)$$

annimmt, deren als positiv betrachtete Entfernungen von dem Punkte (abc) beziehungsweise durch

$$r_0, r_1, r_2, r_3, \ldots . r_n$$

bezeichnet, und die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots . P_n$$

als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem sie von dem Punkte (abc) nach den Punkten

$$(x_0 y_0 z_0), (x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2), \ldots ., (x_n y_n z_n)$$

hin, oder nach entgegengesetzten Richtungen hin gerichtet sind; so ist nach §. 1. 5):

Digitized by Google

$$\cos\alpha_0 = \frac{x_0 - a}{r_0}, \quad \cos\beta_0 = \frac{y_0 - b}{r_0}, \quad \cos\gamma_0 = \frac{z_0 - c}{r_0};$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_1 - a}{r_1}, \quad \cos\beta_1 = \frac{y_1 - b}{r_1}, \quad \cos\gamma_1 = \frac{z_1 - c}{r_1};$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{x_2 - a}{r_2}, \quad \cos\beta_2 = \frac{y_2 - b}{r_2}, \quad \cos\gamma_2 = \frac{z_2 - c}{r_2};$$

u. s. w.

$$\cos\alpha_n = \frac{x_n - a}{r_n}, \quad \cos\beta_n = \frac{y_n - b}{r_n}, \quad \cos\gamma_n = \frac{z_n - c}{r_n};$$

also nach 2):

4)

$$R\cos\varphi = P_0\frac{x_0 - a}{r_0} + P_1\frac{x_1 - a}{r_1} + P_2\frac{x_2 - a}{r_2} + \ldots + P_n\frac{x_n - a}{r_n},$$

$$R\cos\psi = P_0\frac{y_0 - b}{r_0} + P_1\frac{y_1 - b}{r_1} + P_2\frac{y_2 - b}{r_2} + \ldots + P_n\frac{y_n - b}{r_n},$$

$$R\cos\chi = P_0\frac{z_0 - c}{r_0} + P_1\frac{z_1 - c}{r_1} + P_2\frac{z_2 - c}{r_2} + \ldots + P_n\frac{z_n - c}{r_n}.$$

Wir wollen nun annehmen, dass

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3, \ldots P_n$$

beliebig viele Kräfte und die Gleichungen ihrer Richtungslinien:

5)

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{y - y_0}{\cos\beta_0} = \frac{z - z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\frac{x - x_1}{\cos\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\cos\beta_1} = \frac{z - z_1}{\cos\gamma_1},$$

$$\frac{x - x_2}{\cos\alpha_2} = \frac{y - y_2}{\cos\beta_2} = \frac{z - z_2}{\cos\gamma_2},$$

u. s. w.

$$\frac{x - x_n}{\cos\alpha_n} = \frac{y - y_n}{\cos\beta_n} = \frac{z - z_n}{\cos\gamma_n}$$

seien. Um die nothwendigen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht dieser Kräfte zu finden, nehmen wir drei beliebige Punkte

Digitized by Google

$$(a'b'c'),\ (a''b''c''),\ (a'''b'''c''')$$

an, und ziehen von jedem dieser Punkte durch alle Punkte

$$(x_0 y_0 z_0),\ (x_1 y_1 z_1),\ (x_2 y_2 z_2),\ \ldots.,\ (x_n y_n z_n)$$

Gerade. Nach diesen Geraden als Richtungslinien zerlegen wir jede der Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots.\ P_n$$

in drei Kräfte, welche wir beziehungsweise durch

$$P_0',\ P_0'',\ P_0''';\quad P_1',\ P_1'',\ P_1''';\quad P_2',\ P_2'',\ P_2''';\ \ldots.;\ P_n',\ P_n'',\ P_n'''$$

bezeichnen, und als positiv oder negativ betrachten, jenachdem sie nach den von den Punkten

$$(a'b'c'),\ (a''b''c''),\ (a'''b'''c''')$$

nach den Punkten

$$(x_0 y_0 z_0),\ (x_1 y_1 z_1),\ (x_2 y_2 z_2),\ \ldots.,\ (x_n y_n z_n)$$

hin genommenen Richtungen, oder nach den entgegengesetzten Richtungen hingerichtet sind. Bezeichnen wir dann die als positiv betrachteten Entfernungen der Punkte

$$(x_0 y_0 z_0),\ (x_1 y_1 z_1),\ (x_2 y_2 z_2),\ \ldots.,\ (x_n y_n z_n)$$

von den Punkten

$$(a'b'c'),\ (a''b''c''),\ (a'''b'''c''')$$

beziehungsweise durch

$$r_0',\ r_0'',\ r_0''';\quad r_1',\ r_1'',\ r_1''';\quad r_2',\ r_2'',\ r_2''';\ \ldots.;\ r_n',\ r_n'',\ r_n''';$$

so ist nach §.3. 10):

$$P_0 \cos\alpha_0 = P_0' \frac{x_0 - a'}{r_0'} + P_0'' \frac{x_0 - a''}{r_0''} + P_0''' \frac{x_0 - a'''}{r_0'''},$$

$$P_0 \cos\beta_0 = P_0' \frac{y_0 - b'}{r_0'} + P_0'' \frac{y_0 - b''}{r_0''} + P_0''' \frac{y_0 - b'''}{r_0'''},$$

$$P_0 \cos\gamma_0 = P_0' \frac{z_0 - c'}{r_0'} + P_0'' \frac{z_0 - c''}{r_0''} + P_0''' \frac{z_0 - b'''}{r_0'''};$$

$$P_1 \cos\alpha_1 = P_1' \frac{x_1 - a'}{r_1'} + P_1'' \frac{x_1 - a''}{r_1''} + P_1''' \frac{x_1 - a'''}{r_1'''},$$

$$P_1 \cos\beta_1 = P_1' \frac{y_1 - b'}{r_1'} + P_1'' \frac{y_1 - b''}{r_1''} + P_1''' \frac{y_1 - b'''}{r_1'''},$$

$$P_1 \cos\gamma_1 = P_1' \frac{z_1 - c'}{r_1'} + P_1'' \frac{z_1 - c''}{r_1''} + P_1''' \frac{z_1 - c'''}{r_1'''};$$

Digitized by Google

$$P_2\cos\alpha_2 = P_2{}'\frac{x_2-a'}{r_2{}'}+P_2{}''\frac{x_2-a''}{r_2{}''}+P_2{}'''\frac{x_2-a'''}{r_2{}'''},$$

$$P_2\cos\beta_2 = P_2{}'\frac{y_2-b'}{r_2{}'}+P_2{}''\frac{y_2-b''}{r_2{}''}+P_2{}'''\frac{y_2-b'''}{r_2{}'''},$$

$$P_2\cos\gamma_2 = P_2{}'\frac{z_2-c'}{r_2{}'}+P_2{}''\frac{z_2-b''}{r_2{}''}+P_2{}'''\frac{z_2-c'''}{r_2{}'''};$$

u. s. w.

$$P_n\cos\alpha_n = P_n{}'\frac{x_n-a'}{r_n{}'}+P_n{}''\frac{x_n-a''}{r_n{}''}+P_n{}'''\frac{x_n-a'''}{r_n{}'''},$$

$$P_n\cos\beta_n = P_n{}'\frac{y_n-b'}{r_n{}'}+P_n{}''\frac{y_n-b''}{r_n{}''}+P_n{}'''\frac{y_n-b'''}{r_n{}'''},$$

$$P_n\cos\gamma_n = P_n{}'\frac{z_n-c'}{r_n{}'}+P_n{}''\frac{z_n-c''}{r_n{}''}+P_n{}'''\frac{z_n-c'''}{r_n{}'''}.$$

Bezeichnen wir nun die Resultirenden aller in den Punkten

$$(a'b'c'),\quad (a''b''c''),\quad (a'''b'''c''')$$

wirkenden Kräfte durch

$$\Pi',\quad \Pi',\quad \Pi'''$$

und die Gleichungen der Richtungslinien dieser Resultirenden durch:

$$\frac{x-a'}{\cos\varphi'}=\frac{y-b'}{\cos\psi'}=\frac{z-c'}{\cos\chi'},$$

$$\frac{x-a''}{\cos\varphi''}=\frac{x-b''}{\cos\psi''}=\frac{z-c''}{\cos\chi''},$$

$$\frac{x-a'''}{\cos\varphi'''}=\frac{y-b'''}{\cos\psi'''}=\frac{z-c'''}{\cos\chi'''};$$

so ist nach 4):

$$\Pi'\cos\varphi' = P_0{}'\frac{x_0-a'}{r_0{}'}+P_1{}'\frac{x_1-a'}{r_1{}'}+P_2{}'\frac{x_2-a'}{r_2{}'}+\ldots+P_n{}'\frac{x_n-a'}{r_n{}'},$$

$$\Pi'\cos\psi' = P_0{}'\frac{y_0-b'}{r_0{}'}+P_1{}'\frac{y_1-b'}{r_1{}'}+P_2{}'\frac{y_2-b'}{r_2{}'}+\ldots+P_n{}'\frac{y_n-b'}{r_n{}'},$$

$$\Pi'\cos\chi' = P_0{}'\frac{z_0-c'}{r_0{}'}+P_1{}'\frac{z_1-c'}{r_1{}'}+P_2{}'\frac{z_2-c'}{r_2{}'}+\ldots+P_n{}'\frac{z_n-c'}{r_n{}'};$$

Digitized by Google

$$\Pi''\cos\varphi'' = P_0''\frac{x_0-a''}{r_0''} + P_1''\frac{x_1-a''}{r_1''} + P_2''\frac{x_2-a''}{r_2''} + \ldots + P_n''\frac{x_n-a''}{r_n''},$$

$$\Pi''\cos\psi'' = P_0''\frac{y_0-b''}{r_0''} + P_1''\frac{y_1-b''}{r_1''} + P_2''\frac{y_2-b''}{r_2''} + \ldots + P_n''\frac{y_n-b''}{r_n''},$$

$$\Pi''\cos\chi'' = P_0''\frac{z_0-c''}{r_0''} + P_1''\frac{z_1-c''}{r_1''} + P_2''\frac{z_2-c''}{r_2''} + \ldots + P_n''\frac{z_n-c''}{r_n''};$$

$$\Pi'''\cos\varphi''' = P_0'''\frac{x_0-a'''}{r_0'''} + P_1'''\frac{x_1-a'''}{r_1'''} + P_2'''\frac{x_2-a'''}{r_2'''} + \ldots$$
$$\ldots + P_n'''\frac{x_n-a'''}{r_n'''},$$

$$\Pi'''\cos\psi''' = P_0'''\frac{y_0-b'''}{r_0'''} + P_1'''\frac{y_1-b'''}{r_1'''} + P_2'''\frac{y_2-b'''}{r_2'''} + \ldots$$
$$\ldots + P_n'''\frac{y_n-b'''}{r_n'''},$$

$$\Pi'''\cos\chi''' = P_0'''\frac{z_0-c'''}{r_0'''} + P_1'''\frac{z_1-c'''}{r_1'''} + P_2'''\frac{z_2-c'''}{r_2'''} + \ldots$$
$$\ldots + P_n'''\frac{z_n-c'''}{r_n'''}.$$

Stellen wir jetzt die nothwendigen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der drei Kräfte Π', Π'', Π''' auf, so erhalten wir offenbar unmittelbar die gesuchten nothwendigen Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots,\ P_n.$$

Nach §. 5. sind aber die in Rede stehenden Bedingungsgleichungen:

$$\Pi'\cos\varphi' + \Pi''\cos\varphi'' + \Pi'''\cos\varphi''' = 0,$$
$$\Pi'\cos\psi' + \Pi''\cos\psi'' + \Pi'''\cos\psi''' = 0,$$
$$\Pi'\cos\chi' + \Pi''\cos\chi'' + \Pi'''\cos\chi''' = 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} \Pi'(a'\cos\psi' - b'\cos\varphi') \\ +\,\Pi''(a''\cos\psi'' - b''\cos\varphi'') \\ +\,\Pi'''(a'''\cos\psi''' - b'''\cos\varphi''') \end{array}\right\} = 0,$$

$$\left.\begin{array}{l} \Pi'(b'\cos\chi' - c'\cos\psi') \\ +\,\Pi''(b''\cos\chi'' - c''\cos\psi'') \\ +\,\Pi'''(b'''\cos\chi''' - c'''\cos\psi''') \end{array}\right\} = 0,$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned}&\Pi'\ (c'\ \cos\varphi'-a'\cos\chi')\\+&\Pi''\ (c''\cos\varphi''-a''\cos\chi'')\\+&\Pi'''(c'''\cos\varphi'''-a'''\cos\chi''')\end{aligned}\right\}=0;$$

und diese Gleichungen müssen nun mittelst des Vorhergehenden weiter entwickelt werden.

Zunächst erhält man mittelst der oben gefundenen Formeln auf der Stelle:

$$\Pi'\cos\varphi'+\Pi''\cos\varphi''+\Pi'''\cos\varphi'''$$
$$=P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2+\ldots.+P_n\cos\alpha_n,$$

$$\Pi'\cos\psi'+\Pi''\cos\psi''+\Pi'''\cos\psi'''$$
$$=P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1+P_2\cos\beta_2+\ldots.+P_n\cos\beta_n,$$

$$\Pi'\cos\chi'+\Pi''\cos\chi''+\Pi'''\cos\chi'''$$
$$=P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1+P_2\cos\gamma_2+\ldots.+P_n\cos\gamma_n.$$

Ferner ist nach dem Obigen:

$$\begin{aligned}&\Pi'\ (a'\ \cos\psi'\ -b'\ \cos\varphi')\\+&\Pi''\ (a''\ \cos\psi''\ -b''\ \cos\varphi'')\\+&\Pi'''(a'''\cos\psi'''-b'''\cos\varphi''')\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=\quad &a'\left(P_0'\frac{y_0-b'}{r_0'}+P_1'\frac{y_1-b'}{r_1'}+P_2'\frac{y_2-b'}{r_2'}+\ldots.+P_n'\frac{y_n-b'}{r_n'}\right)\\
-&b'\left(P_0'\frac{x_0-a'}{r_0'}+P_1'\frac{x_1-a'}{r_1'}+P_2'\frac{x_2-a'}{r_2'}+\ldots.+P_n'\frac{x_n-a'}{r_n'}\right)\\
+&a''\left(P_0''\frac{y_0-b''}{r_0''}+P_1''\frac{y_1-b''}{r_1''}+P_2''\frac{y_2-b''}{r_2''}+\ldots.+P_n''\frac{y_n-b''}{r_n''}\right)\\
-&b''\left(P_0''\frac{x_0-a''}{r_0''}+P_1''\frac{x_1-a''}{r_1''}+P_2''\frac{x_2-a''}{r_2''}+\ldots.+P_n''\frac{x_n-a''}{r_n''}\right)\\
+&a'''\left(P_0'''\frac{y_0-b'''}{r_0'''}+P_1'''\frac{y_1-b'''}{r_1'''}+P_2'''\frac{y_2-b'''}{r_2'''}+\ldots.+P_n'''\frac{y_n-b'''}{r_n'''}\right)\\
-&b'''\left(P_0'''\frac{x_0-a'''}{r_0'''}+P_1'''\frac{x_1-a'''}{r_1'''}+P_2'''\frac{x_2-a'''}{r_2'''}+\ldots.+P_n'''\frac{x_n-a'''}{r_n'''}\right)\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$= \quad P_0'\left(a'\frac{y_0-b'}{r_0'}-b'\frac{x_0-a'}{r_0'}\right)$$

$$+P_1'\left(a'\frac{y_1-b'}{r_1'}-b'\frac{x_1-a'}{r_1'}\right)$$

$$+P_2'\left(a'\frac{y_2-b'}{r_2'}-b'\frac{x_2-a'}{r_2'}\right)$$

u. s. w.

$$+P_n'\left(a'\frac{y_n-b'}{r_n'}-b'\frac{x_n-a'}{r_n'}\right)$$

$$+P_0''\left(a''\frac{y_0-b''}{r_0''}-b''\frac{x_0-a''}{r_0''}\right)$$

$$+P_1''\left(a''\frac{y_1-b''}{r_1''}-b''\frac{x_1-a''}{r_1''}\right)$$

$$+P_2''\left(a''\frac{y_2-b''}{r_2''}-b''\frac{x_2-a''}{r_2''}\right)$$

u. s. w.

$$+P_n''\left(a''\frac{y_n-b''}{r_n''}-b''\frac{x_n-a''}{r_n''}\right)$$

$$+P_0'''\left(a'''\frac{y_0-b'''}{r_0'''}-b'''\frac{x_0-a'''}{r_0'''}\right)$$

$$+P_1'''\left(a'''\frac{y_1-b'''}{r_1'''}-b'''\frac{x_1-a'''}{r_1'''}\right)$$

$$+P_2'''\left(a'''\frac{y_2-b'''}{r_2'''}-b'''\frac{x_2-a'''}{r_2'''}\right)$$

u. s. w.

$$+P_n'''\left(a'''\frac{y_n-b'''}{r_n'''}-b'''\frac{x_n-a'''}{r_n'''}\right)$$

$$= \quad P_0'\left(x_0\frac{y_0-b'}{r_0'}-y_0\frac{x_0-a'}{r_0'}\right)$$

$$+P_0''\left(x_0\frac{y_0-b''}{r_0''}-y_0\frac{x_0-a''}{r_0''}\right)$$

$$+P_0'''\left(x_0\frac{y_0-b'''}{r_0'''}-y_0\frac{x_0-a'''}{r_0'''}\right)$$

Digitized by Google

$$+P_1'\left(x_1\frac{y_1-b'}{r_1'}-y_1\frac{x_1-a'}{r_1'}\right)$$

$$+P_1''\left(x_1\frac{y_1-b''}{r_1''}-y_1\frac{x_1-a''}{r_1''}\right)$$

$$+P_1'''\left(x_1\frac{y_1-b'''}{r_1'''}-y_1\frac{x_1-a'''}{r_1'''}\right)$$

$$+P_2'\left(x_2\frac{y_2-b'}{r_2'}-y_2\frac{x_2-a'}{r_2'}\right)$$

$$+P_2''\left(x_2\frac{y_2-b''}{r_2''}-y_2\frac{x_2-a''}{r_2''}\right)$$

$$+P_2'''\left(x_2\frac{y_2-b'''}{r_2'''}-y_2\frac{x_2-a'''}{r_2'''}\right)$$

u. s. w.

$$+P_n'\left(x_n\frac{y_n-b'}{r_n'}-y_n\frac{x_n-a'}{r_n'}\right)$$

$$+P_n''\left(x_n\frac{y_n-b''}{r_n''}-y_n\frac{x_n-a''}{r_n''}\right)$$

$$+P_n'''\left(x_n\frac{y_n-b'''}{r_n'''}-y_n\frac{x_n-a'''}{r_n'''}\right)$$

$$=\quad x_0\left(P_0'\frac{y_0-b'}{r_0'}+P_0''\frac{y_0-b''}{r_0''}+P_0'''\frac{y_0-b'''}{r_0'''}\right)$$

$$-y_0\left(P_0'\frac{x_0-a'}{r_0'}+P_0''\frac{x_0-a''}{r_0''}+P_0'''\frac{x_0-a'''}{r_0'''}\right)$$

$$+x_1\left(P_1'\frac{y_1-b'}{r_1'}+P_1''\frac{y_1-b''}{r_1''}+P_1'''\frac{y_1-b'''}{r_1'''}\right)$$

$$-y_1\left(P_1'\frac{x_1-a'}{r_1'}+P_1''\frac{x_1-a''}{r_1''}+P_1'''\frac{x_1-a'''}{r_1'''}\right)$$

$$+x_2\left(P_2'\frac{y_2-b'}{r_2'}+P_2''\frac{y_2-b''}{r_2''}+P_2'''\frac{y_2-b'''}{r_2'''}\right)$$

$$-y_2\left(P_2'\frac{x_2-a'}{r_2'}+P_2''\frac{x_2-a''}{r_2''}+P_2'''\frac{x_2-a'''}{r_2'''}\right)$$

u. s. w.

Digitized by Google

$$+x_n\left(P_n'\frac{y_n-b'}{r_n'}+P_n''\frac{y_n-b''}{r_n''}+P_n'''\frac{y_n-b'''}{r_n'''}\right)$$

$$-y_n\left(P_n'\frac{x_n-a'}{r_n'}+P_n''\frac{x_n-a''}{r_n''}+P_n'''\frac{x_n-a'''}{r_n'''}\right)$$

$$\begin{aligned}=\quad & P_0(x_0\cos\beta_0-y_0\cos\alpha_0)\\ & +P_1(x_1\cos\beta_1-y_1\cos\alpha_1)\\ & +P_2(x_2\cos\beta_2-y_2\cos\alpha_2)\\ & \text{u. s. w.}\\ & +P_n(x_n\cos\beta_n-y_n\cos\alpha_n).\end{aligned}$$

Weil sich nun die übrigen obigen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts der Kräfte Π', Π'', Π''' ganz eben so behandeln lassen, so erhalten wir als Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts der Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ldots,\ P_n$$

die folgenden Gleichungen:

$$P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2+\ldots+P_n\cos\alpha_n=0,$$

$$P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1+P_2\cos\beta_2+\ldots+P_n\cos\beta_n=0,$$

$$P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1+P_2\cos\gamma_2+\ldots+P_n\cos\gamma_n=0;$$

$$\left.\begin{aligned} & P_0(x_0\cos\beta_0-y_0\cos\alpha_0)\\ & +P_1(x_1\cos\beta_1-y_1\cos\alpha_1)\\ & +P_2(x_2\cos\beta_2-y_2\cos\alpha_2)\\ & \text{u. s. w.}\\ & +P_n(x_n\cos\beta_n-y_n\cos\alpha_n)\end{aligned}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{aligned} & P_0(y_0\cos\gamma_0-z_0\cos\beta_0)\\ & +P_1(y_1\cos\gamma_1-z_1\cos\beta_1)\\ & +P_2(y_2\cos\gamma_2-z_2\cos\beta_2)\\ & \text{u. s. w.}\\ & +P_n(y_n\cos\gamma_n-z_n\cos\beta_n)\end{aligned}\right\}=0,$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{r} P_0(z_0\cos\alpha_0-x_0\cos\gamma_0) \\ +P_1(z_1\cos\alpha_1-x_1\cos\gamma_1) \\ +P_2(z_2\cos\alpha_2-x_2\cos\gamma_2) \\ \text{u. s. w.} \\ +P_n(z_n\cos\alpha_n-x_n\cos\gamma_n) \end{array}\right\} = 0;$$

und haben daher jetzt den folgenden Hauptsatz der ganzen Statik:

Für beliebige Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots.,\ P_n,$$

deren Richtungslinien durch die Gleichungen:

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha_0}=\frac{y-y_0}{\cos\beta_0}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma_1},$$

$$\frac{x-x_2}{\cos\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\cos\beta_2}=\frac{z-z_2}{\cos\gamma_2},$$

u. s. w.

$$\frac{x-x_n}{\cos\alpha_n}=\frac{y-y_n}{\cos\beta_n}=\frac{z-z_n}{\cos\gamma_n}$$

charakterisirt sind, sind die nothwendigen Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts:

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\quad \Sigma P\cos\beta=0,\quad \Sigma P\cos\gamma=0;$$

$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0,$$

$$\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)=0,$$

$$\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0.$$

§. 7.

Resultirende beliebig vieler Kräfte.

Die gegebenen Kräfte seien wieder:

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots.,\ P_n$$

und:

Digitized by Google

1)

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha_0}=\frac{y-y_0}{\cos\beta_0}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma_0},$$

$$\frac{x-x_1}{\cos\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\cos\beta_1}=\frac{z-z_1}{\cos\gamma_1},$$

$$\frac{x-x_2}{\cos\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\cos\beta_2}=\frac{z-z_2}{\cos\gamma_2},$$

u. s. w.

$$\frac{x-x_n}{\cos\alpha_n}=\frac{y-y_n}{\cos\beta_n}=\frac{z-z_n}{\cos\gamma_n}$$

seien die Gleichungen ihrer Richtungslinien.

Die Resultirende dieser Kräfte, insofern es eine solche giebt, was durch die folgenden Untersuchungen selbst erst weiter ermittelt und entschieden werden soll, sei R, und

2) $$\frac{x-X}{\cos\varphi}=\frac{y-Y}{\cos\psi}=\frac{z-Z}{\cos\chi}$$

seien die Gleichungen der Richtungslinie dieser Resultirenden.

Zuerst gehen wir von der Voraussetzung aus, dass es für die gegebenen Kräfte eine Resultirende R wirklich giebt. Dann giebt es für die gegebenen Kräfte auch eine Aequipollente, welche der Resultirenden gleich und direct entgegengesetzt, und daher $-R$ ist, insofern wir die Gleichungen 2) auch als Gleichungen der Richtungslinie der Aequipollenten betrachten. Da nun die Aequipollente mit den gegebenen Kräften im Gleichgewichte ist, so dass also zwischen den Kräften

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots\ P_n,\ -R$$

deren Richtungslinien durch die Gleichungen 1) und 2) charakterisirt sind, Gleichgewicht Statt findet, so haben wir nach §. 6. die folgenden Gleichungen:

$$\Sigma P\cos\alpha-R\cos\varphi=0,$$

$$\Sigma P\cos\beta-R\cos\psi=0,$$

$$\Sigma P\cos\gamma-R\cos\chi=0;$$

$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)-R(X\cos\psi-Y\cos\varphi)=0,$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)-R(Y\cos\chi-Z\cos\psi)=0,$$
$$\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)-R(Z\cos\varphi-X\cos\chi)=0;$$

Digitized by Google

oder:

3)

$$R\cos\varphi = \Sigma P\cos\alpha,\quad R\cos\psi = \Sigma P\cos\beta,\quad R\cos\chi = \Sigma P\cos\gamma;$$

$$R(X\cos\psi - Y\cos\varphi) = \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha),$$

$$R(Y\cos\chi - Z\cos\psi) = \Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta),$$

$$R(Z\cos\varphi - X\cos\chi) = \Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma);$$

oder, wenn wir der Kürze wegen im Folgenden immer:

4)

$$L = \Sigma P\cos\alpha,\quad M = \Sigma P\cos\beta,\quad N = \Sigma P\cos\gamma;$$

$$N_1 = \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha),$$

$$L_1 = \Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta),$$

$$M_1 = \Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma)$$

setzen:

5)

$$R\cos\varphi = L,\quad R\cos\psi = M,\quad R\cos\chi = N;$$

$$R(X\cos\psi - Y\cos\varphi) = N_1,$$

$$R(Y\cos\chi - Z\cos\psi) = L_1,$$

$$R(Z\cos\varphi - X\cos\chi) = M_1;$$

oder:

6)

$$R\cos\varphi = L,\quad R\cos\psi = M,\quad R\cos\chi = N;$$

$$N_1 - MX + LY = 0,$$

$$L_1 - NY + MZ = 0,$$

$$M_1 - LZ + NX = 0.$$

Wenn wir die drei letzten Gleichungen nach der Reihe mit N, L, M multipliciren und dann zu einander addiren, so erhalten wir die Gleichung:

7) . . . . $LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0,$

welche Elemente, die sich auf die Resultirende beziehen, gar nicht mehr enthält; und wir haben daher den folgenden Satz:

Digitized by Google

Wenn es für die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$$

eine Resultirende giebt, so ist immer:

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0.$$

Aus diesem Satze ergiebt sich aber ferner unmittelbar der folgende Satz:

Wenn die Gleichung:

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0$$

nicht erfüllt ist, so giebt es für die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$$

keine Resultirende.

Wenn wir aus den drei ersten der Gleichungen 6), natürlich in Verbindung mit der Gleichung

$$\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1,$$

die Grössen R und φ, ψ, χ bestimmen; so erhalten wir die Ausdrücke:

$$R = \pm\sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

und mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\cos\varphi = \frac{L}{R} = \pm\frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos\psi = \frac{M}{R} = \pm\frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos\chi = \frac{N}{R} = \pm\frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}};$$

woraus sich ergiebt, dass man für $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\chi$ nur endliche bestimmte Werthe erhält, wenn die Grösse

$$L^2 + M^2 + N^2$$

nicht verschwindet, wenn also nicht zugleich

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

ist, oder wenn wenigstens eine der drei Grössen L, M, N nicht verschwindet.

Digitized by Google

Aus allem Bisherigen erhellet nun, dass, wenn wir uns überhaupt die Aufgabe stellen: die Resultirende der Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$$

zu bestimmen, wir jedenfalls von den beiden Voraussetzungen ausgehen müssen, dass die Gleichung:

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0$$

erfüllt ist, und dass die drei Grössen L, M, N nicht sämmtlich verschwinden.

Um nun unter diesen nothwendigen Voraussetzungen die Gleichungen 6) aufzulösen, bestimmen wir zuerst aus den drei ersten dieser Gleichungen die Grössen R und φ, ψ, χ; und erhalten für dieselben wie vorher die folgenden Ausdrücke:

8)

$$R = \pm\sqrt{L^2 + M^2 + N^2};$$

$$\cos\varphi = \frac{L}{R} = \pm\frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos\psi = \frac{M}{R} = \pm\frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos\chi = \frac{N}{R} = \pm\frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}};$$

in denen die oberen und unteren Zeichen sich auf einander beziehen, und welche für die gesuchten Grössen unter den gemachten Voraussetzungen jedenfalls endliche bestimmte Werthe liefern. Zugleich erhellet, dass R nicht verschwindet.

Was die doppelten Vorzeichen betrifft, so ist darüber zu bemerken, dass es ganz gleichgültig ist, welche Vorzeichen man nimmt. Nimmt man nämlich die oberen Zeichen, und setzt also, indem man R positiv nimmt:

$$R = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2};$$

so heisst dies, dass die Richtung der Richtungslinie der Kraft R, welche den durch die Formeln:

Digitized by Google

$$\cos\varphi = \frac{L}{R} = \frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},$$

$$\cos\psi = \frac{M}{R} = \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},$$

$$\cos\chi = \frac{N}{R} = \frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$$

bestimmten Winkeln φ, ψ, χ entspricht, die Richtung der Kraft R ist; nimmt man dagegen die unteren Zeichen, und setzt also, indem man R negativ nimmt:

$$R = -\sqrt{L^2+M^2+N^2};$$

so heisst dies, dass die der Richtung der Richtungslinie der Kraft R, welche den durch die Formeln:

$$\cos\varphi = \frac{L}{R} = -\frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},$$

$$\cos\psi = \frac{M}{R} = -\frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},$$

$$\cos\chi = \frac{N}{R} = -\frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$$

bestimmten Winkeln φ, ψ, χ entspricht, entgegengesetzte Richtung die Richtung der Kraft R ist; und da nun diese Richtung offenbar mit der identisch ist, welche den durch die Formeln:

$$\cos\varphi = \frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},$$

$$\cos\psi = \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}},$$

$$\cos\chi = \frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}$$

bestimmten Winkeln φ, ψ, χ entspricht, so sieht man, dass, wie schon erinnert, beide Bestimmungen der Kraft R ganz auf Dasselbe hinauslaufen, und dass es also der Einfachheit wegen verstattet ist, im Folgenden bloss:

Digitized by Google

$$9) \qquad R = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2};$$

$$\cos\varphi = \frac{L}{R} = \frac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos\psi = \frac{M}{R} = \frac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}},$$

$$\cos\chi = \frac{N}{R} = \frac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$$

zu setzen, wo also die nicht verschwindende Kraft R positiv ist und nach der durch die Winkel φ, ψ, χ bestimmten Richtung ihrer Richtungslinie hin wirkt. Diese letzteren Formeln werden wir dem Folgenden meistens zu Grunde legen.

Um die Kraft R vollkommen zu bestimmen, ist es nun aber noch nöthig, den Punkt (XYZ) ihrer Richtungslinie zu kennen, worunter jeder Punkt der Richtungslinie verstanden werden kann. Es wird daher darauf ankommen, zu zeigen, dass unter den gemachten Voraussetzungen X, Y, Z in endlichen völlig bestimmten Ausdrücken immer so bestimmt werden können, dass den drei letzten der Gleichungen 6), nämlich den Gleichungen:

$$10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 - MX + LY = 0, \\ L_1 - NY + MZ = 0, \\ M_1 - LZ + NX = 0 \end{array} \right.$$

vollständig genügt wird. Wenn man aus der 1sten und 2ten, 2ten und 3ten, 3ten und 1sten dieser Gleichungen beziehungsweise Y, Z, X eliminirt, so erhält man die drei folgenden Gleichungen:

$$NN_1 + LL_1 + M(LZ - NX) = 0,$$
$$LL_1 + MM_1 + N(MX - LY) = 0,$$
$$MM_1 + NN_1 + L(NY - MZ) = 0;$$

oder:

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 - M(M_1 - LZ + NX) = 0,$$
$$LL_1 + MM_1 + NN_1 - N(N_1 - MX + LY) = 0,$$
$$LL_1 + MM_1 + NN_1 - L(L_1 - NY + MZ) = 0;$$

Digitized by Google

also, weil nach der Voraussetzung

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0$$

ist:

$$M(M_1 - LZ + NX) = 0,$$

$$N(N_1 - MX + LY) = 0,$$

$$L(L_1 - NY + MZ) = 0.$$

Nach der Voraussetzung verschwinden die drei Grössen L, M, N nicht sämmtlich, und mindestens eine verschwindet also nicht, was uns auf die Betrachtung der drei folgenden Fälle führt.

Es verschwinde L nicht. Nach dem Vorhergehenden folgt aus den beiden Gleichungen:

$$M_1 - LZ + NX = 0,$$

$$N_1 - MX + LY = 0$$

durch Elimination von X die Gleichung:

$$L(L_1 - NY + MZ) = 0,$$

also, weil L nicht verschwindet, die Gleichung:

$$L_1 - NY + MZ = 0;$$

und um also X, Y, Z so zu bestimmen, dass den drei Gleichungen 10) vollständig genügt wird, ist es bloss nöthig, die Grössen X, Y, Z so zu bestimmen, dass den zwei Gleichungen:

$$M_1 - LZ + NX = 0,$$

$$N_1 - MX + LY = 0$$

genügt wird, was mittelst der Formeln:

$$11) \; \ldots\ldots \; Y = \frac{MX - N_1}{L}, \quad Z = \frac{NX + M_1}{L};$$

in denen man für X jeden Werth setzen kann, wegen des nicht verschwindenden L auf unendlich viele verschiedene Arten mittelst endlicher völlig bestimmter Ausdrücke möglich ist.

Digitized by Google

Es verschwinde M nicht. Nach dem Vorhergehenden folgt aus den beiden Gleichungen:

$$N_1 - MX + LY = 0,$$
$$L_1 - NY + MZ = 0$$

durch Elimination von Y die Gleichung:

$$M(M_1 - LZ + NX) = 0,$$

also, weil M nicht verschwindet, die Gleichung:

$$M_1 - LZ + NX = 0;$$

und um also X, Y, Z so zu bestimmen, dass den drei Gleichungen 10) vollständig genügt wird, ist es bloss nöthig, die Grössen X, Y, Z so zu bestimmen, dass den zwei Gleichungen:

$$N_1 - MX + LY = 0,$$
$$L_1 - NY + MZ = 0$$

genügt wird, was mittelst der Formeln:

$$12) \quad \ldots \quad Z = \frac{NY - L_1}{M}, \quad X = \frac{LY + N_1}{M};$$

in denen man für Y jeden Werth setzen kann, wegen des nicht verschwindenden M auf unendlich viele verschiedene Arten mittelst endlicher völlig bestimmter Ausdrücke möglich ist.

Es verschwinde N nicht. Nach dem Vorhergehenden folgt aus den Gleichungen:

$$L_1 - NY + MZ = 0,$$
$$M_1 - LZ + NX = 0$$

durch Elimination von Z die Gleichung:

$$N(N_1 - MX + LY) = 0,$$

also, weil N nicht verschwindet, die Gleichung:

$$N_1 - MX + LY = 0;$$

und um also X, Y, Z so zu bestimmen, dass den drei Gleichungen 10) vollständig genügt wird, ist es bloss nöthig, die Grössen X, Y, Z so zu bestimmen, dass den Gleichungen:

$$L_1 - NY + MZ = 0,$$
$$M_1 - LZ + NX = 0$$

genügt wird, was mittelst der Formeln:

Digitized by Google

$$13) \ldots\ldots X=\frac{LZ-M_1}{N}, \quad Y=\frac{MZ+L_1}{N};$$

in denen man für Z jeden Werth setzen kann, wegen des nicht verschwindenden N auf unendlich viele verschiedene Arten mittelst endlicher völlig bestimmter Ausdrücke möglich ist.

Hieraus ergiebt sich nun, dass es unter den gemachten Voraussetzungen für die gegebenen Kräfte immer eine nicht verschwindende Resultirende giebt, welche mittelst der Formeln 9), 11), 12), 13) jederzeit in endlichen völlig bestimmten Ausdrücken vollständig und ohne alle Zweideutigkeit bestimmt werden kann, so dass sich also jetzt der folgende Satz aussprechen lässt:

Wenn die Gleichung

$$LL_1+MM_1+NN_1=0$$

erfüllt ist, und die drei Grössen L, M, N nicht sämmtlich verschwinden, so giebt es für die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$$

immer eine **nicht verschwindende** völlig bestimmte Resultirende.

Die zur Bestimmung dieser Resultirenden erforderlichen Formeln sind im Obigen vollständig gegeben worden.

Wir wissen also jetzt, dass es, wenn die Gleichung

$$LL_1+MM_1+NN_1=0$$

nicht erfüllt ist, keine Resultirende giebt; und dass es, wenn die Gleichung

$$LL_1+MM_1+NN_1=0$$

erfüllt ist, und die Grössen L, M, N nicht zugleich verschwinden, eine nicht verschwindende Resultirende giebt, welche durch die im Vorhergehenden entwickelten Formeln jederzeit ohne alle Zweideutigkeit vollkommen bestimmt werden kann. Daher bleibt jetzt bloss noch zu untersuchen übrig, wie sich die Sache verhält, wenn die Grössen L, M, N zugleich verschwinden, womit natürlich die Erfüllung der Gleichung

$$LL_1+MM_1+NN_1=0$$

von selbst verbunden ist.

Bevor wir aber zu dieser Untersuchung übergehen, wollen wir zuerst zeigen, dass sich in allen Fällen die Kräfte

Digitized by Google

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$$

auf zwei nicht verschwindende Kräfte zurückführen lassen, und zwar im Allgemeinen auf unendlich viele Arten, so dass die eine dieser beiden Kräfte durch einen beliebigen gegebenen Punkt geht, welchen wir jedoch der Einfachheit wegen im Folgenden als Anfang der Coordinaten annehmen wollen, eine Untersuchung, welche um so wichtiger ist, weil durch dieselbe zugleich auch der Fall, wenn die Gleichung

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0$$

nicht erfüllt ist, im Allgemeinen seine Erledigung findet.

Um die so eben ausgesprochene Behauptung zu beweisen, bestimme man die nicht verschwindende Kraft R' und die Bestimmungswinkel φ', ψ', χ' ihrer Richtungslinie so, dass, wenn man der Kürze wegen:

$$14) \ldots\ldots \begin{cases} L + R'\cos\varphi' = L', \\ M + R'\cos\psi' = M', \\ N + R'\cos\chi' = N' \end{cases}$$

setzt, die Gleichung:

$$15) \ldots\ldots L_1L' + M_1M' + N_1N' = 0$$

erfüllt ist, und die Grössen L', M', N' nicht sämmtlich verschwinden, was jedenfalls im Allgemeinen auf unendlich viele verschiedene Arten möglich ist.

Wenn nämlich die Grössen L_1, M_1, N_1 sämmtlich verschwinden, so ist die Gleichung

$$L_1L' + M_1M' + N_1N' = 0$$

für alle Werthe von R' und φ', ψ', χ', in allen Fällen natürlich mit gehöriger Berücksichtigung der Gleichung:

$$\cos\varphi'^2 + \cos\psi'^2 + \cos\chi'^2 = 1,$$

erfüllt, und die Richtigkeit unserer Behauptung versteht sich daher in diesem Falle von selbst.

Wenn die Grössen L_1, M_1, N_1 nicht sämmtlich verschwinden, so muss wenigstens eine nicht verschwinden.

Wenn L_1 nicht verschwindet, so setze man $R'\cos\psi'$ und $R'\cos\chi'$ zwei beliebigen Werthen B' und C' gleich, so dass also:

Digitized by Google

$$R'\cos\psi' = B',\ R'\cos\chi' = C'$$

ist, die man jedoch so auswählt, dass weder sie selbst, noch, wenn man

$$M + B' = M',\ N + C' = N'$$

setzt, die Grössen M' und N' beide verschwinden, was offenbar immer auf unendlich viele verschiedene Arten möglich ist. Führt man diese Ausdrücke von M' und N', und den Ausdruck $L + R'\cos\varphi'$ von L' in die Gleichung

$$L_1L' + M_1M' + N_1N' = 0$$

ein, so wird dieselbe:

$$L_1(L + R'\cos\varphi') + M_1(M + B') + N_1(N + C') = 0,$$

woraus sich, wenn der Kürze wegen:

$$16) \ldots A' = -\frac{L_1L + M_1(M + B') + N_1(N + C')}{L_1}$$

oder:

$$17) \ldots A' = -\frac{LL_1 + MM_1 + NN_1 + (B'M_1 + C'N_1)}{L_1}$$

gesetzt wird, wo, weil L_1 nicht verschwindet, A' eine endliche völlig bestimmte Grösse ist:

$$R'\cos\varphi' = A'$$

ergiebt. Also hat man zur Bestimmung von R' und φ', ψ', χ' die Gleichungen:

$$R'\cos\varphi' = A',\ R'\cos\psi' = B',\ R'\cos\chi' = C';$$

aus denen man auf bekannte Weise:

18)

$$R' = \pm\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2};$$

$$\cos\varphi' = \frac{A'}{R'} = \pm\frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos\psi' = \frac{B'}{R'} = \pm\frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos\chi' = \frac{C'}{R'} = \pm\frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

erhält, wo R' nicht verschwindet und die Ausdrücke von $\cos\varphi'$,

Digitized by Google

$\cos\psi'$, $\cos\chi'$ endliche völlig bestimmte Grössen sind, weil die Grössen A', B', C' nicht sämmtlich verschwinden, wodurch also unsere Behauptung im vorliegenden Falle vollständig gerechtfertigt ist.

Wenn M_1 nicht verschwindet, so setze man $R'\cos\chi'$ und $R'\cos\varphi'$ zwei beliebigen Werthen C' und A' gleich, so dass also:

$$R'\cos\chi' = C',\ R'\cos\varphi' = A'$$

ist, die man jedoch so auswählt, dass weder sie selbst, noch, wenn man

$$N + C' = N',\ L + A' = L'$$

setzt, die Grössen N' und L' beide verschwinden, was offenbar immer auf unendlich viele verschiedene Arten möglich ist. Führt man diese Ausdrücke von N' und L', und den Ausdruck $M + R'\cos\psi'$ von M' in die Gleichung

$$L_1L' + M_1M' + N_1N' = 0$$

ein, so wird dieselbe:

$$L_1(L + A') + M_1(M + R'\cos\psi') + N_1(N + C') = 0,$$

woraus sich, wenn man der Kürze wegen:

$$19) \ldots B' = -\frac{L_1(L + A') + M_1M + N_1(N + C')}{M_1}$$

oder:

$$20) \ldots B' = -\frac{LL_1 + MM_1 + NN_1 + (C'N_1 + A'L_1)}{M_1}$$

setzt, wo, weil M_1 nicht verschwindet, B' eine endliche völlig bestimmte Grösse ist,

$$R'\cos\psi' = B'$$

ergiebt. Also hat man zur Bestimmung von R' und φ', ψ', χ' die Gleichungen:

$$R'\cos\varphi' = A',\quad R'\cos\psi' = B',\quad R'\cos\chi' = C';$$

aus denen sich auf bekannte Weise:

Digitized by Google

21)

$$R' = \pm\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2};$$

$$\cos\varphi' = \frac{A'}{R'} = \pm\frac{A'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos\psi' = \frac{B'}{R'} = \pm\frac{B'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}},$$

$$\cos\chi' = \frac{C'}{R'} = \pm\frac{C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

ergiebt, wo R' nicht verschwindet und die Ausdrücke von $\cos\varphi'$, $\cos\psi'$, $\cos\chi'$ endliche völlig bestimmte Grössen sind, weil die Grössen A', B', C' nicht sämmtlich verschwinden, wodurch also unsere Behauptung auch in diesem Falle vollständig gerechtfertigt ist.

Wenn N_1 nicht verschwindet, so setze man $R'\cos\varphi'$ und $R'\cos\psi'$ zwei beliebigen Werthen A' und B' gleich, so dass also

$$R'\cos\varphi' = A', \quad R'\cos\psi' = B'$$

ist, die man aber so auswählt, dass weder sie selbst, noch, wenn man

$$L + A' = L', \quad M + B' = M'$$

setzt, die Grössen L' und M' beide verschwinden, was offenbar immer auf unendlich viele verschiedene Arten möglich ist. Führt man diese Ausdrücke von L' und M', und den Ausdruck $N + R'\cos\chi'$ von N' in die Gleichung:

$$L_1 L' + M_1 M' + N_1 N' = 0$$

ein, so wird dieselbe:

$$L_1(L + A') + M_1(M + B') + N_1(N + R'\cos\chi') = 0,$$

woraus sich, wenn der Kürze wegen:

$$22) \ldots C' = -\frac{L_1(L + A') + M_1(M + B') + N_1 N}{N_1}$$

oder:

$$23) \ldots C' = -\frac{LL_1 + MM_1 + NN_1 + (A'L_1 + B'M_1)}{N_1}$$

gesetzt wird, wo, weil N_1 nicht verschwindet, C' eine endliche völlig bestimmte Grösse ist,

$$R'\cos\chi' = C'$$

ergiebt. Also hat man zur Bestimmung von R' und φ', ψ', χ' die Gleichungen:

$$R'\cos\varphi' = A',\ R'\cos\psi' = B',\ R'\cos\chi' = C';$$

aus denen sich auf bekannte Weise:

24)

$$R' = \pm\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2};$$

$$\cos\varphi' = \frac{A'}{R'} = \pm\frac{A'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

$$\cos\psi' = \frac{B'}{R'} = \pm\frac{B'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}},$$

$$\cos\chi' = \frac{C'}{R'} = \pm\frac{C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

ergiebt, wo R' nicht verschwindet und die Ausdrücke von $\cos\varphi'$, $\cos\psi'$, $\cos\chi'$ endliche völlig bestimmte Grössen sind, weil die Grössen A', B', C' nicht sämmtlich verschwinden, wodurch also unsere Behauptung auch in diesem Falle vollständig gerechtfertigt ist.

Unsere obige Behauptung ist also jetzt in allen Fällen vollständig gerechtfertigt.

Diese so eben bestimmte nicht verschwindende Kraft R' mit einer durch die Winkel φ', ψ', χ' ihrer Lage nach bestimmten Richtungslinie und eine dieser Kraft absolut gleiche, also wie diese nicht verschwindende, aber nach direct entgegengesetzter Richtung wirkende Kraft, welche wir durch R_1' bezeichnen wollen, denken wir uns nun im Anfange der Coordinaten wirkend, wodurch in der Wirkung der Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots .\ P_n$$

nicht das Geringste geändert wird.

Nach 14) ist:

$$L' = \Sigma P\cos\alpha + R'\cos\varphi',$$

$$M' = \Sigma P\cos\beta + R'\cos\psi',$$

$$N' = \Sigma P\cos\gamma + R'\cos\chi';$$

und setzen wir nun:

$$N_1' = \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) + R'(0.\cos\psi' - 0.\cos\varphi'),$$
$$L_1' = \Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) + R'(0.\cos\chi' - 0.\cos\psi'),$$
$$M_1' = \Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) + R'(0.\cos\varphi' - 0.\cos\chi');$$

so ist:

$$25)\ \ldots \left\{\begin{array}{l} N_1' = \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = N_1, \\ L_1' = \Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = L_1, \\ M_1' = \Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = M_1; \end{array}\right.$$

also:

$$L'L_1' + M'M_1' + N'N_1' = L_1L' + M_1M' + N_1N',$$

und folglich nach 15):

$$26)\ \ldots\ldots\ L'L_1' + M'M_1' + N'N_1' = 0.$$

Weil nun bekanntlich nach dem Obigen ausserdem L', M', N' nicht sämmtlich verschwinden, so können nach dem früher Bewiesenen die Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots.\ P_n,\ R'$$

auf eine nicht verschwindende Resultirende zurückgeführt werden, die wir durch R; die Bestimmungswinkel ihrer Richtungslinie durch φ, ψ, χ; die Coordinaten eines ihrer Angriffspunkte durch X, Y, Z bezeichnen wollen. Also können die Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots.\ P_n,\ R',\ R_1'$$

und folglich auch die Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots.\ P_n,$$

auf die beiden nicht verschwindenden Kräfte R und R_1' zurückgeführt werden, deren letztere durch den Anfang der Coordinaten geht, womit also der folgende Satz bewiesen ist:

Die Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots.\ P_n$$

lassen sich in allen Fällen auf zwei nicht verschwindende Kräfte zurückführen, von denen die eine durch einen beliebigen gegebenen Punkt geht.

Digitized by Google

Wie die Kräfte R_1' und R in allen Fällen unzweideutig bestimmt werden können, erhellet aus dem Obigen ganz von selbst.

Endlich wollen wir nun noch den Fall betrachten, wenn

$$L=0,\quad M=0,\quad N=0$$

ist. Weil die Kraft R im Vorhergehenden die Resultirende von

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots.\ P_n,\ R'$$

ist, so ist bekanntlich allgemein:

$$R\cos\varphi=\Sigma P\cos\alpha+R'\cos\varphi',$$
$$R\cos\psi=\Sigma P\cos\beta+R'\cos\psi',$$
$$R\cos\chi=\Sigma P\cos\gamma+R'\cos\chi'$$

oder:

$$R\cos\varphi=L+R'\cos\varphi',$$
$$R\cos\psi=M+R'\cos\psi',$$
$$R\cos\chi=N+R'\cos\chi';$$

also wegen der Voraussetzung:

$$R\cos\varphi=R'\cos\varphi',\quad R\cos\psi=R'\cos\psi',\quad R\cos\chi=R'\cos\chi';$$

woraus man leicht schliesst, dass die Kräfte R und R' der absoluten Grösse und der Richtung nach gleich sind*), womit na-

*) Aus den Gleichungen:

$$P\cos\alpha=P_1\cos\alpha_1,\quad P\cos\beta=P_1\cos\beta_1,\quad P\cos\gamma=P_1\cos\gamma_1;$$

wo α, β, γ und α_1, β_1, γ_1 im Allgemeinen die Bestimmungswinkel der Richtungslinien der Kräfte P und P_1 sind, folgt, wenn man dieselben quadrirt und dann zu einander addirt, wegen der bekannten Gleichungen:

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,\quad \cos\alpha_1{}^2+\cos\beta_1{}^2+\cos\gamma_1{}^2=1$$

sogleich:

$$P^2=P_1{}^2,$$

also mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$P_1=\pm P;$$

$$\cos\alpha_1=\pm\cos\alpha,\qquad \alpha_1=\begin{cases}\alpha\\ 180^0-\alpha\end{cases}$$

$$\cos\beta_1=\pm\cos\beta,\qquad \beta_1=\begin{cases}\beta\\ 180^0-\beta\end{cases}$$

$$\cos\gamma_1=\pm\cos\gamma;\qquad \gamma_1=\begin{cases}\gamma\\ 180^0-\gamma.\end{cases}$$

Digitized by Google

türlich keineswegs gesagt werden soll, dass die Richtungen im Allgemeinen zusammenfallen. Die Kraft R_1' ist der Kräft R' der absoluten Grösse nach gleich, der Richtung nach aber direct entgegengesetzt. Also sind die nicht verschwindenden Kräfte R und R_1', auf welche sich bekanntlich die Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots .\ P_n$$

zurückführen lassen, der absoluten Grösse nach gleich, der Richtung nach aber entgegengesetzt, und bilden also im Allgemeinen ein sogenanntes **Kräftepaar**; nur wenn die nicht verschwindenden Kräfte R und R_1' einander direct entgegengesetzt sind, heben sie sich vollständig auf, und die Kräfte

---

Ist P positiv, so heisst dies, P wirkt nach der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Richtung. Setzt man $P_1 = +P$ und nimmt also P_1 positiv, so heisst dies, P_1 wirkt nach der durch die Winkel α_1, β_1, γ_1; also nach der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Richtung. Setzt man $P_1 = -P$, und nimmt also P_1 negativ, so heisst dies, P_1 wirkt nach der durch die Winkel

$$180^0-\alpha_1,\quad 180^0-\beta_1,\quad 180^0-\gamma_1;$$

also, weil in diesem Falle

$$\alpha_1 = 180^0-\alpha,\ \beta_1 = 180^0-\beta,\ \gamma_1 = 180^0-\gamma$$

folglich

$$\alpha = 180^0-\alpha_1,\ \beta = 180^0-\beta_1,\ \gamma = 180^0-\gamma_1$$

ist, wieder nach der durch die Winkel α, β. γ bestimmten Richtung.

Ist P negativ, so heisst dies, P wirkt nach der durch die Winkel

$$180^0-\alpha,\quad 180^0-\beta,\quad 180^0-\gamma$$

bestimmten Richtung. Setzt man $P_1 = +P$, und nimmt also P_1 negativ, so heisst dies, P_1 wirkt nach der durch die Winkel

$$180^0-\alpha_1,\ 180^0-\beta_1,\ 180^0-\gamma_1;$$

also, weil in diesem Falle $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$, $\gamma_1 = \gamma$ ist, nach der durch die Winkel

$$180^0-\alpha,\quad 180^0-\beta,\quad 180^0-\gamma$$

bestimmten Richtung. Setzt man $P_1 = -P$, und nimmt also P_1 positiv, so heisst dies, P_1 wirkt nach der durch die Winkel α_1, β_1, γ_1; also, weil in diesem Falle

$$\alpha_1 = 180^0-\alpha,\ \beta_1 = 180^0-\beta,\ \gamma_1 = 180^0-\gamma$$

ist, nach der durch die Winkel

$$180^0-\alpha,\quad 180^0-\beta,\quad 180^0-\gamma$$

bestimmten Richtung.

Hieraus sieht man, dass in allen Fällen die Kräfte P und P_1 absolut gleich und gleichgerichtet sind.

Digitized by Google

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$$

welche sich auf jene Kräfte zurückführen lassen, sind unter einander im Gleichgewichte. Daher lässt sich jetzt der folgende Satz aussprechen:

Wenn

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0$$

ist, so lassen sich die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$$

auf ein Kräftepaar zurückführen, oder dieselben sind unter einander im Gleichgewichte.

Das Resultat unserer ganzen Untersuchung lässt sich nun in den folgenden Sätzen zusammenfassen:

1. Wenn es für die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$$

eine Resultirende giebt, so ist immer:

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0.$$

2. Wenn die Gleichung

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0$$

nicht erfüllt ist, so giebt es für die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$$

keine Resultirende.

3. Wenn die Gleichung

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0$$

erfüllt ist, und die drei Grössen L, M, N nicht sämmtlich verschwinden, so giebt es für die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$$

immer eine nicht verschwindende völlig bestimmte Resultirende.

4. Wenn die Grössen L, M, N sämmtlich verschwinden, so lassen sich die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots P_n$$

Digitized by Google

entweder auf ein Kräftepaar zurückführen, oder dieselben sind unter einander im Gleichgewichte.

5. Die Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots.\ P_n$$

lassen sich in allen Fällen auf zwei nicht verschwindende Kräfte zurückführen, von denen die eine durch einen beliebigen gegebenen Punkt geht.

§. 8.

Bedingungen der Ruhe eines um einen festen Punkt drehbaren Systems.

Alle im Vorhergehenden eingeführten Bezeichnungen beibehaltend, wollen wir nun die nothwendigen Bedingungen für den Zustand der Ruhe eines um einen festen Punkt drehbaren Systems aufsuchen.

Grösserer Einfachheit wegen wollen wir den festen Punkt als Anfang der Coordinaten annehmen.

Zuerst wollen wir voraussetzen, dass

$$L_1=0,\quad M_1=0,\quad N_1=0$$

sei. Ist dann auch

$$L=0,\quad M=0,\quad N=0;$$

so sind nach §. 6. die Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots.\ P_n$$

unter einander im Gleichgewichte, und das System befindet sich also natürlich in Ruhe. Ist nicht zugleich

$$L=0,\quad M=0,\quad N=0;$$

so ist wegen der Voraussetzung

$$L_1=0,\quad M_1=0,\quad N_1=0$$

doch

$$LL_1+MM_1+NN_1=0,$$

und nach §. 7. lassen sich also die Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots.\ P_n$$

Digitized by Google

auf eine nicht verschwindende Resultirende zurückführen, für welche man in bekannter Bezeichnung die Gleichungen:

$$N_1 - MX + LY = 0,$$
$$L_1 - NY + MZ = 0,$$
$$M_1 - LZ + NX = 0$$

hat, welche wegen der Voraussetzung

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0$$

in diesem Falle in die Gleichungen:

$$MX - LY = 0, \qquad MX = LY,$$
$$NY - MZ = 0, \quad \text{oder:} \quad NY = MZ,$$
$$LZ - NX = 0; \qquad LZ = NX$$

übergehen. Verschwindet nun etwa L nicht, so liefern diese Gleichungen die Formeln:

$$Y = \frac{M}{L}X, \quad Z = \frac{N}{L}X;$$

aus denen sich für $X = 0$ auch $Y = 0$ und $Z = 0$ ergiebt, und daher erhellet, dass die eine Resultirende, auf welche sich das System zurückführen lässt, durch den Anfang der Coordinaten geht, also von diesem als einem festen Punkte aufgehoben wird, und daher das System sich in Ruhe befindet. Ganz eben so schliesst man, wenn M oder N nicht verschwindet.

Hieraus ergiebt sich, dass, wenn

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0$$

ist, das System sich jederzeit in Ruhe befindet.

Ferner wollen wir annehmen, dass nicht zugleich

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0$$

sei. Nach §. 7. lassen sich die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots . P_n$$

auf zwei nicht verschwindende Kräfte R und R_1' zurückführen, deren letztere durch den Anfang der Coordinaten geht und daher von diesem als einem festen Punkte aufgehoben wird, so dass also bloss die Kraft R, welche die nicht verschwindende Resultirende der Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots.\ P_n,\ R'$$

ist, übrig bleibt. Für diese Kraft haben wir in den im vorhergehenden Paragraphen eingeführten Bezeichnungen die Gleichungen:

$$N_1' - M'X + L'Y = 0,$$
$$L_1' - N'Y + M'Z = 0,$$
$$M_1' - L'Z + N'X = 0;$$

oder, weil nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$L_1' = L_1,\quad M_1' = M_1,\quad N_1' = N_1$$

ist, die Gleichungen:

$$N_1 - M'X + L'Y = 0,$$
$$L_1 - N'Y + M'Z = 0,$$
$$M_1 - L'Z + N'X = 0.$$

Ginge nun die nicht verschwindende Kraft R durch den Anfang der Coordinaten, so müsste zugleich

$$X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = 0;$$

also nach den vorstehenden Gleichungen zugleich

$$L_1 = 0,\quad M_1 = 0,\quad N_1 = 0$$

sein, was gegen die Voraussetzung streitet. Daher kann die nicht verschwindende Kraft R, auf welche das System sich zuletzt reduciren liess, nicht durch den Anfang der Coordinaten, also nicht durch den festen Punkt gehen, und das System kann also nicht in Ruhe sein.

Hieraus ergiebt sich, dass, wenn nicht zugleich

$$L_1 = 0,\quad M_1 = 0,\quad N_1 = 0$$

ist, das System sich nicht in Ruhe befindet.

Wenn also das System sich in Ruhe befindet, so ist zugleich

$$L_1 = 0,\quad M_1 = 0,\quad N_1 = 0.$$

Aus den hier bewiesenen Sätzen ergiebt sich der folgende allgemeine Satz:

Wenn das System, an welchem die Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots.\ P_n$$

wirken, um einen festen Punkt drehbar ist, und man

Digitized by Google

diesen Punkt als Anfangspunkt der Coordinaten annimmt; so sind:

$$L_1 = 0, \quad M_1 = 0, \quad N_1 = 0;$$

nämlich:

$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0,$$

$$\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0,$$

$$\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0;$$

die **nothwendigen** Bedingungsgleichungen für den Zustand der Ruhe dieses Systems.

§. 9.

Bedingungen der Ruhe eines um eine feste Axe drehbaren Systems.

Alle früher eingeführten Bezeichnungen auch jetzt beibehaltend, wollen wir nun die nothwendigen Bedingungen der Ruhe eines um eine feste Axe drehbaren Systems aufsuchen.

Grösserer Einfachheit wegen nehmen wir die feste Axe als Axe der z an.

Nach §. 7. lassen sich die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots. P_n$$

auf zwei nicht verschwindende Kräfte R und R_1' zurückführen, deren letztere durch den Anfang der Coordinaten geht und daher von diesem, als einem Punkte der festen Axe, ganz aufgehoben wird, so dass also bloss die Kraft R, welche die nicht verschwindende Resultirende der Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots. P_n, R'$$

ist, übrig bleibt. Für diese Kraft haben wir nach §. 7. die Gleichungen:

$$R\cos\varphi = L', \quad R\cos\psi = M', \quad R\cos\chi = N';$$

$$N_1 - M'X + L'Y = 0,$$

$$L_1 - N'Y + M'Z = 0,$$

$$M_1 - L'Z + N'X = 0.$$

Zuerst wollen wir annehmen, dass

Digitized by Google

$$N_1 = 0$$

sei. Dann ist wegen der vorhergehenden Gleichungen:

$$M'X - L'Y = 0 \text{ oder } M'X = L'Y.$$

Ist nun zugleich

$$L' = 0, \quad M' = 0;$$

so ist:

$$R\cos\varphi = 0, \quad R\cos\psi = 0;$$

also, weil R nicht verschwindet:

$$\cos\varphi = 0, \quad \cos\psi = 0;$$

folglich:

$$\varphi = 90^0, \quad \psi = 90^0.$$

Daher steht die Kraft R auf den Axen der x und y, also auf der Ebene der xy senkrecht, und ist folglich der Axe der z, nämlich der festen Axe, parallel, kann also offenbar keine Drehung des Systems um diese Axe hervorbringen. Wenn ferner nicht zugleich

$$L' = 0, \quad M' = 0$$

ist, so folgt aus der Gleichung

$$M'X = L'Y$$

offenbar, dass immer gleichzeitig

$$X = 0 \quad Y = 0$$

ist, also die Kraft R durch die Axe der z, nämlich durch die feste Axe geht, von welcher sie aufgehoben wird, so dass also das System wieder in Ruhe ist.

Hieraus ergiebt sich, dass, wenn

$$N_1 = 0$$

ist, das System sich in Ruhe befindet.

Ferner wollen wir annehmen, dass nicht

$$N_1 = 0$$

sei. Dann ist wegen der Gleichung

$$N_1 - M'X + L'Y = 0$$

nicht

$$M'X - L'Y = 0$$

oder nicht

Digitized by Google

$$M'X = L'Y.$$

Also ist nicht zugleich

$$L' = 0, \quad M' = 0$$

und auch nicht zugleich

$$X = 0, \quad Y = 0;$$

woraus sich leicht ergiebt, dass die nicht verschwindende Kraft R nicht der Axe der z, nämlich der festen Axe, parallel ist und auch nicht durch dieselbe geht, woraus sich leicht ergiebt, dass das System nicht in Ruhe sein kann, wenn man sich nur die auf der festen Axe und der Richtungslinie der Kraft R zugleich senkrecht stehende Gerade denkt, und in dem Punkte, in welchem von dieser Geraden die Richtungslinie der Kraft R getroffen wird, in der durch diesen Punkt senkrecht gegen die in Rede stehende Gerade gelegten Ebene, die Kraft R in zwei, natürlich auf der in Rede stehenden Geraden senkrecht stehende Kräfte zerlegt, von denen die eine der festen Axe parallel ist, die andere jedenfalls nie verschwindende auf der festen Axe (natürlich ohne dieselbe zu schneiden) senkrecht steht, wobei man sich an die bekannte geometrische Construction der kürzesten Entfernung zweier geraden Linien im Raume zu erinnern hat.

Hieraus folgt, dass, wenn nicht

$$N_1 = 0$$

ist, das System sich nicht in Ruhe befindet.

Wenn also das System sich in Ruhe befindet, so ist

$$N_1 = 0.$$

Die beiden vorhergehenden Sätze fassen wir in dem folgenden Satze zusammen:

Wenn das System, an welchem die Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots. P_n$$

wirken, um eine feste Axe drehbar ist, und diese feste Axe als Axe der z angenommen wird; so ist

$$N_1 = 0,$$

nämlich:

$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0,$$

die **nothwendige** Bedingungsgleichung für den Zustand der Ruhe dieses Systems.

Digitized by Google

§. 10.

Parallele Kräfte.

Wenn die Richtungslinien der sämmtlichen Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ \ldots.\ P_n$$

unter einander parallel sind, so kann man sich eine beliebige Gerade im Raume denken, welche den sämmtlichen Richtungslinien parallel ist; bezeichnet man dann die Bestimmungswinkel dieser Geraden durch α, β, γ, so können α, β, γ als die Bestimmungswinkel der sämmtlichen Richtungslinien betrachtet werden, und man kann also im Obigen:

$$\alpha = \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \ldots. = \alpha_n,$$

$$\beta = \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \ldots. = \beta_n,$$

$$\gamma = \gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \ldots. = \gamma_n$$

setzen, wo dann alle nach der durch die Winkel α, β, γ bestimmten Richtung, welche natürlich beliebig gewählt werden kann, hin wirkenden Kräfte als positiv, die nach der entgegengesetzten Richtung hin wirkenden Kräfte als negativ betrachtet werden.

Unter diesen Voraussetzungen werden nach §. 6. die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts in diesem Falle offenbar:

$$\cos\alpha\,\Sigma P = 0,\quad \cos\beta\,\Sigma P = 0,\quad \cos\gamma\,\Sigma P = 0;$$

$$\cos\beta\,\Sigma Px = \cos\alpha\,\Sigma Py,$$

$$\cos\gamma\,\Sigma Py = \cos\beta\,\Sigma Pz,$$

$$\cos\alpha\,\Sigma Pz = \cos\gamma\,\Sigma Px;$$

weil aber wegen der Gleichung

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1$$

wenigstens einer der drei Cosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nicht verschwindet, so werden die vorstehenden Bedingungsgleichungen:

$$1)\ \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} \Sigma P = 0; \\ \cos\beta\,\Sigma Px = \cos\alpha\,\Sigma Py, \\ \cos\gamma\,\Sigma Py = \cos\beta\,\Sigma Pz, \\ \cos\alpha\,\Sigma Pz = \cos\gamma\,\Sigma Px. \end{array}\right.$$

Digitized by Google

Lässt sich das System um einen festen Punkt drehen, so sind nach §. 8., wenn man diesen festen Punkt als Anfangspunkt der Coordinaten annimmt, die Bedingungsgleichungen für den Zustand der Ruhe auf ganz ähnliche Weise wie vorher:

$$2) \ldots \ldots \left\{ \begin{aligned} \cos\beta\,\Sigma Px &= \cos\alpha\,\Sigma Py, \\ \cos\gamma\,\Sigma Py &= \cos\beta\,\Sigma Pz, \\ \cos\alpha\,\Sigma Pz &= \cos\gamma\,\Sigma Px. \end{aligned} \right.$$

Lässt sich das System um eine feste Axe drehen, so ist nach §. 9., wenn man diese feste Axe als Axe der z annimmt, die Bedingungsgleichung für den Zustand der Ruhe:

$$3) \ldots \ldots \cos\beta\,\Sigma Px = \cos\alpha\,\Sigma Py.$$

Nimmt man die Axe der z den Richtungslinien der sämmtlichen Kräfte parallel, so ist

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = \pm 1$$

und die Bedingungsgleichungen 1) für den Zustand des Gleichgewichts werden also, weil die Gleichung

$$\cos\beta\,\Sigma Px = \cos\alpha\,\Sigma Py$$

die identische Form $0 = 0$ erhält.

$$4) \ldots \ldots \Sigma P = 0, \quad \Sigma Px = 0, \quad \Sigma Py = 0.$$

Lässt sich das System um einen festen Punkt drehen, so kann man diesen Punkt als Anfang der Coordinaten und die Axe der z den Richtungslinien der sämmtlichen Kräfte parallel annehmen; dann ist wieder

$$\cos\alpha = 0, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = \pm 1$$

und nach 2) sind die Bedingungsgleichungen für den Zustand der Ruhe:

$$5) \ldots \ldots \Sigma Px = 0, \quad \Sigma Py = 0.$$

Wir wollen jetzt zur Bestimmung der Resultirenden übergehen, wobei wir uns ein für allemal auf §. 7. beziehen.

In diesem Falle ist:

6)

$$L = \cos\alpha\,\Sigma P, \quad M = \cos\beta\,\Sigma P, \quad N = \cos\gamma\,\Sigma P;$$
$$N_1 = \cos\beta\,\Sigma Px - \cos\alpha\,\Sigma Py,$$
$$L_1 = \cos\gamma\,\Sigma Py - \cos\beta\,\Sigma Pz,$$
$$M_1 = \cos\alpha\,\Sigma Pz - \cos\gamma\,\Sigma Px.$$

Digitized by Google

Weil hiernach:

$$LL_1 + MM_1 + NN_1$$

$$= \cos\gamma\cos\alpha\,\Sigma P.\Sigma Py - \cos\alpha\cos\beta\,\Sigma P.\Sigma Pz$$
$$+ \cos\alpha\cos\beta\,\Sigma P.\Sigma Pz - \cos\beta\cos\gamma\,\Sigma P.\Sigma Px$$
$$+ \cos\beta\cos\gamma\,\Sigma P.\Sigma Px - \cos\gamma\cos\alpha\,\Sigma P.\Sigma Py$$

ist, so ist im vorliegenden Falle offenbar die Gleichung

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0$$

immer erfüllt.

Aus den Formeln

$$L = \cos\alpha\,\Sigma P,\quad M = \cos\beta\,\Sigma P,\quad N = \cos\gamma\,\Sigma P$$

erhellet, weil $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ nicht zugleich verschwinden, dass nur zugleich

$$L = 0,\quad M = 0,\quad N = 0$$

sein kann, wenn $\Sigma P = 0$ ist.

Daher ergiebt sich aus dem oben ein für allemal angezogenen Paragraphen, dass, wenn nicht $\Sigma P = 0$ ist, die parallelen Kräfte immer auf eine nicht verschwindende Resultirende zurückgeführt werden können. Weil

$$L^2 + M^2 + N^2 = (\Sigma P)^2$$

ist, so ist, wenn (ΣP) den absoluten Werth von ΣP bezeichnet, nach §. 7. 9):

$$R = (\Sigma P)$$

und:

$$\cos\varphi = \cos\alpha\,\frac{\Sigma P}{(\Sigma P)},\quad \cos\psi = \cos\beta\,\frac{\Sigma P}{(\Sigma P)},\quad \cos\chi = \cos\gamma\,\frac{\Sigma P}{(\Sigma P)};$$

also:

$$\cos\varphi = \pm\cos\alpha,\quad \cos\psi = \pm\cos\beta,\quad \cos\chi = \pm\cos\gamma;$$

$$\varphi = \begin{cases}\alpha\\ 180^0 - \alpha\end{cases}\qquad \psi = \begin{cases}\beta\\ 180^0 - \beta\end{cases}\qquad \chi = \begin{cases}\gamma\\ 180^0 - \gamma\end{cases}$$

wenn man die oberen oder unteren Werthe nimmt, jenachdem ΣP positiv oder negativ ist. Man sieht hieraus, dass die Richtungslinie der Resultirenden den Richtungslinien der sämmtlichen gegebenen Kräfte parallel ist, und da das positive R nach der durch die Winkel φ, ψ, χ bestimmten Richtung hin wirkt, so wirkt R nach der Richtung der positiven oder negativen Kräfte

Digitized by Google

hin, jenachdem ΣP positiv oder negativ ist; mit Rücksicht hierauf kann man

$$7) \ldots \ldots \ldots \quad R = \Sigma P$$

setzen, wo dann durch das Vorzeichen von R zugleich die Richtung bestimmt wird, nach welcher die den sämmtlichen gegebenen Kräften parallele Resultirende hin wirkt.

Zwischen den Coordinaten X, Y, Z haben wir nach §. 7. 10) und oben nach 6) die Gleichungen:

8)

$$\cos\beta\,\Sigma Px - \cos\alpha\,\Sigma Py - X\cos\beta\,\Sigma P + Y\cos\alpha\,\Sigma P = 0,$$

$$\cos\gamma\,\Sigma Py - \cos\beta\,\Sigma Pz - Y\cos\gamma\,\Sigma P + Z\cos\beta\,\Sigma P = 0,$$

$$\cos\alpha\,\Sigma Pz - \cos\gamma\,\Sigma Px - Z\cos\alpha\,\Sigma P + X\cos\gamma\,\Sigma P = 0;$$

oder:

9)

$$(X\cos\beta - Y\cos\alpha)\,\Sigma P = \cos\beta\,\Sigma Px - \cos\alpha\,\Sigma Py,$$

$$(Y\cos\gamma - Z\cos\beta)\,\Sigma P = \cos\gamma\,\Sigma Py - \cos\beta\,\Sigma Pz,$$

$$(Z\cos\alpha - X\cos\gamma)\,\Sigma P = \cos\alpha\,\Sigma Pz - \cos\gamma\,\Sigma Px.$$

Setzt man:

$$X = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad Y = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}, \quad Z = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P};$$

welches, insofern ΣP, wie wir hier voraussetzen, nicht verschwindet, endliche völlig bestimmte Werthe sind; so werden die vorstehenden Gleichungen:

$$\cos\beta\,\Sigma Px - \cos\alpha\,\Sigma Py = \cos\beta\,\Sigma Px - \cos\alpha\,\Sigma Py,$$

$$\cos\gamma\,\Sigma Py - \cos\beta\,\Sigma Pz = \cos\gamma\,\Sigma Py - \cos\beta\,\Sigma Pz,$$

$$\cos\alpha\,\Sigma Pz - \cos\gamma\,\Sigma Px = \cos\alpha\,\Sigma Pz - \cos\gamma\,\Sigma Px;$$

und sind also vollständig erfüllt. Da es nun bloss darauf ankommt, einen Punkt der Richtungslinie der Resultirenden zu kennen, so genügt es zur Bestimmung der Resultirenden vollkommen:

$$10) \ldots \quad X = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad Y = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}, \quad Z = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}$$

zu setzen.

Die durch diese Formeln bestimmten Coordinaten X, Y, Z hängen nur von

Digitized by Google

$$P_0, \; P_1, \; P_2, \; P_3, \ldots P_n$$

und

$$x_0, y_0, z_0; \; x_1, y_1, z_1; \; x_2, y_2, z_2; \ldots x_n, y_n, z_n;$$

aber nicht von

$$\alpha_0, \beta_0, \gamma_0; \; \alpha_1, \beta_1, \gamma_1; \; \alpha_2, \beta_2, \gamma_2; \ldots; \alpha_n, \beta_n, \gamma_n;$$

also nicht von der Lage der Richtungslinien der parallelen Kräfte im Raume ab. Daher bleibt der Punkt (XYZ) derselbe, oder die Resultirende geht immer durch diesen Punkt, welche Lage auch die Richtungslinien der parallelen Kräfte im Raume haben mögen, wenn nur die Kräfte an sich und ihre Angriffspunkte ungeändert bleiben. Wegen dieser merkwürdigen Eigenschaft hat man den durch die Formeln 10) bestimmten Punkt den **Mittelpunkt der parallelen Kräfte** oder das **Centrum der parallelen Kräfte** genannt. Dass es einen solchen Punkt nur für solche parallele Kräfte giebt, für welche nicht $\Sigma P = 0$ ist, ergiebt sich aus dem Vorhergehenden von selbst.

Wenn $\Sigma P = 0$ und also nach dem Obigen $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$ ist, lassen sich die gegebenen parallelen Kräfte nach §. 7. nur auf ein Kräftepaar zurückführen, oder dieselben sind unter einander im Gleichgewichte.

§. 11.

In einer und derselben Ebene wirkende Kräfte.

Wenn die Kräfte

$$P_0, \; P_1, \; P_2, \; P_3, \ldots P_n$$

sämmtlich in einer und derselben Ebene wirken, so nehmen wir diese Ebene als Ebene der xy an.

Unter dieser Voraussetzung ist:

$$\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 \ldots = \gamma_n = 90^\circ,$$

also:

$$\cos\gamma_0 = \cos\gamma_1 = \cos\gamma_2 = \cos\gamma_3 = \ldots = \cos\gamma_n = 0;$$

ferner

$$z_0 = z_1 = z_2 = z_3 = \ldots z_n = 0.$$

Also sind nach §. 6. die Bedingungsgleichungen für den Zustand des Gleichgewichts:

$$1) \ldots \Sigma P\cos\alpha = 0, \quad \Sigma P\cos\beta = 0, \quad \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0.$$

Digitized by Google

Ist das System um einen festen Punkt drehbar und man nimmt denselben als Anfang der Coordinaten an, so ist nach §. 8. die Bedingungsgleichung für den Zustand der Ruhe:

$$2) \ldots\ldots \quad \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0.$$

Wir wollen jetzt zur Bestimmung der Resultirenden übergehen. In diesem Falle ist:

$$L = \Sigma P\cos\alpha, \quad M = \Sigma P\cos\beta, \quad N = 0;$$

$$N_1 = \Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha), \quad L_1 = 0, \quad M_1 = 0;$$

also ist die Gleichung:

$$LL_1 + MM_1 + NN_1 = 0$$

immer erfüllt.

Wenn nicht zugleich

$$L = \Sigma P\cos\alpha = 0, \quad M = \Sigma P\cos\beta = 0$$

ist, so giebt es nach §. 7. eine nicht verschwindende Resultirende, welche durch die folgenden Formeln:

$$3) \ldots \left\{ \begin{aligned} & R = \sqrt{(\Sigma P\cos\alpha)^2 + (\Sigma P\cos\beta)^2}; \\ & \cos\varphi = \frac{\Sigma P\cos\alpha}{\sqrt{(\Sigma P\cos\alpha)^2 + (\Sigma P\cos\beta)^2}}, \\ & \cos\psi = \frac{\Sigma P\cos\beta}{\sqrt{(\Sigma P\cos\alpha)^2 + (\Sigma P\cos\beta)^2}}, \\ & \cos\chi = 0 \end{aligned} \right.$$

bestimmt wird. Wegen der letzten Gleichung ist $\chi = 90^{\circ}$, und die Richtung der Resultirenden steht also auf der Axe der z senkrecht, oder ist der Ebene der xy, nämlich der Ebene, in welcher die sämmtlichen Kräfte wirken, parallel; wegen der aus §. 7. bekannten Gleichungen:

$$\begin{aligned} N_1 - MX + LY &= 0, \\ L_1 - NY + MZ &= 0, \\ M_1 - LZ + NX &= 0 \end{aligned}$$

ist aber, weil L und M nicht zugleich verschwinden, offenbar allgemein $Z = 0$, und die Resultirende wirkt also ganz in der Ebene der xy, nämlich in derselben Ebene, in welcher die sämmtlichen gegebenen Kräfte wirken. Zwischen X und Y haben wir wegen der ersten der drei vorstehenden Gleichungen die Gleichung:

Digitized by Google

$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)-X\Sigma P\cos\beta+Y\Sigma P\cos\alpha=0$$

oder:

$$4)\ldots.\quad X\Sigma P\cos\beta-Y\Sigma P\cos\alpha=\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha).$$

Wenn zugleich

$$L=\Sigma P\cos\alpha=0,\quad M=\Sigma P\cos\beta=0$$

ist, so können die Kräfte nur auf ein Kräftepaar zurückgeführt werden, oder dieselben sind unter einander im Gleichgewichte.

Nach den Lehren der analytischen Geometrie kann man im vorliegenden Falle für

$$\cos\alpha_0,\ \cos\alpha_1,\ \cos\alpha_2,\ \ldots.,\ \cos\alpha_n;\ \cos\varphi$$
$$\cos\beta_0,\ \cos\beta_1,\ \cos\beta_2,\ \ldots.,\ \cos\beta_n;\ \cos\psi$$

respective

$$\cos\alpha_0,\ \cos\alpha_1,\ \cos\alpha_2,\ \ldots.,\ \cos\alpha_n;\ \cos\varphi$$
$$\sin\alpha_0,\ \sin\alpha_1,\ \sin\alpha_2,\ \ldots.,\ \sin\alpha_n;\ \sin\varphi$$

setzen, wo nun aber bekanntlich

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \ldots.,\ \alpha_n;\ \varphi$$

von dem positiven Theile der Axe der x an nach dem positiven Theile der Axe der y hin von 0 bis 360° gezählt sind. Unter dieser Voraussetzung sind die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts:

1*)

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\quad \Sigma P\sin\alpha=0,\quad \Sigma P(x\sin\alpha-x\cos\alpha)=0.$$

Ist das System um einen festen Punkt drehbar, den man als Anfang der Coordinaten annimmt, so ist die Bedingungsgleichung für den Zustand der Ruhe:

$$2^*)\ \ldots\ldots\ldots\quad \Sigma P(x\sin\alpha-y\cos\alpha)=0.$$

Wenn nicht zugleich

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\quad \Sigma P\sin\alpha=0$$

ist, so giebt es eine nicht verschwindende, in derselben Ebene mit den gegebenen Kräften wirkende Resultirende, welche durch die folgenden Formeln bestimmt wird:

$$3^*)\ \ldots\ \left\{\begin{aligned} R&=\sqrt{(\Sigma P\cos\alpha)^2+(\Sigma P\sin\alpha)^2};\\ \cos\varphi&=\frac{\Sigma P\cos\alpha}{\sqrt{(\Sigma P\cos\alpha)^2+(\Sigma P\sin\alpha)^2}},\\ \sin\varphi&=\frac{\Sigma P\sin\alpha}{\sqrt{(\Sigma P\cos\alpha)^2+(\Sigma P\sin\alpha)^2}}\end{aligned}\right.$$

Digitized by Google

und:

4*).... $X \Sigma P \sin\alpha - Y \Sigma P \cos\alpha = \Sigma P(x \sin\alpha - y \cos\alpha)$.

Aus den Gleichungen 3*) ergiebt sich auch die Formel:

5*) . . . . $\operatorname{tang}\varphi = \frac{\Sigma P \sin\alpha}{\Sigma P \cos\alpha}$,

mittelst welcher aber φ nach folgenden Regeln bestimmt werden muss:

$\Sigma P \cos\alpha$	$\Sigma P \sin\alpha$	
positiv	positiv	$0 < \varphi < 90^0$
negativ	positiv	$90^0 < \varphi < 180^0$
negativ	negativ	$180^0 < \varphi < 270^0$
positiv	negativ	$270^0 < \varphi < 360^0$.

Wenn zugleich

$$\Sigma P \cos\alpha = 0, \quad \Sigma P \sin\alpha = 0$$

ist, so können die Kräfte nur auf ein Kräftepaar zurückgeführt werden, oder dieselben sind unter einander im Gleichgewichte.

Wenn im vorliegenden Falle die Kräfte sämmtlich unter einander parallel sind, so kann man

$$\alpha = \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots. = \alpha_n,$$

$$\beta = \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \ldots. = \beta_n$$

setzen; also sind nach 1) die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts:

$$\cos\alpha \Sigma P = 0, \ \cos\beta \Sigma P = 0, \ \cos\beta \Sigma Px - \cos\alpha \Sigma Py = 0;$$

folglich, weil wegen der Gleichung

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 = 1$$

die Cosinus $\cos\alpha$, $\cos\beta$ nicht zugleich verschwinden:

5) . . . . . $\Sigma P = 0, \ \cos\beta \Sigma Px = \cos\alpha \Sigma Py$.

Nimmt man die Axe der x so an, dass sie die Richtungslinien der sämmtlichen Kräfte schneidet, so kann man offenbar

$$y_0 = y_1 = y_2 = \ldots. = y_n = 0$$

setzen, und es ist dann augenscheinlich nicht $\beta = 90^0$, also nicht $\cos\beta = 0$; folglich sind nach 5) die Bedingungsgleichungen des Gleichgewichts:

Digitized by Google

6) . . . . $\Sigma P = 0, \quad \Sigma Px = 0;$

wo x_0, x_1, x_2, x_3, ... x_n sich auf die Durchschnittspunkte der Richtungslinien der parallelen Kräfte mit der Axe der x beziehen, welche Axe natürlich ganz beliebig angenommen werden kann, wenn sie nur die sämmtlichen Richtungslinien schneidet.

Ist das System um einen festen Punkt drehbar, so nehme man denselben als Anfang der Coordinaten an, und die Bedingungsgleichung für den Zustand der Ruhe ist dann nach 2):

7) . . . . $\cos\beta\,\Sigma Px = \cos\alpha\,\Sigma Py$

oder, wenn man die Axe der x so annimmt, dass sie die sämmtlichen Richtungslinien schneidet:

8) . . . . $\Sigma Px = 0,$

wo x_0, x_1, x_2, x_3, ... x_n sich auf die Durchschnittspunkte der willkührlichen Axe der x mit den Richtungslinien beziehen.

Wenn nicht zugleich

$$L = \cos\alpha\,\Sigma P = 0, \quad M = \cos\beta\,\Sigma P = 0;$$

also, weil $\cos\alpha$, $\cos\beta$ nicht zugleich verschwinden, wenn nicht $\Sigma P = 0$ ist, so lassen sich die Kräfte nach dem Obigen auf eine nicht verschwindende Resultirende zurückführen, welche nach 3) offenbar durch die folgenden Formeln bestimmt wird:

$$R = \sqrt{(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2)(\Sigma P)^2};$$

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha\,\Sigma P}{\sqrt{(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2)(\Sigma P)^2}},$$

$$\cos\psi = \frac{\cos\beta\,\Sigma P}{\sqrt{(\cos\alpha^2 + \cos\beta^2)(\Sigma P)^2}},$$

$$\cos\chi = 0;$$

also mittelst der Formeln:

$$R = (\Sigma P), \quad \cos\varphi = \cos\alpha\,\frac{\Sigma P}{(\Sigma P)}, \quad \cos\psi = \cos\beta\,\frac{\Sigma P}{(\Sigma P)}, \quad \cos\chi = 0;$$

wo (ΣP) wieder den absoluten Werth von ΣP bezeichnet; oder:

$$R = (\Sigma P), \quad \cos\varphi = \pm\cos\alpha, \quad \cos\psi = \pm\cos\beta, \quad \cos\chi = 0.$$

Die Resultirende wirkt also in derselben Ebene wie die gegebenen Kräfte und ist denselben parallel, und wenn man

9) . . . . $R = \Sigma P$

Digitized by Google

setzt, so wird durch das Zeichen der Resultirenden zugleich ihre Richtung bestimmt, was ganz eben so erhellet wie in dem allgemeineren Falle in §. 10.

Zwischen X, Y hat man nach 4) die Gleichung:

$$(X\cos\beta - Y\cos\alpha)\Sigma P = \cos\beta\,\Sigma Px - \cos\alpha\,\Sigma Py,$$

welche erfüllt wird, wenn man

$$10) \ldots\ldots\ldots X = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad Y = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}$$

setzt, welche Werthe, wenn ΣP nicht verschwindet, endliche völlig bestimmte Grössen sind.

Der durch die vorstehenden Coordinaten bestimmte Punkt (XY) heisst auch hier, wie in §. 10., und aus ähnlichen Gründen wie dort, der Mittelpunkt der parallelen Kräfte oder das Centrum der parallelen Kräfte.

Wenn $\Sigma P = 0$ ist, so lassen sich die Kräfte nur auf ein Kräftepaar zurückführen oder dieselben sind unter einander im Gleichgewichte.

§. 12.

Anderer Ausdruck der Bedingungen des Gleichgewichts.

Wir wollen uns eine beliebige Gerade denken, welche durch die Gleichungen:

$$1) \ldots\ldots\ldots \frac{x-a}{\cos\theta} = \frac{y-b}{\cos\omega} = \frac{z-c}{\cos\overline{\omega}}$$

charakterisirt sein mag, und im Allgemeinen die Axe genannt werden soll.

Betrachten wir nun eine beliebige Kraft P_0, deren Richtungslinie durch die Gleichungen:

$$2) \ldots\ldots\ldots \frac{x-x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{y-y_0}{\cos\beta_0} = \frac{z-z_0}{\cos\gamma_0}$$

charakterisirt ist.

Von dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ fällen wir auf die Axe ein Perpendikel, dessen auf der Axe liegenden Fusspunkt wir durch $(X_0Y_0Z_0)$ bezeichnen. Die 180^0 nicht übersteigenden Winkel, welche die von dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ aus nach dem Punkte $(X_0Y_0Z_0)$ hin gehende Richtung dieses Perpendikels mit den

Digitized by Google

positiven Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, bezeichnen wir durch θ_0, ω_0, $\overline{\omega}_0$; die als positiv oder absolut betrachtete Entfernung des Punktes $(X_0 Y_0 Z_0)$ von dem Punkte $(x_0 y_0 z_0)$, also die Entfernung des Punktes $(x_0 y_0 z_0)$ von der Axe, mag durch G_0 bezeichnet werden; dann ist nach §. 1. 4):

$$3) \ldots\ldots \frac{X_0-x_0}{\cos\theta_0}=\frac{Y_0-y_0}{\cos\omega_0}=\frac{Z_0-z_0}{\cos\overline{\omega}_0}=G_0.$$

Weil ferner der Punkt $(X_0 Y_0 Z_0)$ in der durch die Gleichungen 1) charakterisirten Axe liegt, so ist nach §. 1. 4):

$$4) \ldots\ldots \frac{X_0-a}{\cos\theta}=\frac{Y_0-b}{\cos\omega}=\frac{Z_0-c}{\cos\overline{\omega}}=G,$$

wo G die Entfernung des Punktes $(X_0 Y_0 Z_0)$ von dem Punkte (abc) bezeichnet, insofern man diese Entfernung als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem der Punkt $(X_0 Y_0 Z_0)$ in der der beiden von dem Punkte (abc) ausgehenden Richtungen der Axe, welcher die Winkel θ, ω, $\overline{\omega}$ entsprechen, oder in der dieser Richtung entgegengesetzten Richtung liegt.

Hiernach haben wir also die Gleichungen:

$$5) \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} X_0=a+G\cos\theta=x_0+G_0\cos\theta_0, \\ Y_0=b+G\cos\omega=y_0+G_0\cos\omega_0, \\ Z_0=c+G\cos\overline{\omega}=z_0+G_0\cos\overline{\omega}_0; \end{array}\right.$$

also die Gleichungen:

$$6) \ldots\ldots \left\{\begin{array}{l} x_0-a=G\cos\theta-G_0\cos\theta_0, \\ y_0-b=G\cos\omega-G_0\cos\omega_0, \\ z_0-c=G\cos\overline{\omega}-G_0\cos\overline{\omega}_0; \end{array}\right.$$

aus denen sich, wenn man G und G_0 eliminirt, die Gleichung:

7)

$$\left.\begin{array}{r} (x_0-a)(\cos\omega\cos\overline{\omega}_0-\cos\overline{\omega}\cos\omega_0) \\ +(y_0-b)(\cos\overline{\omega}\cos\theta_0-\cos\theta\cos\overline{\omega}_0) \\ +(z_0-c)(\cos\theta\cos\omega_0-\cos\omega\cos\theta_0) \end{array}\right\}=0$$

oder:

Digitized by Google

8)

$$\left.\begin{aligned} &\{(y_0-b)\cos\overline{\omega}-(z_0-c)\cos\omega\}\cos\theta_0\\ +&\{(z_0-c)\cos\theta-(x_0-a)\cos\overline{\omega}\}\cos\omega_0\\ +&\{(x_0-a)\cos\omega-(y_0-b)\cos\theta\}\cos\overline{\omega}_0 \end{aligned}\right\}=0$$

ergiebt.

Wegen der Perpendicularität der beiden so eben betrachteten, durch die Gleichungen:

$$\frac{x-a}{\cos\theta}=\frac{y-b}{\cos\omega}=\frac{z-c}{\cos\overline{\omega}} \text{ und } \frac{x-x_0}{\cos\theta_0}=\frac{y-y_0}{\cos\omega_0}=\frac{z-z_0}{\cos\overline{\omega}_0}$$

charakterisirten Geraden hat man aber ferner die Gleichung:

$$9) \ldots \cos\theta\cos\theta_0+\cos\omega\cos\omega_0+\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_0=0,$$

und erhält nun aus den Gleichungen 8) und 9), wenn G_0' einen gewissen Factor bezeichnet, auf bekannte Weise leicht:

$$\cos\theta_0=G_0'\left\{\begin{aligned} &\cos\omega[(x_0-a)\cos\omega-(y_0-b)\cos\theta]\\ -&\cos\overline{\omega}[(z_0-c)\cos\theta-(x_0-a)\cos\overline{\omega}] \end{aligned}\right\},$$

$$\cos\omega_0=G_0'\left\{\begin{aligned} &\cos\overline{\omega}[(y_0-b)\cos\overline{\omega}-(z_0-c)\cos\omega]\\ -&\cos\theta[(x_0-a)\cos\omega-(y_0-b)\cos\theta] \end{aligned}\right\},$$

$$\cos\overline{\omega}_0=G_0'\left\{\begin{aligned} &\cos\theta[(z_0-c)\cos\theta-(x_0-a)\cos\overline{\omega}]\\ -&\cos\omega[(y_0-b)\cos\overline{\omega}-(z_0-c)\cos\omega] \end{aligned}\right\};$$

oder, wie man sogleich übersieht:

10)

$$\begin{aligned} \cos\theta_0&=G_0'\{x_0-a-[(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\overline{\omega}]\cos\theta\},\\ \cos\omega_0&=G_0'\{y_0-b-[(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\overline{\omega}]\cos\omega\},\\ \cos\overline{\omega}_0&=G_0'\{z_0-c-[(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\overline{\omega}]\cos\overline{\omega}\}; \end{aligned}$$

woraus sich ferner leicht die Gleichung:

11)

$$\begin{aligned} G_0'^2\{&(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2\\ &-[(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\overline{\omega}]^2\}=1 \end{aligned}$$

ergiebt.

Aus den Gleichungen 6), nämlich aus den Gleichungen:

$$x_0-a=G\cos\theta-G_0\cos\theta_0,$$

$$y_0-b=G\cos\omega-G_0\cos\omega_0,$$

$$z_0-c=G\cos\overline{\omega}-G_0\cos\overline{\omega}_0$$

erhält man ferner leicht:

$$(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\overline{\omega}$$
$$=G-G_0(\cos\theta\cos\theta_0+\cos\omega\cos\omega_0+\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_0),$$

$$(x_0-a)\cos\theta_0+(y_0-b)\cos\omega_0+(z_0-c)\cos\overline{\omega}_0$$
$$=G(\cos\theta\cos\theta_0+\cos\omega\cos\omega_0+\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}_0)-G_0;$$

also nach 9):

12)

$$(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\overline{\omega}=G,$$

$$(x_0-a)\cos\theta_0+(y_0-b)\cos\omega_0+(z_0-c)\cos\overline{\omega}_0=-G_0.$$

Führt man in die letztere dieser beiden Gleichungen die Werthe von $\cos\theta_0$, $\cos\omega_0$, $\cos\overline{\omega}_0$ aus 10) ein, so erhält man:

$$G_0'\{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2$$
$$-[(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\overline{\omega}]^2\}=-G_0,$$

also:

$$G_0'^2\{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2$$
$$-[(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\overline{\omega}]^2\}=-G_0G_0',$$

und folglich nach 11):

13) . . . . $G_0G_0'=-1,$

woraus sich, weil bekanntlich G_0 eine positive Grösse ist, ergiebt, dass G_0' eine negative Grösse, und folglich nach 11):

14)

$$G_0'=-\frac{1}{\sqrt{\left\{\begin{array}{c}(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2\\-[(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\overline{\omega}]^2\end{array}\right\}}}$$

ist.

Digitized by Google

Endlich ist nach 3):

$$X_0 - x_0 = G_0 \cos\theta_0,$$

$$Y_0 - y_0 = G_0 \cos\omega_0,$$

$$Z_0 - z_0 = G_0 \cos\overline{\omega}_0;$$

also nach 10):

$$X_0 - x_0$$
$$= G_0 G_0' \{x_0 - a - [(x_0 - a)\cos\theta + (y_0 - b)\cos\omega + (z_0 - c)\cos\overline{\omega}]\cos\theta\},$$

$$Y_0 - y_0$$
$$= G_0 G_0' \{y_0 - b - [(x_0 - a)\cos\theta + (y_0 - b)\cos\omega + (z_0 - c)\cos\overline{\omega}]\cos\omega\},$$

$$Z_0 - z_0$$
$$= G_0 G_0' \{z_0 - c - [(x_0 - a)\cos\theta + (y_0 - b)\cos\omega + (z_0 - c)\cos\overline{\omega}]\cos\overline{\omega}\};$$

also nach 13):

15)

$$X_0 = a + \{(x_0 - a)\cos\theta + (y_0 - b)\cos\omega + (z_0 - c)\cos\overline{\omega}\}\cos\theta,$$

$$Y_0 = b + \{(x_0 - a)\cos\theta + (y_0 - b)\cos\omega + (z_0 - c)\cos\overline{\omega}\}\cos\omega,$$

$$Z_0 = c + \{(x_0 - a)\cos\theta + (y_0 - b)\cos\omega + (z_0 - c)\cos\overline{\omega}\}\cos\overline{\omega}.$$

Durch den Punkt $(x_0 y_0 z_0)$ legen wir jetzt eine auf der Axe senkrecht stehende Ebene, deren Gleichung:

$$A_0(x - x_0) + B_0(y - y_0) + C_0(z - z_0) = 0$$

sein mag; dann ist nach den Lehren der analytischen Geometrie:

$$\frac{A_0}{\cos\theta} = \frac{B_0}{\cos\omega} = \frac{C_0}{\cos\overline{\omega}},$$

und die Gleichung der in Rede stehenden Ebene ist folglich:

$$16) \ldots\ldots (x - x_0)\cos\theta + (y - y_0)\cos\omega + (z - z_0)\cos\overline{\omega} = 0.$$

Ferner legen wir durch den Punkt $(x_0 y_0 z_0)$ eine in dieser Ebene liegende Gerade, welche auf der von dem Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ senkrecht gegen die Axe gezogenen Geraden senkrecht steht, und schneiden auf dieser Senkrechten von dem Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ aus ein beliebiges Stück v_0 ab, dessen Endpunkt durch die Coordinaten $\mathfrak{x}_0$, $\mathfrak{y}_0$, $\mathfrak{z}_0$ bestimmt sein mag. Bezeichnen wir die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche dieses als von dem Punkte $(x_0 y_0 z_0)$ ausgehend gedachte Stück v_0 mit den positiven

Theilen der Axen der x, y, z einschliesst, durch λ_0, μ_0, ν_0; so ist:

$$17) \ldots\ldots \begin{cases} \mathfrak{x}_0 = x_0 + v_0 \cos\lambda_0, \\ \mathfrak{y}_0 = y_0 + v_0 \cos\mu_0, \\ \mathfrak{z}_0 = z_0 + v_0 \cos\nu_0; \end{cases}$$

und die Gleichungen des in Rede stehenden Perpendikels sind:

$$18) \ldots\ldots \frac{x-x_0}{\cos\lambda_0} = \frac{y-y_0}{\cos\mu_0} = \frac{z-z_0}{\cos\nu_0}.$$

Weil dieses Perpendikel in der durch die Gleichung 16) charakterisirten Ebene liegen soll, und auf der von dem Punkte $(x_0y_0z_0)$ senkrecht gegen die Axe gezogenen Geraden, deren Gleichungen

$$\frac{x-x_0}{\cos\theta_0} = \frac{y-y_0}{\cos\omega_0} = \frac{z-z_0}{\cos\overline{\omega}_0}$$

sind, senkrecht steht; so ist:

$$\cos\theta\cos\lambda_0 + \cos\omega\cos\mu_0 + \cos\overline{\omega}\cos\nu_0 = 0,$$

$$\cos\theta_0\cos\lambda_0 + \cos\omega_0\cos\mu_0 + \cos\overline{\omega}_0\cos\nu_0 = 0;$$

also, wenn G_0'' einen gewissen Factor bezeichnet:

$$\cos\lambda_0 = G_0''(\cos\omega\cos\overline{\omega}_0 - \cos\overline{\omega}\cos\omega_0),$$

$$\cos\mu_0 = G_0''(\cos\overline{\omega}\cos\theta_0 - \cos\theta\cos\overline{\omega}_0),$$

$$\cos\nu_0 = G_0''(\cos\theta\cos\omega_0 - \cos\omega\cos\theta_0);$$

folglich nach 10) offenbar:

19)

$$\cos\lambda_0 = G_0'G_0''\{(z_0-c)\cos\omega - (y_0-b)\cos\overline{\omega}\},$$

$$\cos\mu_0 = G_0'G_0''\{(x_0-a)\cos\overline{\omega} - (z_0-c)\cos\theta\},$$

$$\cos\nu_0 = G_0'G_0''\{(y_0-b)\cos\theta - (x_0-a)\cos\omega\};$$

woraus sich sogleich:

$$G_0'^2G_0''^2\{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2 \\ -[(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\overline{\omega}]^2\} = 1;$$

also nach 11):

Digitized by Google

$$G_0'^2 G_0''^2 = G_0'^2, \quad G_0''^2 = 1;$$

folglich:

$$20) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad G_0'' = \pm 1,$$

und daher nach 19):

21)

$$\left\{\begin{array}{l}
\cos\lambda_0 = \pm G_0'\{(z_0 - c)\cos\omega - (y_0 - b)\cos\overline{\omega}\},\\
\cos\mu_0 = \pm G_0'\{(x_0 - a)\cos\overline{\omega} - (z_0 - c)\cos\theta\},\\
\cos\nu_0 = \pm G_0'\{(y_0 - b)\cos\theta - (x_0 - a)\cos\omega\};
\end{array}\right.$$

also nach 17):

22)

$$\left\{\begin{array}{l}
\mathfrak{X}_0 = x_0 \pm G_0' v_0\{(z_0 - c)\cos\omega - (y_0 - b)\cos\overline{\omega}\},\\
\mathfrak{Y}_0 = y_0 \pm G_0' v_0\{(x_0 - a)\cos\overline{\omega} - (z_0 - c)\cos\theta\},\\
\mathfrak{Z}_0 = z_0 \pm G_0' v_0\{(y_0 - b)\cos\theta - (x_0 - a)\cos\omega\}
\end{array}\right.$$

ergiebt.

Von dem Punkte $(\mathfrak{X}_0\mathfrak{Y}_0\mathfrak{Z}_0)$ fällen wir nun auf die Richtungslinie der Kraft P_0 ein Perpendikel, und bezeichnen den Fusspunkt dieses Perpendikels auf der in Rede stehenden Richtungslinie durch $(X_0Y_0Z_0)$; so ist nach den Lehren der analytischen Geometrie, wie leicht erhellet:

$$(\mathfrak{X}_0 - X_0)\cos\alpha_0 + (\mathfrak{Y}_0 - Y_0)\cos\beta_0 + (\mathfrak{Z}_0 - Z_0)\cos\gamma_0 = 0,$$

$$\frac{X_0 - x_0}{\cos\alpha_0} = \frac{Y_0 - y_0}{\cos\beta_0} = \frac{Z_0 - z_0}{\cos\gamma_0}.$$

Die erste dieser Gleichungen kann man auf folgende Art schreiben:

$$\left.\begin{array}{l}
\{(\mathfrak{X}_0 - x_0) - (X_0 - x_0)\}\cos\alpha_0\\
+\{(\mathfrak{Y}_0 - y_0) - (Y_0 - y_0)\}\cos\beta_0\\
+\{(\mathfrak{Z}_0 - z_0) - (Z_0 - z_0)\}\cos\gamma_0
\end{array}\right\} = 0,$$

oder auf folgende Art:

$$(X_0 - x_0)\cos\alpha_0 + (Y_0 - y_0)\cos\beta_0 + (Z_0 - z_0)\cos\gamma_0$$
$$= (\mathfrak{X}_0 - x_0)\cos\alpha_0 + (\mathfrak{Y}_0 - y_0)\cos\beta_0 + (\mathfrak{Z}_0 - z_0)\cos\gamma_0,$$

Digitized by Google

woraus sich, in Verbindung mit den oben in zweiter Linie stehenden Gleichungen, leicht die folgenden Formeln ergeben:

$$\begin{aligned}&X_0-x_0\\&=\{(\mathfrak{X}_0-x_0)\cos\alpha_0+(\mathfrak{Y}_0-y_0)\cos\beta_0+(\mathfrak{Z}_0-z_0)\cos\gamma_0\}\cos\alpha_0,\\&Y_0-y_0\\&=\{(\mathfrak{X}_0-x_0)\cos\alpha_0+(\mathfrak{Y}_0-y_0)\cos\beta_0+(\mathfrak{Z}_0-z_0)\cos\gamma_0\}\cos\beta_0,\\&Z_0-z_0\\&=\{(\mathfrak{X}_0-x_0)\cos\alpha_0+(\mathfrak{Y}_0-y_0)\cos\beta_0+(\mathfrak{Z}_0-z_0)\cos\gamma_0\}\cos\gamma_0;\end{aligned}$$

folglich, weil nach 22) offenbar:

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{X}_0-x_0)\cos\alpha_0+(\mathfrak{Y}_0-y_0)\cos\beta_0+(\mathfrak{Z}_0-z_0)\cos\gamma_0\\&=\pm G_0'v_0\left\{\begin{array}{l}[(z_0-c)\cos\omega-(y_0-b)\cos\overline{\omega}]\cos\alpha_0\\+[(x_0-a)\cos\overline{\omega}-(z_0-c)\cos\theta]\cos\beta_0\\+[(y_0-b)\cos\theta-(x_0-a)\cos\omega]\cos\gamma_0\end{array}\right\}\\&=\pm G_0'v_0\left\{\begin{array}{l}(x_0-a)(\cos\beta_0\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_0\cos\omega)\\+(y_0-b)(\cos\gamma_0\cos\theta-\cos\alpha_0\cos\overline{\omega})\\+(z_0-c)(\cos\alpha_0\cos\omega-\cos\beta_0\cos\theta)\end{array}\right\}\end{aligned}$$

ist:

23)

$$X_0-x_0=\pm G_0'v_0\left\{\begin{array}{l}(x_0-a)(\cos\beta_0\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_0\cos\omega)\\+(y_0-b)(\cos\gamma_0\cos\theta-\cos\alpha_0\cos\overline{\omega})\\+(z_0-c)(\cos\alpha_0\cos\omega-\cos\beta_0\cos\theta)\end{array}\right\}\cos\alpha_0,$$

$$Y_0-y_0=\pm G_0'v_0\left\{\begin{array}{l}(x_0-a)(\cos\beta_0\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_0\cos\omega)\\+(y_0-b)(\cos\gamma_0\cos\theta-\cos\alpha_0\cos\overline{\omega})\\+(z_0-c)(\cos\alpha_0\cos\omega-\cos\beta_0\cos\theta)\end{array}\right\}\cos\beta_0,$$

$$Z_0-z_0=\pm G_0'v_0\left\{\begin{array}{l}(x_0-a)(\cos\beta_0\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_0\cos\omega)\\+(y_0-b)(\cos\gamma_0\cos\theta-\cos\alpha_0\cos\overline{\omega})\\+(z_0-c)(\cos\alpha_0\cos\omega-\cos\beta_0\cos\theta)\end{array}\right\}\cos\gamma_0.$$

Bezeichnen wir nun die Projection von v_0 auf der Richtungslinie der Kraft P_0, indem wir diese Projection als positiv oder

negativ betrachten, jenachdem sie auf dem von $(x_0 y_0 z_0)$ ausgehenden Theile der in Rede stehenden Richtungslinie, welchem die Winkel α_0, β_0, γ_0 entsprechen, oder auf dem entgegengesetzten Theile der Richtungslinie liegt, durch p_0, so ist nach §. 1. 4):

$$X_0 - x_0 = p_0 \cos\alpha_0,$$

$$Y_0 - y_0 = p_0 \cos\beta_0,$$

$$Z_0 - z_0 = p_0 \cos\gamma_0;$$

woraus sich, wenn man diese Formeln mit den Formeln 23) vergleicht, unmittelbar:

$$p_0 = \pm G_0' v_0 \left\{ \begin{array}{l} (x_0 - a)(\cos\beta_0 \cos\overline{\omega} - \cos\gamma_0 \cos\omega) \\ + (y_0 - b)(\cos\gamma_0 \cos\theta - \cos\alpha_0 \cos\overline{\omega}) \\ + (z_0 - c)(\cos\alpha_0 \cos\omega - \cos\beta_0 \cos\theta) \end{array} \right\},$$

also, weil nach 13):

$$G_0 G_0' = -1$$

ist:

24)

$$p_0 = \mp \left\{ \begin{array}{l} (x_0 - a)(\cos\beta_0 \cos\overline{\omega} - \cos\gamma_0 \cos\omega) \\ + (y_0 - b)(\cos\gamma_0 \cos\theta - \cos\alpha_0 \cos\overline{\omega}) \\ + (z_0 - c)(\cos\alpha_0 \cos\omega - \cos\beta_0 \cos\theta) \end{array} \right\} \cdot \frac{v_0}{G_0}$$

ergiebt, wo bekanntlich G_0 die positiv oder absolut genommene Entfernung des Punktes $(x_0 y_0 z_0)$ von der Axe bezeichnet.

Wir wollen jetzt eine beliebige zweite Kraft P_1 betrachten, für welche wir ganz dieselbe Construction wie vorher für die Kraft P_0, natürlich in Bezug auf dieselbe Axe, ausführen, uns dabei ganz analoger Bezeichnungen wie vorher bedienend, wobei uns nun namentlich die Frage entgegen tritt, wie in den, den Kräften P_0 und P_1 entsprechenden Formeln die in denselben vorkommenden doppelten Vorzeichen auf einander zu beziehen sind. Um darüber eine bestimmte Entscheidung geben zu können, oder um überhaupt eine bestimmte Entscheidung in dieser Rücksicht zu ermöglichen, müssen wir von einer festen Bestimmung darüber ausgehen, wie die in analoger Weise durch v_0 und v_1 bezeichneten Perpendikel genommen werden sollen, weil diese Perpendikel von den Geraden aus, auf denen sie senkrecht stehen, in den Ebenen, in welchen sie gezogen worden sind, offenbar nach zwei

verschiedenen Seiten oder Richtungen hin genommen werden können. Deshalb wollen wir jetzt festsetzen, dass die beiden Perpendikel v_0 und v_1 immer so genommen werden sollen, dass sie, wenn man sie als Kräfte betrachtete, das System, an welchem alle gegebenen Kräfte wirken, um die angenommene Axe, als eine feste Drehungsaxe gedacht, nach einer und derselben Seite oder Richtung hin drehen oder zu drehen streben würden. Unter dieser Voraussetzung müssen offenbar die durch die Winkel θ_0, ω_0, $\overline{\omega}_0$ und θ_1, ω_1, $\overline{\omega}_1$ bestimmten Richtungen und die durch die Winkel λ_0, μ_0, ν_0 und λ_1, μ_1, ν_1 bestimmten Richtungen unter gleichen, 180° nicht übersteigenden Winkeln gegen einander geneigt sein, was durch eine ganz einfache geometrische Betrachtung auf der Stelle erhellet, so dass man also unter der gemachten Voraussetzung die Gleichung:

$$\begin{aligned}&\cos\theta_0\cos\theta_1+\cos\omega_0\cos\omega_1+\cos\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_1\\ =&\cos\lambda_0\cos\lambda_1+\cos\mu_0\cos\mu_1+\cos\nu_0\cos\nu_1\end{aligned}$$

hat. Nach 10) ist nun:

$$\cos\theta_0=G_0'\{x_0-a-[(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\overline{\omega}]\cos\theta\},$$

$$\cos\omega_0=G_0'\{y_0-b-[(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\overline{\omega}]\cos\omega\},$$

$$\cos\overline{\omega}_0=G_0'\{z_0-c-[(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\overline{\omega}]\cos\overline{\omega}\}$$

und analog:

$$\cos\theta_1=G_1'\{x_1-a-[(x_1-a)\cos\theta+(y_1-b)\cos\omega+(z_1-c)\cos\overline{\omega}]\cos\theta\},$$

$$\cos\omega_1=G_1'\{y_1-b-[(x_1-a)\cos\theta+(y_1-b)\cos\omega+(z_1-c)\cos\overline{\omega}]\cos\omega\},$$

$$\cos\overline{\omega}_1=G_1'\{z_1-c-[(x_1-a)\cos\theta+(y_1-b)\cos\omega+(z_1-c)\cos\overline{\omega}]\cos\overline{\omega}\};$$

also, wie man sogleich übersieht:

$$\cos\theta_0\cos\theta_1+\cos\omega_0\cos\omega_1+\cos\overline{\omega}_0\cos\overline{\omega}_1$$

$$=G_0'G_1'\left\{\begin{array}{c}(x_0-a)(x_1-a)+(y_0-b)(y_1-b)+(z_0-c)(z_1-c)\\ -\quad[(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\overline{\omega}]\\ \times[(x_1-a)\cos\theta+(y_1-b)\cos\omega+(z_1-c)\cos\overline{\omega}]\end{array}\right\}.$$

Ferner ist nach 21):

$$\cos\lambda_0 = \pm G_0' \{ (z_0 - c)\cos\omega - (y_0 - b)\cos\overline{\omega} \},$$
$$\cos\mu_0 = \pm G_0' \{ (x_0 - a)\cos\overline{\omega} - (z_0 - c)\cos\theta \},$$
$$\cos\nu_0 = \pm G_0' \{ (y_0 - b)\cos\theta - (x_0 - a)\cos\omega \}$$

und analog:

$$\cos\lambda_1 = \pm G_1' \{ (z_1 - c)\cos\omega - (y_1 - b)\cos\overline{\omega} \},$$
$$\cos\mu_1 = \pm G_1' \{ (x_1 - a)\cos\overline{\omega} - (z_1 - c)\cos\theta \},$$
$$\cos\nu_1 = \pm G_1' \{ (y_1 - b)\cos\theta - (x_1 - a)\cos\omega \}.$$

Nun ist aber, wie man durch einfache Multiplication findet:

$$\begin{aligned}
&\{(x_0 - a)\cos\overline{\omega} - (z_0 - c)\cos\theta\}\{(x_1 - a)\cos\overline{\omega} - (z_1 - c)\cos\theta\} \\
&+\{(y_0 - b)\cos\theta - (x_0 - a)\cos\omega\}\{(y_1 - b)\cos\theta - (x_1 - a)\cos\omega\} \\
&+\{(z_0 - c)\cos\omega - (y_0 - b)\cos\overline{\omega}\}\{(z_1 - c)\cos\omega - (y_1 - b)\cos\overline{\omega}\} \\
= \;& (x_0 - a)(x_1 - a)(\cos\omega^2 + \cos\overline{\omega}^2) \\
&+ (y_0 - b)(y_1 - b)(\cos\overline{\omega}^2 + \cos\theta^2) \\
&+ (z_0 - c)(z_1 - c)(\cos\theta^2 + \cos\omega^2) \\
&- (x_0 - a)(y_1 - b)\cos\theta\cos\omega \\
&- (x_0 - a)(z_1 - c)\cos\theta\cos\overline{\omega} \\
&- (y_0 - b)(z_1 - c)\cos\omega\cos\overline{\omega} \\
&- (y_0 - b)(x_1 - a)\cos\omega\cos\theta \\
&- (z_0 - c)(x_1 - a)\cos\overline{\omega}\cos\theta \\
&- (z_0 - c)(y_1 - b)\cos\overline{\omega}\cos\omega \\
= \;& (x_0 - a)(x_1 - a)(\cos\theta^2 + \cos\omega^2 + \cos\overline{\omega}^2) \\
&+ (y_0 - b)(y_1 - b)(\cos\theta^2 + \cos\omega^2 + \cos\overline{\omega}^2) \\
&+ (z_0 - c)(z_1 - c)(\cos\theta^2 + \cos\omega^2 + \cos\overline{\omega}^2) \\
&- (x_0 - a)(x_1 - a)\cos\theta\cos\theta \\
&- (x_0 - a)(y_1 - b)\cos\theta\cos\omega \\
&- (x_0 - a)(z_1 - c)\cos\theta\cos\overline{\omega} \\
&- (y_0 - b)(x_1 - a)\cos\omega\cos\theta \\
&- (y_0 - b)(y_1 - b)\cos\omega\cos\omega \\
&- (y_0 - b)(z_1 - c)\cos\omega\cos\overline{\omega} \\
&- (z_0 - c)(x_1 - a)\cos\overline{\omega}\cos\theta \\
&- (z_0 - c)(y_1 - b)\cos\overline{\omega}\cos\omega \\
&- (z_0 - c)(z_1 - c)\cos\overline{\omega}\cos\overline{\omega}
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
= & \quad (x_0-a)(x_1-a)+(y_0-b)(y_1-b)+(z_0-c)(z_1-c) \\
- & \quad [(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\bar{\omega}] \\
& \times[(x_1-a)\cos\theta+(y_1-b)\cos\omega+(z_1-c)\cos\bar{\omega}].
\end{aligned}
$$

Wenn man nun in den obigen Ausdrücken von $\cos\lambda_0$, $\cos\mu_0$, $\cos\nu_0$ und $\cos\lambda_1, \cos\mu_1$, $\cos\nu_1$ die oberen auf die oberen und die unteren auf die unteren Zeichen bezieht, so ist:

$$
\cos\lambda_0\cos\lambda_1+\cos\mu_0\cos\mu_1+\cos\nu_0\cos\nu_1
$$

$$
=G_0'G_1'\left\{\begin{array}{l}
\quad (x_0-a)(x_1-a)+(y_0-b)(y_1-b)+(z_0-c)(z_1-c) \\
-\quad [(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\bar{\omega}] \\
\quad\times[(x_1-a)\cos\theta+(y_1-b)\cos\omega+(z_1-c)\cos\bar{\omega}]
\end{array}\right\},
$$

also nach dem Obigen:

$$
\cos\theta_0\cos\theta_1+\cos\omega_0\cos\omega_1+\cos\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_1
$$

$$
=\cos\lambda_0\cos\lambda_1+\cos\mu_0\cos\mu_1+\cos\nu_0\cos\nu_1,
$$

wie es unter der gemachten Voraussetzung sein muss; bezieht man dagegen in den obigen Ausdrücken von $\cos\lambda_0$, $\cos\mu_0$, $\cos\nu_0$ und $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$, $\cos\nu_1$ die oberen auf die unteren und die unteren auf die oberen Zeichen, so ist:

$$
\cos\lambda_0\cos\lambda_1+\cos\mu_0\cos\mu_1+\cos\nu_0\cos\nu_1
$$

$$
=-G_0'G_1'\left\{\begin{array}{l}
\quad (x_0-a)(x_1-a)+(y_0-b)(y_1-b)+(z_0-c)(z_1-c) \\
-\quad [(x_0-a)\cos\theta+(y_0-b)\cos\omega+(z_0-c)\cos\bar{\omega}] \\
\quad\times[(x_1-a)\cos\theta+(y_1-b)\cos\omega+(z_1-c)\cos\bar{\omega}]
\end{array}\right\},
$$

also nach dem Obigen:

$$
\cos\theta_0\cos\theta_1+\cos\omega_0\cos\omega_1+\cos\bar{\omega}_0\cos\bar{\omega}_1
$$

$$
=-(\cos\lambda_0\cos\lambda_1+\cos\mu_0\cos\mu_1+\cos\nu_0\cos\nu_1),
$$

wie es unter der gemachten Voraussetzung **nicht** sein darf.

Hieraus sieht man also, dass, wenn man die Perpendikel v_0 und v_1 so nimmt, dass sie, als Kräfte betrachtet, das System um die angenommene Axe, als eine feste Drehungsaxe gedacht, nach einer und derselben Seite oder Richtung hin drehen oder zu

dreben streben würden, im Obigen überall die oberen und unteren Zeichen auf einander bezogen werden müssen, und dass man also namentlich auch nach 24) mit Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander setzen muss:

25)

$$p_0 = \mp \left\{ \begin{array}{l} (x_0 - a)(\cos\beta_0 \cos\overline{\omega} - \cos\gamma_0 \cos\omega) \\ + (y_0 - b)(\cos\gamma_0 \cos\theta - \cos\alpha_0 \cos\overline{\omega}) \\ + (z_0 - c)(\cos\alpha_0 \cos\omega - \cos\beta_0 \cos\theta) \end{array} \right\} \cdot \frac{v_0}{G_0},$$

$$p_1 = \mp \left\{ \begin{array}{l} (x_1 - a)(\cos\beta_1 \cos\overline{\omega} - \cos\gamma_1 \cos\omega) \\ + (y_1 - b)(\cos\gamma_1 \cos\theta - \cos\alpha_1 \cos\overline{\omega}) \\ + (z_1 - c)(\cos\alpha_1 \cos\omega - \cos\beta_1 \cos\theta) \end{array} \right\} \cdot \frac{v_1}{G_1}.$$

Für das ganze System unserer Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ \ldots.$$

haben wir daher die folgenden Gleichungen:

26)

$$p_0 = \mp \left\{ \begin{array}{l} (x_0 - a)(\cos\beta_0 \cos\overline{\omega} - \cos\gamma_0 \cos\omega) \\ + (y_0 - b)(\cos\gamma_0 \cos\theta - \cos\alpha_0 \cos\overline{\omega}) \\ + (z_0 - c)(\cos\alpha_0 \cos\omega - \cos\beta_0 \cos\theta) \end{array} \right\} \cdot \frac{v_0}{G_0},$$

$$p_1 = \mp \left\{ \begin{array}{l} (x_1 - a)(\cos\beta_1 \cos\overline{\omega} - \cos\gamma_1 \cos\omega) \\ + (y_1 - b)(\cos\gamma_1 \cos\theta - \cos\alpha_1 \cos\overline{\omega}) \\ + (z_1 - c)(\cos\alpha_1 \cos\omega - \cos\beta_1 \cos\theta) \end{array} \right\} \cdot \frac{v_1}{G_1},$$

$$p_2 = \mp \left\{ \begin{array}{l} (x_2 - a)(\cos\beta_2 \cos\overline{\omega} - \cos\gamma_2 \cos\omega) \\ + (y_2 - b)(\cos\gamma_2 \cos\theta - \cos\alpha_2 \cos\overline{\omega}) \\ + (z_2 - c)(\cos\alpha_2 \cos\omega - \cos\beta_2 \cos\theta) \end{array} \right\} \cdot \frac{v_2}{G_2},$$

$$p_3 = \mp \left\{ \begin{array}{l} (x_3 - a)(\cos\beta_3 \cos\overline{\omega} - \cos\gamma_3 \cos\omega) \\ + (y_3 - b)(\cos\gamma_3 \cos\theta - \cos\alpha_3 \cos\overline{\omega}) \\ + (z_3 - c)(\cos\alpha_3 \cos\omega - \cos\beta_3 \cos\theta) \end{array} \right\} \cdot \frac{v_3}{G_3},$$

u. s. w.

in denen durchgehends die oberen und unteren Zeichen auf einander zu beziehen sind, wenn man sich nur stets an die aus dem Obigen bekannten Voraussetzungen hält.

Es ist nun:

Digitized by Google

$$P_0\left\{\begin{array}{l}(x_0-a)(\cos\beta_0\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_0\cos\omega)\\+(y_0-b)(\cos\gamma_0\cos\theta-\cos\alpha_0\cos\overline{\omega})\\+(z_0-c)(\cos\alpha_0\cos\omega-\cos\beta_0\cos\theta)\end{array}\right\}$$

$$+P_1\left\{\begin{array}{l}(x_1-a)(\cos\beta_1\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_1\cos\omega)\\+(y_1-b)(\cos\gamma_1\cos\theta-\cos\alpha_1\cos\overline{\omega})\\+(z_1-c)(\cos\alpha_1\cos\omega-\cos\beta_1\cos\theta)\end{array}\right\}$$

$$+P_2\left\{\begin{array}{l}(x_2-a)(\cos\beta_2\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_2\cos\omega)\\+(y_2-b)(\cos\gamma_2\cos\theta-\cos\alpha_2\cos\overline{\omega})\\+(z_2-c)(\cos\alpha_2\cos\omega-\cos\beta_2\cos\theta)\end{array}\right\}$$

$$+P_3\left\{\begin{array}{l}(x_3-a)(\cos\beta_3\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_3\cos\omega)\\+(y_3-b)(\cos\gamma_3\cos\theta-\cos\alpha_3\cos\overline{\omega})\\+(z_3-c)(\cos\alpha_3\cos\omega-\cos\beta_3\cos\theta)\end{array}\right\}$$

u. s. w.

$$=P_0\left\{\begin{array}{l}x_0(\cos\beta_0\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_0\cos\omega)\\+y_0(\cos\gamma_0\cos\theta-\cos\alpha_0\cos\overline{\omega})\\+z_0(\cos\alpha_0\cos\omega-\cos\beta_0\cos\theta)\end{array}\right\}$$

$$+P_1\left\{\begin{array}{l}x_1(\cos\beta_1\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_1\cos\omega)\\+y_1(\cos\gamma_1\cos\theta-\cos\alpha_1\cos\overline{\omega})\\+z_1(\cos\alpha_1\cos\omega-\cos\beta_1\cos\theta)\end{array}\right\}$$

$$+P_2\left\{\begin{array}{l}x_2(\cos\beta_2\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_2\cos\omega)\\+y_2(\cos\gamma_2\cos\theta-\cos\alpha_2\cos\overline{\omega})\\+z_2(\cos\alpha_2\cos\omega-\cos\beta_2\cos\theta)\end{array}\right\}$$

$$+P_3\left\{\begin{array}{l}x_3(\cos\beta_3\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_3\cos\omega)\\+y_3(\cos\gamma_3\cos\theta-\cos\alpha_3\cos\overline{\omega})\\+z_3(\cos\alpha_3\cos\omega-\cos\beta_3\cos\theta)\end{array}\right\}$$

u. s. w.

$$-P_0\left\{\begin{array}{l}a(\cos\beta_0\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_0\cos\omega)\\+b(\cos\gamma_0\cos\theta-\cos\alpha_0\cos\overline{\omega})\\+c(\cos\alpha_0\cos\omega-\cos\beta_0\cos\theta)\end{array}\right\}$$

$$-P_1\left\{\begin{array}{l}a(\cos\beta_1\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_1\cos\omega)\\+b(\cos\gamma_1\cos\theta-\cos\alpha_1\cos\overline{\omega})\\+c(\cos\alpha_1\cos\omega-\cos\beta_1\cos\theta)\end{array}\right\}$$

Digitized by Google

$$
-P_2\left\{\begin{array}{l} a(\cos\beta_2\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_2\cos\omega) \\ +b(\cos\gamma_2\cos\theta-\cos\alpha_2\cos\overline{\omega}) \\ +c(\cos\alpha_2\cos\omega-\cos\beta_2\cos\theta) \end{array}\right\}
$$

$$
-P_3\left\{\begin{array}{l} a(\cos\beta_3\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_3\cos\omega) \\ +b(\cos\gamma_3\cos\theta-\cos\alpha_3\cos\overline{\omega}) \\ +c(\cos\alpha_3\cos\omega-\cos\beta_3\cos\theta) \end{array}\right\}
$$

u. s. w.

$$
\begin{array}{rl}
= & (b\cos\overline{\omega}-c\cos\omega)(P_0\cos\alpha_0+P_1\cos\alpha_1+P_2\cos\alpha_2+P_3\cos\alpha_3+\ldots.) \\
& +(c\cos\theta-a\cos\overline{\omega})(P_0\cos\beta_0+P_1\cos\beta_1+P_2\cos\beta_2+P_3\cos\beta_3+\ldots.) \\
& +(a\cos\omega-b\cos\theta)(P_0\cos\gamma_0+P_1\cos\gamma_1+P_2\cos\gamma_2+P_3\cos\gamma_3+\ldots.)
\end{array}
$$

$$
+\cos\overline{\omega}\left\{\begin{array}{l} P_0(x_0\cos\beta_0-y_0\cos\alpha_0) \\ +P_1(x_1\cos\beta_1-y_1\cos\alpha_1) \\ +P_2(x_2\cos\beta_2-y_2\cos\alpha_2) \\ +P_3(x_3\cos\beta_3-y_3\cos\alpha_3) \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\}
$$

$$
+\cos\theta\left\{\begin{array}{l} P_0(y_0\cos\gamma_0-z_0\cos\beta_0) \\ +P_1(y_1\cos\gamma_1-z_1\cos\beta_1) \\ +P_2(y_2\cos\gamma_2-z_2\cos\beta_2) \\ +P_3(y_3\cos\gamma_3-z_3\cos\beta_3) \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\}
$$

$$
+\cos\omega\left\{\begin{array}{l} P_0(z_0\cos\alpha_0-x_0\cos\gamma_0) \\ +P_1(z_1\cos\alpha_1-x_1\cos\gamma_1) \\ +P_2(z_2\cos\alpha_2-x_2\cos\gamma_2) \\ +P_3(z_3\cos\alpha_3-x_3\cos\gamma_3) \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right\},
$$

und in abkürzender Bezeichnung haben wir also die folgende Gleichung:

Digitized by Google

27)

$$\Sigma P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\bar{\omega}-\cos\gamma\cos\omega)\\+(y-b)(\cos\gamma\cos\theta-\cos\alpha\cos\bar{\omega})\\+(z-c)(\cos\alpha\cos\omega-\cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned}=\ &(b\cos\bar{\omega}-c\cos\omega)\Sigma P\cos\alpha\\&+(c\cos\theta-a\cos\bar{\omega})\Sigma P\cos\beta\\&+(a\cos\omega-b\cos\theta)\Sigma P\cos\gamma\\&+\cos\bar{\omega}\,\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)\\&+\cos\theta\,\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)\\&+\cos\omega\,\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma).\end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass die Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ \ldots.$$

unter einander im Gleichgewichte sind, ist nach §. 6.

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\quad \Sigma P\cos\beta=0,\quad \Sigma P\cos\gamma=0;$$

$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0,$$

$$\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)=0,$$

$$\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0;$$

also nach 27), unabhängig von besonderen Werthen von a, b, c und θ, ω, $\bar{\omega}$, folglich für jede Axe:

$$\Sigma P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\bar{\omega}-\cos\gamma\cos\omega)\\+(y-b)(\cos\gamma\cos\theta-\cos\alpha\cos\bar{\omega})\\+(z-c)(\cos\alpha\cos\omega-\cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\}=0.$$

Es frägt sich nun, ob sich dies auch umkehren lässt, ob man nämlich behaupten kann, dass, wenn für jede Axe

$$\Sigma P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\bar{\omega}-\cos\gamma\cos\omega)\\+(y-b)(\cos\gamma\cos\theta-\cos\alpha\cos\bar{\omega})\\+(z-c)(\cos\alpha\cos\omega-\cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\}=0$$

ist, die Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ \ldots.$$

unter einander im Gleichgewichte sein müssen.

Weil vorausgesetzt wird, dass die vorstehende Gleichung, also nach 27) die Gleichung:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l}(b\cos\overline{\omega}-c\cos\omega)\Sigma P\cos\alpha\\ +(c\cos\theta-a\cos\overline{\omega})\Sigma P\cos\beta\\ +(a\cos\omega-b\cos\theta)\Sigma P\cos\gamma\\ +\cos\overline{\omega}\,\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)\\ +\cos\theta\,\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)\\ +\cos\omega\,\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\end{array}\right\}=0,$$

für jede Axe oder unabhängig von besonderen Werthen von a, b, c und θ, ω, $\overline{\omega}$ gilt; so wird diese Gleichung auch gelten, wenn man $a=0$, $b=0$, $c=0$ setzt, was nach dem Obigen unmittelbar zu der unabhängig von besonderen Werthen von θ, ω, $\overline{\omega}$ geltenden Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\overline{\omega}\,\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)\\ +\cos\theta\,\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)\\ +\cos\omega\,\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\end{array}\right\}=0$$

führt. Setzt man nun in dieser Gleichung nach der Reihe:

$$\cos\theta=0,\quad \cos\omega=0,\quad \cos\overline{\omega}=\pm1;$$

$$\cos\theta=\pm1,\quad \cos\omega=0,\quad \cos\overline{\omega}=0;$$

$$\cos\theta=0,\quad \cos\omega=\pm1,\quad \cos\overline{\omega}=0;$$

was verstattet ist, weil in allen diesen Fällen, wie erforderlich:

$$\cos\theta^2+\cos\omega^2+\cos\overline{\omega}^2=1$$

ist, lässt man nämlich die Axe nach und nach mit der Axe der z, x, y zusammenfallen oder diesen Axen parallel sein; so ergiebt sich aus der obigen Gleichung nach und nach:

$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0,$$

$$\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)=0,$$

$$\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0;$$

was dann ferner nach dem Obigen zu der unabhängig von besonderen Werthen von a, b, c und θ, ω, $\overline{\omega}$ geltenden Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}(b\cos\overline{\omega}-c\cos\omega)\Sigma P\cos\alpha\\ +(c\cos\theta-a\cos\overline{\omega})\Sigma P\cos\beta\\ +(a\cos\omega-b\cos\theta)\Sigma P\cos\gamma\end{array}\right\}=0$$

Digitized by Google

führt. Setzt man nun in dieser Gleichung, was offenbar verstattet ist, nach der Reihe:

$$a=0,\quad b=0,\quad \cos\theta=0;$$
$$b=0,\quad c=0,\quad \cos\omega=0;$$
$$c=0,\quad a=0,\quad \cos\overline{\omega}=0;$$

wo also beziehungsweise:

$$\cos\omega^2+\cos\overline{\omega}^2=1,$$
$$\cos\overline{\omega}^2+\cos\theta^2=1,$$
$$\cos\theta^2+\cos\omega^2=1;$$

folglich, natürlich ohne Beziehung der oberen und unteren Zeichen auf einander:

$$\cos\omega=\pm\sin\overline{\omega},$$
$$\cos\overline{\omega}=\pm\sin\theta,$$
$$\cos\theta=\pm\sin\omega$$

ist, so erhalten wir die Gleichungen:

$$c\cos\omega\,\Sigma P\cos\alpha=0,$$
$$a\cos\overline{\omega}\,\Sigma P\cos\beta=0,$$
$$b\cos\theta\,\Sigma P\cos\gamma=0$$

oder:

$$c\sin\overline{\omega}\,\Sigma P\cos\alpha=0,$$
$$a\sin\theta\,\Sigma P\cos\beta=0,$$
$$b\sin\omega\,\Sigma P\cos\gamma=0;$$

welche beziehungsweise unabhängig von besonderen Werthen von c, ω; a, $\overline{\omega}$; b, θ oder c, $\overline{\omega}$; a, θ; b, ω gelten, was unmittelbar zu den Gleichungen:

$$\Sigma P\cos\alpha=0,\quad \Sigma P\cos\beta=0,\quad \Sigma P\cos\gamma=0$$

führt. Hiernach ist also, wenn für alle Axen die Gleichung:

$$\Sigma P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\omega)\\+(y-b)(\cos\gamma\cos\theta-\cos\alpha\cos\overline{\omega})\\+(z-c)(\cos\alpha\cos\omega-\cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\}=0$$

Statt findet:

$$\Sigma P\cos\alpha = 0,\quad \Sigma P\cos\beta = 0,\quad \Sigma P\cos\gamma = 0;$$

$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0,$$

$$\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0,$$

$$\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0;$$

und nach §. 6. sind also die Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ \ldots.$$

unter einander im Gleichgewichte.

Wir haben daher jetzt den folgenden allgemeinen Satz:

Die **nothwendige** Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ \ldots.$$

ist, dass die Gleichung:

$$\Sigma P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\overline{\omega} - \cos\gamma\cos\omega)\\ +(y-b)(\cos\gamma\cos\theta - \cos\alpha\cos\overline{\omega})\\ +(z-c)(\cos\alpha\cos\omega - \cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\} = 0$$

für **alle** Axen erfüllt ist.

Aus den Gleichungen 26) folgt offenbar, wenn man dieselben nach der Reihe mit

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ \ldots.$$

multiplicirt und dann summirt, die Gleichung:

$$\Sigma pP = \mp\,\Sigma\frac{v}{G}P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\overline{\omega} - \cos\gamma\cos\omega)\\ +(y-b)(\cos\gamma\cos\theta - \cos\alpha\cos\overline{\omega})\\ +(z-c)(\cos\alpha\cos\omega - \cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\}.$$

Sind nun aber die Grössen

$$\frac{v_0}{G_0},\quad \frac{v_1}{G_1},\quad \frac{v_2}{G_2},\quad \frac{v_3}{G_3},\quad \frac{v_4}{G_4},\quad \ldots..$$

sämmtlich unter einander gleich, und bezeichnen wir den gemein-

Digitized by Google

schaftlichen Werth aller dieser Grössen durch $\frac{v}{G}$; so wird die vorstehende Gleichung:

$$\Sigma pP = \mp\frac{v}{G}\,\Sigma P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\varpi-\cos\gamma\cos\omega)\\+(y-b)(\cos\gamma\cos\theta-\cos\alpha\cos\varpi)\\+(z-c)(\cos\alpha\cos\omega-\cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\}.$$

Die Bedingung, dass die Grössen

$$\frac{v_0}{G_0},\quad \frac{v_1}{G_1},\quad \frac{v_2}{G_2},\quad \frac{v_3}{G_3},\quad \frac{v_4}{G_4},\quad \ldots\ldots$$

sämmtlich unter einander gleich sind, erfüllt man am Einfachsten dadurch, dass man sich das System um die angenommene Axe um einen gewissen Winkel gedreht denkt, und in rechtwinkligen Dreiecken, in denen diesem Winkel die Entfernungen

$$G_0,\ G_1,\ G_2,\ G_3,\ G_4,\ \ldots\ldots$$

der Punkte

$$(x_0y_0z_0),\quad (x_1y_1z_1),\quad (x_2y_2z_2),\quad (x_3y_3z_3),\ \ldots\ldots$$

als der Angriffspunkte der Kräfte in der ursprünglichen Lage des Systems von der Axe als Katheten anliegen, die Längen

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ \ldots\ldots$$

als die dem in Rede stehenden Winkel gegenüberstehenden Katheten betrachtet, eine Vorstellung, welche wir im Folgenden auch ohne weitere Erinnerung stets festhalten werden*).

---

*) Nimmt man die Drehung des Systems unendlich klein an, so fallen die durch

$$v_0,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ \ldots\ldots$$

bezeichneten Längen mit den von den Angriffspunkten der Kräfte beschriebenen Kreisbögen, oder auch mit den, die primitiven und secundären Oerter der Angriffspunkte mit einander verbindenden Geraden zusammen, und erhalten dann wohl den Namen: Virtuelle Geschwindigkeiten (m. s. die Einleitung); die im Folgenden entwickelten, den Zustand des Gleichgewichts oder der Ruhe bedingenden Gleichungen, in denen diese virtuellen Geschwindigkeiten oder ihre Projectionen auf den Richtungslinien der Kräfte vorkommen, bilden aber dann in ihrer Gesammtheit das sogenannte Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, mit welcher Bemerkung über dieses Princip wir uns für jetzt hier begnügen müssen.

Digitized by Google

Weil nun nach dem vorher bewiesenen Satze das Gleichgewicht der Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ \ldots.$$

dadurch vollständig bedingt wird, dass die Gleichung:

$$\Sigma P \left\{ \begin{array}{l} (x-a)(\cos\beta\cos\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\omega) \\ +(y-b)(\cos\gamma\cos\theta-\cos\alpha\cos\overline{\omega}) \\ +(z-c)(\cos\alpha\cos\omega-\cos\beta\cos\theta) \end{array} \right\} = 0$$

für alle Axen erfüllt ist; so wird nach dem Obigen offenbar das Gleichgewicht der Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ldots.$$

auch dadurch vollständig bedingt, dass die Gleichung:

$$\Sigma pP = 0$$

für alle Axen erfüllt ist, was zu dem folgenden allgemeinen Satze führt:

Die **nothwendige** Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ldots.$$

ist, dass die Gleichung

$$\Sigma pP = 0$$

für **alle** Axen erfüllt ist.

Betrachten wir für irgend eine Kraft P das Product pP, und bezeichnen wir den absoluten Werth von P durch (P), den Werth von p aber, insofern diese Projection als positiv oder negativ betrachtet wird, jenachdem sie auf der wirklichen Richtung der Kraft P oder auf der direct entgegengesetzten Richtung liegt, durch q. Wenn nun P positiv, also $P=(P)$ ist, so wird die Richtung von P durch die Winkel α, β, γ bestimmt. Liegt p auf dieser Richtung, so ist p positiv, q positiv, also $p=q$, folglich $pP=q(P)$. Liegt p auf der entgegengesetzten Richtung, so ist p negativ, q negativ, also $p=q$, folglich $pP=q(P)$. Wenn ferner P negativ, also $P=-(P)$ ist, so wird die Richtung von P durch die Winkel $180^0-\alpha$, $180^0-\beta$, $180^0-\gamma$ bestimmt. Liegt p auf dieser Richtung, so ist p negativ, q positiv, also $p=-q$, folglich $pP=q(P)$. Liegt p auf der entgegengesetzten Richtung, so ist p positiv, q negativ, also $p=-q$, folglich $pP=q(P)$. Hiernach ist immer $pP=q(P)$, und man sieht also,

Digitized by Google

dass man im obigen Satze die Kräfte P sämmtlich als positiv, die Projectionen p aber als positiv oder negativ betrachten kann, jenachdem sie auf den wirklichen Richtungen der entsprechenden Kräfte oder auf den diesen Richtungen direct entgegengesetzten Richtungen liegen, was die einfachste Auffassungsweise bei der Anwendung des in Rede stehenden Satzes ist.

Bezeichnen wir die von den Richtungslinien der Kräfte

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad P_4, \ldots.$$

mit der angenommenen Axe eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch

$$W_0, \quad W_1, \quad W_2, \quad W_3, \quad W_4 \ldots..$$

und die kürzesten Entfernungen der Richtungslinien der Kräfte von der angenommenen Axe, indem wir diese kürzesten Entfernungen als positiv oder negativ betrachten, jenachdem die Grössen

$$\begin{aligned}
&(x_0-a)(\cos\beta_0\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_0\cos\omega)\\
&+(y_0-b)(\cos\gamma_0\cos\theta-\cos\alpha_0\cos\overline{\omega})\\
&+(z_0-c)(\cos\alpha_0\cos\omega-\cos\beta_0\cos\theta),\\
&(x_1-a)(\cos\beta_1\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_1\cos\omega)\\
&+(y_1-b)(\cos\gamma_1\cos\theta-\cos\alpha_1\cos\overline{\omega})\\
&+(z_1-c)(\cos\alpha_1\cos\omega-\cos\beta_1\cos\theta),\\
&(x_2-a)(\cos\beta_2\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_2\cos\omega)\\
&+(y_2-b)(\cos\gamma_2\cos\theta-\cos\alpha_2\cos\overline{\omega})\\
&+(z_2-c)(\cos\alpha_2\cos\omega-\cos\beta_2\cos\theta),\\
&(x_3-a)(\cos\beta_3\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_3\cos\omega)\\
&+(y_3-b)(\cos\gamma_3\cos\theta-\cos\alpha_3\cos\overline{\omega})\\
&+(z_3-c)(\cos\alpha_3\cos\omega-\cos\beta_3\cos\theta),
\end{aligned}$$

u. s. w.

positiv oder negativ sind, durch

$$E_0, \quad E_1, \quad E_2, \quad E_3, \quad E_4, \ldots.;$$

so ist nach einem bekannten analytischen Ausdrucke *):

---

*) M. s. meine Abhandlung Thl. XXXV. Nr. I. 14).

Digitized by Google

$$E_0 \sin W_0 = (x_0 - a)(\cos\beta_0 \cos\overline{\omega} - \cos\gamma_0 \cos\omega)$$
$$+ (y_0 - b)(\cos\gamma_0 \cos\theta - \cos\alpha_0 \cos\overline{\omega})$$
$$+ (z_0 - c)(\cos\alpha_0 \cos\omega - \cos\beta_0 \cos\theta),$$

$$E_1 \sin W_1 = (x_1 - a)(\cos\beta_1 \cos\overline{\omega} - \cos\gamma_1 \cos\omega)$$
$$+ (y_1 - b)(\cos\gamma_1 \cos\theta - \cos\alpha_1 \cos\overline{\omega})$$
$$+ (z_1 - c)(\cos\alpha_1 \cos\omega - \cos\beta_1 \cos\theta),$$

$$E_2 \sin W_2 = (x_2 - a)(\cos\beta_2 \cos\overline{\omega} - \cos\gamma_2 \cos\omega)$$
$$+ (y_2 - b)(\cos\gamma_2 \cos\theta - \cos\alpha_2 \cos\overline{\omega})$$
$$+ (z_2 - c)(\cos\alpha_2 \cos\omega - \cos\beta_2 \cos\theta),$$

$$E_3 \sin W_3 = (x_3 - a)(\cos\beta_3 \cos\overline{\omega} - \cos\gamma_3 \cos\omega)$$
$$+ (y_3 - b)(\cos\gamma_3 \cos\theta - \cos\alpha_3 \cos\overline{\omega})$$
$$+ (z_3 - c)(\cos\alpha_3 \cos\omega - \cos\beta_3 \cos\theta),$$

u. s. w.

und nach dem Obigen (S. 255.) können wir also offenbar auch den folgenden allgemeinen Satz aussprechen:

Die **nothwendige** Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte

$$P_0, \quad P_1, \quad P_2, \quad P_3, \quad P_4, \ldots .$$

ist, dass die Gleichung

$$\Sigma PE \sin W = 0$$

für **alle** Axen erfüllt ist.

Nach 26) haben

$$p_0, \quad p_1, \quad p_2, \quad p_3, \quad p_4, \ldots .$$

respective mit

$$(x_0 - a)(\cos\beta_0 \cos\overline{\omega} - \cos\gamma_0 \cos\omega)$$
$$+ (y_0 - b)(\cos\gamma_0 \cos\theta - \cos\alpha_0 \cos\overline{\omega})$$
$$+ (z_0 - c)(\cos\alpha_0 \cos\omega - \cos\beta_0 \cos\theta),$$

$$(x_1 - a)(\cos\beta_1 \cos\overline{\omega} - \cos\gamma_1 \cos\omega)$$
$$+ (y_1 - b)(\cos\gamma_1 \cos\theta - \cos\alpha_1 \cos\overline{\omega})$$
$$+ (z_1 - c)(\cos\alpha_1 \cos\omega - \cos\beta_1 \cos\theta),$$

$$(x_2 - a)(\cos\beta_2 \cos\overline{\omega} - \cos\gamma_2 \cos\omega)$$
$$+ (y_2 - b)(\cos\gamma_2 \cos\theta - \cos\alpha_2 \cos\overline{\omega})$$
$$+ (z_2 - c)(\cos\alpha_2 \cos\omega - \cos\beta_2 \cos\theta),$$

Digitized by Google

$$(x_3-a)(\cos\beta_3\cos\overline{\omega}-\cos\gamma_3\cos\omega)$$
$$+(y_3-b)(\cos\gamma_3\cos\theta-\cos\alpha_3\cos\overline{\omega})$$
$$+(z_3-c)(\cos\alpha_3\cos\omega-\cos\beta_3\cos\theta),$$

u. s. w.

sämmtlich gleiche oder ungleiche Vorzeichen; also kann man offenbar in der Bedingungsgleichung

$$\Sigma PE\sin W=0$$

die kürzesten Entfernungen

$$E_0,\quad E_1,\quad E_2,\quad E_3,\quad E_4,\ldots.$$

immer respective mit

$$p_0,\quad p_1,\quad p_2,\quad p_3,\quad p_4,\ldots.$$

von gleichem Vorzeichen nehmen; auch kann man sich hierbei immer die Punkte, in denen die Richtungslinien der Kräfte von ihren kürzesten Entfernungen von der angenommenen Axe geschnitten werden, als die Angriffspunkte der Kräfte denken, wo dann die Längen

$$v_0,\quad v_1,\quad v_2,\quad v_3,\quad v_4,\ldots.$$

auf den entsprechenden kürzesten Entfernungen senkrecht stehen. Auch hier kann man alle Kräfte als positiv, aber die Projectionen

$$p_0,\quad p_1,\quad p_2,\quad p_3,\quad p_4,\ldots.$$

als positiv oder negativ annehmen, jenachdem sie auf den wirklichen Richtungen der entsprechenden Kräfte oder auf den diesen Richtungen direct entgegengesetzten Richtungen liegen, wie ja auf der Stelle daraus erhellet, dass man die Winkel

$$\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0;\quad \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\ \ldots.$$

immer den wirklichen Richtungen der Kräfte entsprechen lassen kann.

§. 13.

Anderer Ausdruck der Bedingungen der Ruhe eines um einen festen Punkt drehbaren Systems.

Wenn man den festen Punkt als Anfang der Coordinaten annimmt, so sind nach §. 8. die nothwendigen Bedingungsgleichungen für den Zustand der Ruhe des Systems:

Digitized by Google

$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0,$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0,$$
$$\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0.$$

Nehmen wir nun zuerst an, das System befinde sich in Ruhe, so ist:

$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0,$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) = 0,$$
$$\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma) = 0;$$

also nach §. 12. 27) unabhängig von besonderen Werthen von a, b, c und θ, ω, $\overline{\omega}$, folglich für jede Axe:

$$\Sigma P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\overline{\omega} - \cos\gamma\cos\omega)\\ +(y-b)(\cos\gamma\cos\theta - \cos\alpha\cos\overline{\omega})\\ +(z-c)(\cos\alpha\cos\omega - \cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\}$$
$$\begin{array}{l}= \quad (b\cos\overline{\omega} - c\cos\omega)\Sigma P\cos\alpha\\ \quad + (c\cos\theta - a\cos\overline{\omega})\Sigma P\cos\beta\\ \quad + (a\cos\omega - b\cos\theta)\Sigma P\cos\gamma;\end{array}$$

für jede durch den Anfang der Coordinaten, also durch den festen Punkt, gehende Axe ist aber:

$$\frac{a}{\cos\theta} = \frac{b}{\cos\omega} = \frac{c}{\cos\overline{\omega}},$$

also:

$$b\cos\overline{\omega} - c\cos\omega = 0,$$
$$c\cos\theta - a\cos\overline{\omega} = 0,$$
$$a\cos\omega - b\cos\theta = 0;$$

folglich:

$$\Sigma P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\overline{\omega} - \cos\gamma\cos\omega)\\ +(y-b)(\cos\gamma\cos\theta - \cos\alpha\cos\overline{\omega})\\ +(z-c)(\cos\alpha\cos\omega - \cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\} = 0.$$

Wenn sich also das System in Ruhe befindet, so ist für jede durch den als Anfang der Coordinaten angenommenen festen Punkt gehende Axe:

$$\Sigma P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\overline{\omega} - \cos\gamma\cos\omega)\\ +(y-b)(\cos\gamma\cos\theta - \cos\alpha\cos\overline{\omega})\\ +(z-c)(\cos\alpha\cos\omega - \cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\} = 0.$$

Umgekehrt wollen wir jetzt annehmen, dass für jede durch

Digitized by Google

den als Anfang der Coordinaten angenommenen festen Punkt gehende Axe die Gleichung:

$$\Sigma P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\omega)\\+(y-b)(\cos\gamma\cos\theta-\cos\alpha\cos\overline{\omega})\\+(z-c)(\cos\alpha\cos\omega-\cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\}=0,$$

also nach §. 12. 27) die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}(b\cos\overline{\omega}-c\cos\omega)\Sigma P\cos\alpha\\+(c\cos\theta-a\cos\overline{\omega})\Sigma P\cos\beta\\+(a\cos\omega-b\cos\theta)\Sigma P\cos\gamma\\+\cos\overline{\omega}\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)\\+\cos\theta\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)\\+\cos\omega\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\end{array}\right\}=0$$

erfüllt sei. Weil für jede durch den Anfang der Coordinaten gehende Axe

$$\frac{a}{\cos\theta}=\frac{b}{\cos\omega}=\frac{c}{\cos\overline{\omega}},$$

also:

$$b\cos\overline{\omega}-c\cos\omega=0,$$
$$c\cos\theta-a\cos\overline{\omega}=0,$$
$$a\cos\omega-b\cos\theta=0$$

ist; so ist für jede solche Axe, also unabhängig von besonderen Werthen von θ, ω, $\overline{\omega}$:

$$\left.\begin{array}{l}\cos\overline{\omega}\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)\\+\cos\theta\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)\\+\cos\omega\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)\end{array}\right\}=0;$$

folglich, wenn man, was verstattet ist, nach und nach:

$$\cos\theta=0,\quad \cos\omega=0,\quad \cos\overline{\omega}=\pm1;$$
$$\cos\theta=\pm1,\quad \cos\omega=0,\quad \cos\overline{\omega}=0;$$
$$\cos\theta=0,\quad \cos\omega=\pm1,\quad \cos\overline{\omega}=0$$

setzt:

$$\Sigma P(x\cos\beta-y\cos\alpha)=0,$$
$$\Sigma P(y\cos\gamma-z\cos\beta)=0,$$
$$\Sigma P(z\cos\alpha-x\cos\gamma)=0;$$

woraus sich ergiebt, dass sich unter der gemachten Voraussetzung das System in Ruhe befindet.

Digitized by Google

Wenn also für jede durch den als Anfang der Coordinaten angenommenen festen Punkt gehende Axe:

$$\Sigma P \left\{ \begin{array}{l} (x-a)(\cos\beta\cos\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\omega) \\ +(y-b)(\cos\gamma\cos\theta-\cos\alpha\cos\overline{\omega}) \\ +(z-c)(\cos\alpha\cos\omega-\cos\beta\cos\theta) \end{array} \right\} = 0$$

ist, so befindet sich das System in Ruhe.

Daher haben wir jetzt den folgenden Satz:

Wenn das System, an welchem die Kräfte

$$P_0,\quad P_1,\quad P_2,\quad P_3,\quad P_4,\ldots$$

wirken, um einen festen Punkt drehbar ist; so wird, wenn man diesen festen Punkt als Anfang der Coordinaten annimmt, der Zustand der Ruhe des Systems dadurch vollständig bedingt, dass für **alle** durch den festen Punkt gelegte Axen die Gleichung:

$$\Sigma P \left\{ \begin{array}{l} (x-a)(\cos\beta\cos\overline{\omega}-\cos\gamma\cos\omega) \\ +(y-b)(\cos\gamma\cos\theta-\cos\alpha\cos\overline{\omega}) \\ +(z-c)(\cos\alpha\cos\omega-\cos\beta\cos\theta) \end{array} \right\} = 0$$

erfüllt ist.

Unmittelbar geht aber aus den im vorhergehenden Paragraphen angestellten Betrachtungen hervor, dass die vorhergehende Bedingungsgleichung für den Zustand der Ruhe des Systems ganz in derselben Weise wie dort auch durch die Bedingungsgleichung

$$\Sigma pP = 0,$$

oder durch die Bedingungsgleichung

$$\Sigma PE \sin W = 0,$$

insofern diese Gleichungen als für alle durch den festen Punkt gelegten Axen gültig vorausgesetzt werden, vollständig ersetzt werden kann.

§. 14.

Anderer Ausdruck der Bedingungen der Ruhe eines um eine feste Axe drehbaren Systems.

Wenn man die feste Axe als Axe der z annimmt, so ist nach §. 9. die nothwendige Bedingungsgleichung für den Zustand der Ruhe des Systems:

Digitized by Google

$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0.$$

Nehmen wir nun zuerst an, das System befinde sich in Ruhe, so ist:

$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0;$$

weil nun aber nach §. 12. 27):

$$\Sigma P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\bar\omega - \cos\gamma\cos\omega)\\ +(y-b)(\cos\gamma\cos\theta - \cos\alpha\cos\bar\omega)\\ +(z-c)(\cos\alpha\cos\omega - \cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\}$$

$$\begin{aligned}= \;& (b\cos\bar\omega - c\cos\omega)\Sigma P\cos\alpha\\ &+ (c\cos\theta - a\cos\bar\omega)\Sigma P\cos\beta\\ &+ (a\cos\omega - b\cos\theta)\Sigma P\cos\gamma\\ &+ \cos\bar\omega\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha)\\ &+ \cos\theta\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta)\\ &+ \cos\omega\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma),\end{aligned}$$

und für die als Axe der z angenommene feste Axe

$$a=0,\quad b=0;\quad \cos\theta=0,\quad \cos\omega=0$$

ist; so ist für die feste Axe:

$$\Sigma P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\bar\omega - \cos\gamma\cos\omega)\\ +(y-b)(\cos\gamma\cos\theta - \cos\alpha\cos\bar\omega)\\ +(z-c)(\cos\alpha\cos\omega - \cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\} = 0,$$

immer die feste Axe als Axe der z angenommen.

Wenn sich also das System in Ruhe befindet, so ist für die als Axe der z angenommene feste Axe:

$$\Sigma P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\bar\omega - \cos\gamma\cos\omega)\\ +(y-b)(\cos\gamma\cos\theta - \cos\alpha\cos\bar\omega)\\ +(z-c)(\cos\alpha\cos\omega - \cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\} = 0.$$

Umgekehrt wollen wir annehmen, dass für die als Axe der z angenommene feste Axe:

$$\Sigma P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\bar\omega - \cos\gamma\cos\omega)\\ +(y-b)(\cos\gamma\cos\theta - \cos\alpha\cos\bar\omega)\\ +(z-c)(\cos\alpha\cos\omega - \cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\} = 0,$$

also nach §. 12. 27):

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l}(b\cos\varpi - c\cos\omega)\,\Sigma P\cos\alpha \\ +\ (c\cos\theta - a\cos\varpi)\,\Sigma P\cos\beta \\ +\ (a\cos\omega - b\cos\theta)\,\Sigma P\cos\gamma \\ +\ \cos\varpi\,\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) \\ +\ \cos\theta\,\Sigma P(y\cos\gamma - z\cos\beta) \\ +\ \cos\omega\,\Sigma P(z\cos\alpha - x\cos\gamma)\end{array}\right\} = 0$$

sei. Dann ist, weil für die als Axe der z angenommene feste Axe:

$$a = 0,\ b = 0;\ \ \cos\theta = 0,\ \cos\omega = 0,\ \cos\varpi = \pm 1$$

ist:

$$\Sigma P(x\cos\beta - y\cos\alpha) = 0,$$

und das System befindet sich folglich in Ruhe.

Wenn also für die als Axe der z angenommene feste Axe

$$\Sigma P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\varpi - \cos\gamma\cos\omega) \\ +(y-b)(\cos\gamma\cos\theta - \cos\alpha\cos\varpi) \\ +(z-c)(\cos\alpha\cos\omega - \cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\} = 0$$

ist, so befindet sich das System in Ruhe.

Daher haben wir den folgenden Satz:

Wenn das System, an welchem die Kräfte

$$P_0,\ \ P_1,\ \ P_2,\ \ P_3,\ \ P_4, \ldots.$$

wirken, um eine feste Axe drehbar ist; so wird, wenn man diese feste Axe als Axe der z annimmt, der Zustand der Ruhe des Systems dadurch vollständig bedingt, dass für die feste Axe die Gleichung:

$$\Sigma P\left\{\begin{array}{l}(x-a)(\cos\beta\cos\varpi - \cos\gamma\cos\omega) \\ +(y-b)(\cos\gamma\cos\theta - \cos\alpha\cos\varpi) \\ +(z-c)(\cos\alpha\cos\omega - \cos\beta\cos\theta)\end{array}\right\} = 0$$

erfüllt ist.

Dass die vorhergehende Bedingungsgleichung für den Zustand der Ruhe des Systems auch durch die Bedingungsgleichung

$$\Sigma pP = 0,$$

oder durch die Bedingungsgleichung

$$\Sigma PE\sin W = 0,$$

Digitized by Google

insofern diese Gleichungen als für die feste Axe gültig oder erfüllt vorausgesetzt werden, vollständig ersetzt werden kann, erhellet ganz eben so wie im vorhergehenden Paragraphen.

Wenn die Kräfte

$$P_0,\quad P_1,\quad P_2,\quad P_3,\quad P_4,\ldots.$$

sämmtlich in einer Ebene wirken, welche um einen festen Punkt oder vielmehr um eine durch diesen Punkt gehende, auf der Ebene senkrecht stehende Axe drehbar ist; so ist:

$$W_0 = W_1 = W_2 = W_3 = \ldots. = 90^0,$$

also:

$$\sin W_0 = \sin W_1 = \sin W_2 = \sin W_3 = \ldots. = 1,$$

und die kürzesten Entfernungen

$$E_0,\quad E_1,\quad E_2,\quad E_3,\quad E_4,\ldots.$$

sind die von dem festen Punkte auf die Richtungslinien der Kräfte gefällten Perpendikel. Die absoluten Werthe der Projectionen von

$$v_0,\quad v_1,\quad v_2,\quad v_3,\quad v_4,\quad \ldots.$$

auf den Richtungslinien der Kräfte sind in diesem Falle offenbar

$$v_0,\quad v_1,\quad v_2,\quad v_3,\quad v_4,\quad \ldots.$$

selbst, die Projectionen werden aber als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem sie auf den wirklichen Richtungen der Kräfte oder auf den direct entgegengesetzten Richtungen liegen, und

$$E_0,\quad E_1,\quad E_2,\quad E_3,\quad E_4,\quad \ldots.$$

werden mit den Projectionen sämmtlich von gleichen Vorzeichen, die Kräfte selbst werden aber sämmtlich als positiv betrachtet. Die Bedingungsgleichung für den Zustand der Ruhe des Systems ist in diesem Falle nach dem Obigen:

$$\Sigma PE = 0.$$

Man sieht nun aber leicht, dass es genügt, die kürzesten Entfernungen

$$E_0,\quad E_1,\quad E_2,\quad E_3,\quad E_4,\quad \ldots.$$

und folglich auch die Producte

$$P_0E_0,\quad P_1E_1,\quad P_2E_2,\quad P_3E_3,\quad P_4E_4,\ldots.$$

als positiv oder negativ zu betrachten, jenachdem die entspre-

Digitized by Google

chenden Kräfte die Ebene um den festen Punkt nach der einen oder nach der anderen Seite hin zu drehen streben; und bezeichnet man also unter dieser Voraussetzung die obigen Producte durch:

$$M_0,\quad M_1,\quad M_2,\quad M_3,\quad M_4,\ldots;$$

so ist die Bedingungsgleichung für den Zustand der Ruhe des Systems:

$$\Sigma M = 0.$$

Die durch

$$M_0,\quad M_1,\quad M_2,\quad M_3,\quad M_4,\ldots$$

bezeichneten, mit ihren gehörigen Zeichen genommenen Producte der Kräfte in die Entfernungen ihrer Richtungslinien von dem angenommenen Punkte werden die Momente der Kräfte in Bezug auf den angenommenen Punkt genannt, und man kann daher sagen, dass der Zustand der Ruhe des Systems in dem vorliegenden Falle dadurch vollständig bedingt wird, dass die Summe der Momente der Kräfte in Bezug auf den angenommenen Punkt verschwindet, wobei die Momente als positiv oder negativ betrachtet werden, jenachdem die entsprechenden Kräfte das System um den angenommenen Punkt nach der einen oder nach der anderen Seite hin zu drehen streben. Dies ist ein längst bekannter Satz, welcher sich also aus unseren obigen allgemeineren Sätzen unmittelbar ergiebt.

Anhang.

Ueber vier sich im Gleichgewichte befindende Kräfte.

Wenn die vier Kräfte

$$P_0,\quad P_1,\quad P_2,\quad P_3$$

unter einander im Gleichgewichte sind, so kann man die Richtungslinie einer jeden dieser Kräfte nach der Reihe als Axe annehmen, und nach dem ersten der in §. 12. bewiesenen Sätze finden dann die vier folgenden Gleichungen Statt:

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l}P_1\left\{\begin{array}{l}(x_1-x_0)(\cos\beta_1\cos\gamma_0-\cos\gamma_1\cos\beta_0)\\+(y_1-y_0)(\cos\gamma_1\cos\alpha_0-\cos\alpha_1\cos\gamma_0)\\+(z_1-z_0)(\cos\alpha_1\cos\beta_0-\cos\beta_1\cos\alpha_0)\end{array}\right\}\\+P_2\left\{\begin{array}{l}(x_2-x_0)(\cos\beta_2\cos\gamma_0-\cos\gamma_2\cos\beta_0)\\+(y_2-y_0)(\cos\gamma_2\cos\alpha_0-\cos\alpha_2\cos\gamma_0)\\+(z_2-z_0)(\cos\alpha_2\cos\beta_0-\cos\beta_2\cos\alpha_0)\end{array}\right\}\\+P_3\left\{\begin{array}{l}(x_3-x_0)(\cos\beta_3\cos\gamma_0-\cos\gamma_3\cos\beta_0)\\+(y_3-y_0)(\cos\gamma_3\cos\alpha_0-\cos\alpha_3\cos\gamma_0)\\+(z_3-z_0)(\cos\alpha_3\cos\beta_0-\cos\beta_3\cos\alpha_0)\end{array}\right\}\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}P_0\left\{\begin{array}{l}(x_0-x_1)(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)\\+(y_0-y_1)(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)\\+(z_0-z_1)(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)\end{array}\right\}\\+P_2\left\{\begin{array}{l}(x_2-x_1)(\cos\beta_2\cos\gamma_1-\cos\gamma_2\cos\beta_1)\\+(y_2-y_1)(\cos\gamma_2\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\cos\gamma_1)\\+(z_2-z_1)(\cos\alpha_2\cos\beta_1-\cos\beta_2\cos\alpha_1)\end{array}\right\}\\+P_3\left\{\begin{array}{l}(x_3-x_1)(\cos\beta_3\cos\gamma_1-\cos\gamma_3\cos\beta_1)\\+(y_3-y_1)(\cos\gamma_3\cos\alpha_1-\cos\alpha_3\cos\gamma_1)\\+(z_3-z_1)(\cos\alpha_3\cos\beta_1-\cos\beta_3\cos\alpha_1)\end{array}\right\}\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}P_0\left\{\begin{array}{l}(x_0-x_2)(\cos\beta_0\cos\gamma_2-\cos\gamma_0\cos\beta_2)\\+(y_0-y_2)(\cos\gamma_0\cos\alpha_2-\cos\alpha_0\cos\gamma_2)\\+(z_0-z_2)(\cos\alpha_0\cos\beta_2-\cos\beta_0\cos\alpha_2)\end{array}\right\}\\+P_1\left\{\begin{array}{l}(x_1-x_2)(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)\\+(y_1-y_2)(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\gamma_2)\\+(z_1-z_2)(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)\end{array}\right\}\\+P_3\left\{\begin{array}{l}(x_3-x_2)(\cos\beta_3\cos\gamma_2-\cos\gamma_3\cos\beta_2)\\+(y_3-y_2)(\cos\gamma_3\cos\alpha_2-\cos\alpha_3\cos\gamma_2)\\+(z_3-z_2)(\cos\alpha_3\cos\beta_2-\cos\beta_3\cos\alpha_2)\end{array}\right\}\end{array}\right\}=0,$$

Digitized by Google

$$\left.\begin{array}{l}P_0\left\{\begin{array}{l}(x_0-x_3)(\cos\beta_0\cos\gamma_3-\cos\gamma_0\cos\beta_3)\\+(y_0-y_3)(\cos\gamma_0\cos\alpha_3-\cos\alpha_0\cos\gamma_3)\\+(z_0-z_3)(\cos\alpha_0\cos\beta_3-\cos\beta_0\cos\alpha_3)\end{array}\right\}\\+P_1\left\{\begin{array}{l}(x_1-x_3)(\cos\beta_1\cos\gamma_3-\cos\gamma_1\cos\beta_3)\\+(y_1-y_3)(\cos\gamma_1\cos\alpha_3-\cos\alpha_1\cos\gamma_3)\\+(z_1-z_3)(\cos\alpha_1\cos\beta_3-\cos\beta_1\cos\alpha_3)\end{array}\right\}\\+P_2\left\{\begin{array}{l}(x_2-x_3)(\cos\beta_2\cos\gamma_3-\cos\gamma_2\cos\beta_3)\\+(y_2-y_3)(\cos\gamma_2\cos\alpha_3-\cos\alpha_2\cos\gamma_3)\\+(z_2-z_3)(\cos\alpha_2\cos\beta_3-\cos\beta_2\cos\alpha_3)\end{array}\right\}\end{array}\right\}=0;$$

also, wenn man der Kürze wegen:

1)

$$P_{01}=\left\{\begin{array}{l}(x_0-x_1)(\cos\beta_0\cos\gamma_1-\cos\gamma_0\cos\beta_1)\\+(y_0-y_1)(\cos\gamma_0\cos\alpha_1-\cos\alpha_0\cos\gamma_1)\\+(z_0-z_1)(\cos\alpha_0\cos\beta_1-\cos\beta_0\cos\alpha_1)\end{array}\right\},$$

$$P_{02}=\left\{\begin{array}{l}(x_0-x_2)(\cos\beta_0\cos\gamma_2-\cos\gamma_0\cos\beta_2)\\+(y_0-y_2)(\cos\gamma_0\cos\alpha_2-\cos\alpha_0\cos\gamma_2)\\+(z_0-z_2)(\cos\alpha_0\cos\beta_2-\cos\beta_0\cos\alpha_2)\end{array}\right\},$$

$$P_{03}=\left\{\begin{array}{l}(x_0-x_3)(\cos\beta_0\cos\gamma_3-\cos\gamma_0\cos\beta_3)\\+(y_0-y_3)(\cos\gamma_0\cos\alpha_3-\cos\alpha_0\cos\gamma_3)\\+(z_0-z_3)(\cos\alpha_0\cos\beta_3-\cos\beta_0\cos\alpha_3)\end{array}\right\},$$

$$P_{12}=\left\{\begin{array}{l}(x_1-x_2)(\cos\beta_1\cos\gamma_2-\cos\gamma_1\cos\beta_2)\\+(y_1-y_2)(\cos\gamma_1\cos\alpha_2-\cos\alpha_1\cos\gamma_2)\\+(z_1-z_2)(\cos\alpha_1\cos\beta_2-\cos\beta_1\cos\alpha_2)\end{array}\right\},$$

$$P_{13}=\left\{\begin{array}{l}(x_1-x_3)(\cos\beta_1\cos\gamma_3-\cos\gamma_1\cos\beta_3)\\+(y_1-y_3)(\cos\gamma_1\cos\alpha_3-\cos\alpha_1\cos\gamma_3)\\+(z_1-z_3)(\cos\alpha_1\cos\beta_3-\cos\beta_1\cos\alpha_3)\end{array}\right\},$$

$$P_{23}=\left\{\begin{array}{l}(x_2-x_3)(\cos\beta_2\cos\gamma_3-\cos\gamma_2\cos\beta_3)\\+(y_2-y_3)(\cos\gamma_2\cos\alpha_3-\cos\alpha_2\cos\gamma_3)\\+(z_2-z_3)(\cos\alpha_2\cos\beta_3-\cos\beta_2\cos\alpha_3)\end{array}\right\}$$

setzt, die Gleichungen:

Digitized by Google

2)

$$P_1 P_{01} + P_2 P_{02} + P_3 P_{03} = 0,$$
$$P_0 P_{01} + P_2 P_{12} + P_3 P_{13} = 0,$$
$$P_0 P_{02} + P_1 P_{12} + P_3 P_{23} = 0,$$
$$P_0 P_{03} + P_1 P_{13} + P_2 P_{23} = 0;$$

oder die Gleichungen:

3)

$$P_0 P_1 P_{01} + P_0 P_2 P_{02} + P_0 P_3 P_{03} = 0,$$
$$P_0 P_1 P_{01} + P_1 P_2 P_{12} + P_1 P_3 P_{13} = 0,$$
$$P_0 P_2 P_{02} + P_1 P_2 P_{12} + P_2 P_3 P_{23} = 0,$$
$$P_0 P_3 P_{03} + P_1 P_3 P_{13} + P_2 P_3 P_{23} = 0;$$

oder, wenn

$$4) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{array}{l} \Pi_{01} = P_0 P_1 P_{01}, \\ \Pi_{02} = P_0 P_2 P_{02}, \\ \Pi_{03} = P_0 P_3 P_{03}, \\ \Pi_{12} = P_1 P_2 P_{12}, \\ \Pi_{13} = P_1 P_3 P_{13}, \\ \Pi_{23} = P_2 P_3 P_{23} \end{array} \right.$$

gesetzt wird:

5)

$$(1) \ldots\ldots\ldots \Pi_{01} + \Pi_{02} + \Pi_{03} = 0,$$
$$(2) \ldots\ldots\ldots \Pi_{01} + \Pi_{12} + \Pi_{13} = 0,$$
$$(3) \ldots\ldots\ldots \Pi_{02} + \Pi_{12} + \Pi_{23} = 0,$$
$$(4) \ldots\ldots\ldots \Pi_{03} + \Pi_{13} + \Pi_{23} = 0.$$

Aus (1), (4) und (2), (3) erhält man:

$$\Pi_{01} + \Pi_{02} = \Pi_{13} + \Pi_{23},$$
$$\Pi_{01} + \Pi_{13} = \Pi_{02} + \Pi_{23};$$

also durch Addition:

$$2\Pi_{01} + \Pi_{02} + \Pi_{13} = 2\Pi_{23} + \Pi_{13} + \Pi_{02},$$

folglich:

$$\Pi_{01} = \Pi_{23}.$$

Aus (1), (2) und (3), (4) erhält man:

Digitized by Google

$$\Pi_{02} + \Pi_{03} = \Pi_{12} + \Pi_{13},$$
$$\Pi_{02} + \Pi_{12} = \Pi_{03} + \Pi_{13};$$

also durch Addition:

$$2\Pi_{02} + \Pi_{03} + \Pi_{12} = 2\Pi_{13} + \Pi_{12} + \Pi_{03},$$

folglich:

$$\Pi_{02} = \Pi_{13}.$$

Aus (1), (3) und (2), (4) erhält man:

$$\Pi_{01} + \Pi_{03} = \Pi_{12} + \Pi_{23},$$
$$\Pi_{01} + \Pi_{12} = \Pi_{03} + \Pi_{23};$$

also durch Subtraction:

$$\Pi_{03} - \Pi_{12} = \Pi_{12} - \Pi_{03},$$

folglich:

$$2\Pi_{03} = 2\Pi_{12}, \quad \Pi_{03} = \Pi_{12}.$$

Daher haben wir jetzt die drei folgenden Gleichungen:

$$\Pi_{01} = \Pi_{23}, \quad \Pi_{02} = \Pi_{13}, \quad \Pi_{03} = \Pi_{12};$$

also nach 4) die Gleichungen:

6)

((1)) . . . . $P_0 P_1 P_{01} = P_2 P_3 P_{23}$,

((2)) . . . . $P_0 P_2 P_{02} = P_1 P_3 P_{13}$,

((3)) . . . . $P_0 P_3 P_{03} = P_1 P_2 P_{12}$.

Durch Multiplication der Gleichungen

((1)) ((2)), ((2)) ((3)), ((3)) ((1))

und durch Multiplication derselben Gleichungen über's Kreuz erhält man:

7)

$$P_0^2 P_{01} P_{02} = P_3^2 P_{13} P_{23},$$
$$P_0^2 P_{02} P_{03} = P_1^2 P_{12} P_{13},$$
$$P_0^2 P_{01} P_{03} = P_2^2 P_{12} P_{23},$$
$$P_1^2 P_{01} P_{12} = P_3^2 P_{03} P_{23},$$
$$P_1^2 P_{01} P_{13} = P_2^2 P_{02} P_{23},$$
$$P_2^2 P_{02} P_{12} = P_3^2 P_{03} P_{13};$$

folglich sit:

Digitized by Google

$$P_1^2 = P_0^2 \frac{P_{02} P_{03}}{P_{12} P_{13}} = P_0^2 \frac{P_{02} P_{03} P_{23}}{P_{12} P_{13} P_{23}},$$

$$P_2^2 = P_0^2 \frac{P_{01} P_{03}}{P_{12} P_{23}} = P_0^2 \frac{P_{01} P_{03} P_{13}}{P_{12} P_{13} P_{23}},$$

$$P_3^2 = P_0^2 \frac{P_{01} P_{02}}{P_{13} P_{23}} = P_0^2 \frac{P_{01} P_{02} P_{12}}{P_{12} P_{13} P_{23}};$$

und man kann also, wenn k eine gewisse Constante bezeichnet, offenbar:

8)

$$P_0^2 = kP_{12} P_{13} P_{23},$$
$$P_1^2 = kP_{02} P_{03} P_{23},$$
$$P_2^2 = kP_{01} P_{03} P_{13},$$
$$P_3^2 = kP_{01} P_{02} P_{12};$$

oder, weil nach 1), wie man sogleich übersieht:

$$P_{13} = P_{31}, \quad P_{03} = P_{30}, \quad P_{02} = P_{20}$$

gesetzt werden kann:

8*)

$$P_0^2 = kP_{12} P_{23} P_{31},$$
$$P_1^2 = kP_{23} P_{30} P_{02},$$
$$P_2^2 = kP_{30} P_{01} P_{13},$$
$$P_3^2 = kP_{01} P_{12} P_{20}$$

setzen.

Aus 8) erhält man durch Multiplication:

9)

$$P_0^2 P_1^2 P_2^2 P_3^2 = k^4 P_{01}^2 P_{02}^2 P_{03}^2 P_{12}^2 P_{13}^2 P_{23}^2.$$

Ferner erhält man aus 6) und 8):

10)

$$P_0^2 P_1^2 P_{01}^2 = P_2^2 P_3^2 P_{23}^2 = k^2 P_{01}^2 P_{02} P_{03} P_{12} P_{13} P_{23}^2,$$

$$P_0^2 P_2^2 P_{02}^2 = P_1^2 P_3^2 P_{13}^2 = k^2 P_{01} P_{02}^2 P_{03} P_{12} P_{13}^2 P_{23},$$

$$P_0^2 P_3^2 P_{03}^2 = P_1^2 P_2^2 P_{12}^2 = k^2 P_{01} P_{02} P_{03}^2 P_{12}^2 P_{13} P_{23};$$

oder:

$$P_0^2 P_1^2 P_{01}^2 = P_2^2 P_3^2 P_{23}^2$$
$$= k^2 P_{01} P_{02} P_{03} P_{12} P_{13} P_{23} . P_{01} P_{23},$$

$$P_0^2 P_2^2 P_{02}^2 = P_1^2 P_3^2 P_{13}^2$$
$$= k^2 P_{01} P_{02} P_{03} P_{12} P_{13} P_{23} . P_{02} P_{13}.$$

Digitized by Google

$$P_0{}^2P_3{}^2P_{03}{}^2 = P_1{}^2P_2{}^2P_{12}{}^2$$
$$= k^2P_{01}P_{02}P_{03}P_{12}P_{13}P_{23}\,.\,P_{03}P_{12};$$

also, wenn man:

11) . . . . . . $K = k^2P_{01}P_{02}P_{03}P_{12}P_{13}P_{23}$

setzt:

12)

$$P_0{}^2P_1{}^2P_{01}{}^2 = P_2{}^2P_3{}^2P_{23}{}^2 = KP_{01}P_{23},$$
$$P_0{}^2P_2{}^2P_{02}{}^2 = P_1{}^2P_3{}^2P_{13}{}^2 = KP_{02}P_{13},$$
$$P_0{}^2P_3{}^2P_{03}{}^2 = P_1{}^2P_2{}^2P_{12}{}^2 = KP_{03}P_{12}.$$

Bezeichnet man die absoluten Werthe der Grössen:

$$K,\ P_{01},\ P_{02},\ P_{03},\ P_{12},\ P_{13},\ P_{23}$$

durch

$$(K),\ (P_{01}),\ (P_{02}),\ (P_{03}),\ (P_{12}),\ (P_{13}),\ (P_{23});$$

so ist nach 12):

13)

$$P_0P_1P_{01} = \pm\sqrt{(K)}\,.\sqrt{(P_{01})(P_{23})},$$
$$P_0P_2P_{02} = \pm\sqrt{(K)}\,.\sqrt{(P_{02})(P_{13})},$$
$$P_0P_3P_{03} = \pm\sqrt{(K)}\,.\sqrt{(P_{03})(P_{12})},$$
$$P_1P_2P_{12} = \pm\sqrt{(K)}\,.\sqrt{(P_{03})(P_{12})},$$
$$P_1P_3P_{13} = \pm\sqrt{(K)}\,.\sqrt{(P_{02})(P_{13})},$$
$$P_2P_3P_{23} = \pm\sqrt{(K)}\,.\sqrt{(P_{01})(P_{23})}.$$

Wenn man nur, was natürlich verstattet ist, die Winkel

$$\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0;\quad \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\quad \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3$$

den wirklichen Richtungen der Kräfte entsprechen lässt, so sind alle Kräfte positiv, und in den vorstehenden Gleichungen sind dann die oberen oder unteren Vorzeichen zu nehmen, jenachdem beziehungsweise die Grössen

$$P_{01},\ P_{02},\ P_{03},\ P_{12},\ P_{13},\ P_{23}$$

positiv oder negativ sind.

Aus 3) und 13) ergeben sich die Gleichungen:

Digitized by Google

14)

$$\pm\sqrt{(P_{01})(P_{23})}\pm\sqrt{(P_{02})(P_{13})}\pm\sqrt{(P_{03})(P_{12})}=0,$$
$$\pm\sqrt{(P_{01})(P_{23})}\pm\sqrt{(P_{03})(P_{12})}\pm\sqrt{(P_{02})(P_{13})}=0,$$
$$\pm\sqrt{(P_{02})(P_{13})}\pm\sqrt{(P_{03})(P_{12})}\pm\sqrt{(P_{01})(P_{23})}=0,$$
$$\pm\sqrt{(P_{03})(P_{12})}\pm\sqrt{(P_{02})(P_{13})}\pm\sqrt{(P_{01})(P_{23})}=0;$$

in denen die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, jenachdem beziehungsweise die Grössen:

$$P_{01},\quad P_{02},\quad P_{03};$$
$$P_{01},\quad P_{12},\quad P_{13};$$
$$P_{02},\quad P_{12},\quad P_{23};$$
$$P_{03},\quad P_{13},\quad P_{23}$$

positiv oder negativ sind. Man kann die Gleichungen 14) auch auf folgende Weise schreiben:

15)

$$\pm\sqrt{(P_{01})(P_{23})}\pm\sqrt{(P_{02})(P_{13})}\pm\sqrt{(P_{03})(P_{12})}=0,$$
$$\pm\sqrt{(P_{10})(P_{23})}\pm\sqrt{(P_{12})(P_{03})}\pm\sqrt{(P_{13})(P_{02})}=0,$$
$$\pm\sqrt{(P_{20})(P_{13})}\pm\sqrt{(P_{21})(P_{03})}\pm\sqrt{(P_{23})(P_{01})}=0,$$
$$\pm\sqrt{(P_{30})(P_{12})}\pm\sqrt{(P_{31})(P_{02})}\pm\sqrt{(P_{32})(P_{01})}=0;$$

wo die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind, jenachdem beziehungsweise die Grössen:

$$P_{01},\quad P_{02},\quad P_{03};$$
$$P_{10},\quad P_{12},\quad P_{13};$$
$$P_{20},\quad P_{21},\quad P_{23};$$
$$P_{30},\quad P_{31},\quad P_{32}$$

positiv oder negativ sind.

Die Bildungsweise der Gleichungen 15) unterliegt keinem Zweifel, und der Zusammenhang der Grössen

$$P_{01},\ P_{02},\ P_{03},\ P_{12},\ P_{13},\ P_{23}$$

mit den kürzesten Entfernungen der Richtungslinien der Kräfte und den von denselben eingeschlossenen Winkeln ist aus unseren früheren Entwickelungen bekannt, aus denen sich auch leicht

Digitized by Google

andere Regeln wie die obigen zur Bestimmung der Vorzeichen in den Gleichungen 15) ableiten lassen würden, was wir füglich dem sich für diesen Gegenstand interessirenden Leser überlassen können; für die Statik im Allgemeinen ist derselbe von keiner besonderen Bedeutung, so merkwürdig auch jedenfalls die vorher entwickelten, schon anderweitig bekannten, Relationen, die sich also aus meinen in dieser Abhandlung bewiesenen allgemeinen, für jede beliebige Anzahl von Kräften geltenden Gleichungen ableiten lassen, sind, und über die man u. A. auch einen Aufsatz von E. D'Ovidio im „Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane, pubblicato per cura del Professore Battaglini. Anno IV. Gennaio e Febbraio 1866. p. 58." nachsehen kann. Erinnern mag man sich hier auch noch an den von mir im „Archiv. Thl. XLV. S. 66." bewiesenen Satz vom Tetraeder, der, so viel ich weiss, ursprünglich von Chasles herrührt, was a. a. O. nicht bemerkt worden ist.

Digitized by Google

XIV.

Der Mittelpunkt oder das Centrum beliebig vieler auf beliebige Weise in einer und derselben Ebene wirkender Kräfte.

Von
dem Herausgeber.

§. 1.

Wir wollen zuerst nur eine im Anfange der Coordinaten O und in der Ebene der xy, in welcher wir uns überhaupt alle unsere folgenden Constructionen ausgeführt denken, auf welche sich alle unsere folgenden Betrachtungen allein beziehen werden, wirkende Kraft betrachten, die im Allgemeinen durch P_x bezeichnet werden mag; den von dem positiven Theile der Richtungslinie dieser Kraft mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an nach dem positiven Theile der Axe der y hin, oder durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch, von 0 bis 360° zählen, bezeichnen wir durch α_x. Durch Drehung des positiven Theils der Richtungslinie der Kraft P_x um den Anfang der Coordinaten O, die wir uns der Einfachheit wegen, und um die Begriffe zu fixiren, immer in dem Sinne von dem positiven Theile der Axe der x an nach dem positiven Theile der Axe y hin oder durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch vor sich gehend denken, um einen Winkel θ, den wir jedoch, was völlig hinreicht, der Einfachheit wegen nicht grösser als 360° annehmen, lassen wir nun den positiven Theil der Richtungslinie der Kraft P_x in eine andere Lage

übergehen, und bezeichnen den von demselben in dieser Lage mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen, in gleichem Sinne wie vorher den Winkel α_x von 0 bis 360° gezählten Winkel durch α_x'. Wenn nun bei dieser Drehung der positive Theil der Richtungslinie der Kraft P_x nicht durch den positiven Theil der Axe der x hindurch gegangen ist, so ist offenbar:

$$\alpha_x' - \alpha_x = \theta;$$

wenn dagegen der positive Theil der Richtungslinie der Kraft P_x durch den positiven Theil der Axe der x hindurch gegangen ist, so ist offenbar:

$$\alpha_x - \alpha_x' = 360^\circ - \theta,$$

also:

$$\alpha_x' - \alpha_x = \theta - 360^\circ.$$

Hiernach ist also:

$$1) \ldots \quad \alpha_x' - \alpha_x = \theta \text{ oder } \alpha_x' - \alpha_x = \theta - 360^\circ,$$

jenachdem bei der in Rede stehenden Drehung ein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie der Kraft P_x durch den positiven Theil der Axe der x nicht Statt gefunden oder Statt gefunden hat.

Zu der Kraft P_x fügen wir nun eine zweite im Anfange der Coordinaten O und in der Ebene der xy wirkende Kraft, welche im Allgemeinen durch P_λ bezeichnet werden mag; den von dem positiven Theile der Richtungslinie der Kraft P_λ mit dem positiven Theile der Richtungslinie der Kraft P_x eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Richtungslinie der Kraft P_x an, in dem Sinne von dem positiven Theile der Axe der x an nach dem positiven Theile der Axe der y hin oder durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch, nach dem positiven Theile der Richtungslinie der Kraft P_λ hin von 0 bis 360° zählen, bezeichnen wir durch $(P_x P_\lambda)$, so dass also in dieser Bezeichnung offenbar im Allgemeinen die Gleichung:

$$2) \ldots \quad (P_x P_\lambda) + (P_\lambda P_x) = 360^\circ$$

Statt findet. Bedienen wir uns nun für die Kraft P_λ ganz ähnlicher, und daher ohne weitere Erläuterung für sich verständlicher, Bezeichnungen wie vorher für die Kraft P_x, und lassen das System der positiven Theile der Richtungslinien der Kräfte P_x und P_λ eine Drehung um den Anfang der Coordinaten O in der Ebene der xy in dem bekannten Sinne um den Winkel θ erleiden; so ist nach 1):

Digitized by Google

$$3) \ldots \quad \alpha_\lambda' - \alpha_\lambda = \theta \text{ oder } \alpha_\lambda' - \alpha_\lambda = \theta - 360^0,$$

jenachdem bei dieser Drehung ein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie der Kraft P_λ durch den positiven Theil der Axe der x nicht Statt gefunden oder Statt gefunden hat.

Bezeichnen wir nun durch m überhaupt eine ganze Zahl, so ist nach 1) und 3) offenbar:

$$4) \ldots \quad (\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda) = 2\theta + m.360^0,$$

oder:

$$5) \ldots \quad \tfrac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda)\} = \theta + m.180^0,$$

wo m eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, jenachdem für die positiven Theile der Richtungslinien der beiden Kräfte P_x und P_λ Durchgänge durch den positiven Theil der Axe der x nicht Statt gefunden oder Statt gefunden haben; oder für die eine der beiden Kräfte kein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie, für die andere Kraft ein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie durch den positiven Theil der Axe der x Statt gefunden hat.

Nach 1) und 3) sind die folgenden Zusammenstellungen möglich:

$$\alpha_x' - \alpha_x = \theta, \qquad \alpha_\lambda' - \alpha_\lambda = \theta;$$
$$\alpha_x' - \alpha_x = \theta, \qquad \alpha_\lambda' - \alpha_\lambda = \theta - 360^0;$$
$$\alpha_x' - \alpha_x = \theta - 360^0, \quad \alpha_\lambda' - \alpha_\lambda = \theta;$$
$$\alpha_x' - \alpha_x = \theta - 360^0, \quad \alpha_\lambda' - \alpha_\lambda = \theta - 360^0;$$

und es kann also beziehungsweise sein:

$$(\alpha_x' - \alpha_x) - (\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda) = 0,$$
$$(\alpha_x' - \alpha_x) - (\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda) = +360^0,$$
$$(\alpha_x' - \alpha_x) - (\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda) = -360^0,$$
$$(\alpha_x' - \alpha_x) - (\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda) = 0;$$

also:

$$\alpha_x' - \alpha_x = \alpha_\lambda' - \alpha_\lambda,$$
$$\alpha_x' - \alpha_x = \alpha_\lambda' - \alpha_\lambda \pm 360^0;$$

folglich:

$$\alpha_x' + \alpha_\lambda = \alpha_x + \alpha_\lambda',$$
$$\alpha_x' + \alpha_\lambda = \alpha_x + \alpha_\lambda' \pm 360^0;$$

und daher allgemein mit Rücksicht auf 1) und 3):

Digitized by Google

$$6) \dots \left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha_x' - \alpha_x) = \sin(\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda) = \sin\theta, \\ \cos(\alpha_x' - \alpha_x) = \cos(\alpha_\lambda' - \alpha_\lambda) = \cos\theta; \end{array} \right.$$

und:

$$7) \dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \sin(\alpha_x' + \alpha_\lambda) = \sin(\alpha_x + \alpha_\lambda'), \\ \cos(\alpha_x' + \alpha_\lambda) = \cos(\alpha_x + \alpha_\lambda'). \end{array} \right.$$

Wenn $\alpha_x < \alpha_\lambda$ ist, so ist offenbar:

$$\alpha_\lambda - \alpha_x = (P_x P_\lambda).$$

Hat nun bei der in Rede stehenden Drehung für den positiven Theil der Richtungslinie der Kraft P_λ kein Durchgang durch den positiven Theil der Axe der x Statt gefunden, so hat offenbar auch für den positiven Theil der Richtungslinie der Kraft P_x kein Durchgang durch den positiven Theil der Axe der x Statt gefunden, und es ist also offenbar:

$$\alpha_\lambda' - \alpha_x' = (P_x P_\lambda);$$

folglich nach dem Obigen:

$$(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x') = 2(P_x P_\lambda).$$

Hat für den positiven Theil der Richtungslinie der Kraft P_λ und auch für den positiven Theil der Richtungslinie der Kraft P_x ein Durchgang durch den positiven Theil der Axe der x Statt gefunden, so ist offenbar wieder:

$$\alpha_\lambda' - \alpha_x' = (P_x P_\lambda),$$

also:

$$(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x') = 2(P_x P_\lambda).$$

Hat endlich für den positiven Theil der Richtungslinie der Kraft P_λ ein Durchgang, für den positiven Theil der Richtungslinie der Kraft P_x kein Durchgang durch den positiven Theil der Axe der x Statt gefunden, so ist offenbar:

$$\alpha_x' - \alpha_\lambda' = 360^0 - (P_x P_\lambda),$$

also:

$$\alpha_\lambda' - \alpha_x' = (P_x P_\lambda) - 360^0,$$

und folglich nach dem Obigen:

$$(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x') = 2(P_x P_\lambda) - 360^0.$$

Ueberhaupt ist also, wenn n eine ganze Zahl bezeichnet:

$$(\alpha_\lambda - \alpha_x) + (\alpha_\lambda' - \alpha_x') = 2(P_x P_\lambda) + n.360^0,$$

Digitized by Google

also:

$$\tfrac{1}{2}\{(\alpha_\lambda-\alpha_x)+(\alpha_\lambda'-\alpha_x')\}=(P_x P_\lambda)+n.180^0,$$

wo n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, jenachdem für die positiven Theile der Richtungslinien der beiden Kräfte P_x und P_λ Durchgänge durch den positiven Theil der Axe der x nicht Statt gefunden oder Statt gefunden haben; oder für die eine der beiden Kräfte kein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie, für die andere Kraft ein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie durch den positiven Theil der Axe der x Statt gefunden hat.

Wenn $\alpha_x > \alpha_\lambda$ ist, so ist ganz eben so und mit denselben Bedingungen rücksichtlich der ganzen Zahl n':

$$(\alpha_x-\alpha_\lambda)+(\alpha_x'-\alpha_\lambda')=2(P_\lambda P_x)+n'.360^0,$$

also:

$$\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x-\alpha_\lambda)+(\alpha_x'-\alpha_\lambda')\}=(P_\lambda P_x)+n'.180^0;$$

da aber nach 2):

$$(P_\lambda P_x)=360^0-(P_x P_\lambda)$$

ist, so ist:

$$(\alpha_x-\alpha_\lambda)+(\alpha_x'-\alpha_\lambda')=(n'+2).360^0-2(P_x P_\lambda),$$

also:

$$\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x-\alpha_\lambda)+(\alpha_x'-\alpha_\lambda')\}=(n'+2).180^0-(P_x P_\lambda);$$

folglich:

$$(\alpha_\lambda-\alpha_x)+(\alpha_\lambda'-\alpha_x')=2(P_x P_\lambda)-(n'+2).360^0$$

und:

$$\tfrac{1}{2}\{(\alpha_\lambda-\alpha_x)+(\alpha_\lambda'-\alpha_x')\}=(P_x P_\lambda)-(n'+2).180^0,$$

wo $n'+2$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, jenachdem für die positiven Theile der Richtungslinien der beiden Kräften P_x und P_λ Durchgänge durch den positiven Theil der Axe der x nicht Statt gefunden oder Statt gefunden haben; oder für die eine der beiden Kräfte kein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie, für die andere Kraft ein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie durch den positiven Theil der Axe der x Statt gefunden hat.

Hieraus ergiebt sich nun, dass in den beiden so eben betrachteten Fällen:

$$8) \quad \ldots \quad (\alpha_\lambda-\alpha_x)+(\alpha_\lambda'-\alpha_x')=2(P_x P_\lambda)+n.360^0,$$

also:

$$9) \ldots . \quad \tfrac{1}{2}\{(\alpha\lambda - \alpha_x) + (\alpha\lambda' - \alpha_x')\} = (P_x P_\lambda) + n.180^0$$

gesetzt werden kann, wo n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, jenachdem für die positiven Theile der Richtungslinien der beiden Kräfte P_x und P_λ Durchgänge durch den positiven Theil der Axe der x nicht Statt gefunden oder Statt gefunden haben; oder für die eine der beiden Kräfte kein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie, für die andere Kraft ein Durchgang des positiven Theils der Richtungslinie durch den positiven Theil der Axe der x Statt gefunden hat.

Nach 5) und 9) ist nun in völliger Allgemeinheit:

$$10) \ldots . \left\{ \begin{array}{l} \tfrac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha\lambda' - \alpha\lambda)\} = \theta + m.180^0, \\ \tfrac{1}{2}\{(\alpha\lambda - \alpha_x) + (\alpha\lambda' - \alpha_x')\} = (P_x P_\lambda) + n.180^0; \end{array} \right.$$

wo m und n gleichzeitig gerade und ungerade Zahlen sind.

Also ist:

$$11) \ldots . \left\{ \begin{array}{l} \sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha\lambda' - \alpha\lambda)\} = (-1)^m \sin\theta, \\ \cos\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha\lambda' - \alpha\lambda)\} = (-1)^m \cos\theta; \end{array} \right.$$

und:

$$12) \ldots . \left\{ \begin{array}{l} \sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha\lambda - \alpha_x) + (\alpha\lambda' - \alpha_x')\} = (-1)^n \sin(P_x P_\lambda), \\ \cos\tfrac{1}{2}\{(\alpha\lambda - \alpha_x) + (\alpha\lambda' - \alpha_x')\} = (-1)^n \cos(P_x P_\lambda). \end{array} \right.$$

Wir wollen nun noch einige Relationen entwickeln, von denen wir im Folgenden Gebrauch machen werden.

Es ist:

$$\sin(\alpha_x' - \alpha\lambda) + \sin(\alpha\lambda' - \alpha_x)$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha\lambda) + (\alpha\lambda' - \alpha_x)\}\cos\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha\lambda) - (\alpha\lambda' - \alpha_x)\}$$

$$= 2\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha\lambda' - \alpha\lambda)\}\cos\tfrac{1}{2}\{(\alpha\lambda - \alpha_x) + (\alpha\lambda' - \alpha_x')\},$$

$$\cos(\alpha_x' - \alpha\lambda) + \cos(\alpha\lambda' - \alpha_x)$$

$$= 2\cos\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha\lambda) + (\alpha\lambda' - \alpha_x)\}\cos\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha\lambda) - (\alpha\lambda' - \alpha_x)\}$$

$$= 2\cos\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x' - \alpha_x) + (\alpha\lambda' - \alpha\lambda)\}\cos\tfrac{1}{2}\{(\alpha\lambda - \alpha_x) + (\alpha\lambda' - \alpha_x')\};$$

folglich nach 11) und 12):

$$\sin(\alpha_x' - \alpha\lambda) + \sin(\alpha\lambda' - \alpha_x) = 2(-1)^{m+n}\sin\theta\cos(P_x P_\lambda),$$

$$\cos(\alpha_x' - \alpha\lambda) + \cos(\alpha\lambda' - \alpha_x) = 2(-1)^{m+n}\cos\theta\cos(P_x P_\lambda);$$

Digitized by Google

also, weil $m+n$ nach dem Obigen jedenfalls eine gerade Zahl ist:

13)

$$\sin(\alpha_x{}'-\alpha_\lambda)+\sin(\alpha_\lambda{}'-\alpha_x)=2\sin\theta\cos(P_xP_\lambda),$$

$$\cos(\alpha_x{}'-\alpha_\lambda)+\cos(\alpha_\lambda{}'-\alpha_x)=2\cos\theta\cos(P_xP_\lambda).$$

Ferner ist:

$$2(\sin\alpha_x{}'\cos\alpha_\lambda-\sin\alpha_x\cos\alpha_\lambda{}')$$

$$=\sin(\alpha_x{}'+\alpha_\lambda)+\sin(\alpha_x{}'-\alpha_\lambda)-\sin(\alpha_x+\alpha_\lambda{}')-\sin(\alpha_x-\alpha_\lambda{}'),$$

also nach 7):

$$2(\sin\alpha_x{}'\cos\alpha_\lambda-\sin\alpha_x\cos\alpha_\lambda{}')$$

$$=\sin(\alpha_x{}'-\alpha_\lambda)-\sin(\alpha_x-\alpha_\lambda{}')$$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x{}'-\alpha_\lambda)-(\alpha_x-\alpha_\lambda{}')\}\cos\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x{}'-\alpha_\lambda)+(\alpha_x-\alpha_\lambda{}')\}$$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x{}'-\alpha_x)+(\alpha_\lambda{}'-\alpha_\lambda)\}\cos\tfrac{1}{2}\{(\alpha_\lambda-\alpha_x)+(\alpha_\lambda{}'-\alpha_x{}')\};$$

$$2(\cos\alpha_x{}'\cos\alpha_\lambda-\cos\alpha_x\cos\alpha_\lambda{}')$$

$$=\cos(\alpha_x{}'+\alpha_\lambda)+\cos(\alpha_x{}'-\alpha_\lambda)-\cos(\alpha_x+\alpha_\lambda{}')-\cos(\alpha_x-\alpha_\lambda{}'),$$

also nach 7):

$$2(\cos\alpha_x{}'\cos\alpha_\lambda-\cos\alpha_x\cos\alpha_\lambda{}')$$

$$=\cos(\alpha_x{}'-\alpha_\lambda)-\cos(\alpha_x-\alpha_\lambda{}')$$

$$=-2\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x{}'-\alpha_\lambda)-(\alpha_x-\alpha_\lambda{}')\}\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x{}'-\alpha_\lambda)+(\alpha_x-\alpha_\lambda{}')\}$$

$$=2\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x{}'-\alpha_x)+(\alpha_\lambda{}'-\alpha_\lambda)\}\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha_\lambda-\alpha_x)+(\alpha_\lambda{}'-\alpha_x{}')\};$$

folglich nach 11) und 12):

$$\sin\alpha_x{}'\cos\alpha_\lambda-\sin\alpha_x\cos\alpha_\lambda{}'=(-1)^{m+n}\sin\theta\cos(P_xP_\lambda),$$

$$\cos\alpha_x{}'\cos\alpha_\lambda-\cos\alpha_x\cos\alpha_\lambda{}'=(-1)^{m+n}\sin\theta\sin(P_xP_\lambda);$$

also wie vorher:

14)

$$\sin\alpha_x{}'\cos\alpha_\lambda-\sin\alpha_x\cos\alpha_\lambda{}'=\sin\theta\cos(P_xP_\lambda),$$

$$\cos\alpha_x{}'\cos\alpha_\lambda-\cos\alpha_x\cos\alpha_\lambda{}'=\sin\theta\sin(P_xP_\lambda).$$

Auf ähnliche Art ist:

$$2(\sin\alpha_x{}'\sin\alpha_\lambda-\sin\alpha_x\sin\alpha_\lambda{}')$$

$$=\cos(\alpha_x{}'-\alpha_\lambda)-\cos(\alpha_x{}'+\alpha_\lambda)-\cos(\alpha_x-\alpha_\lambda{}')+\cos(\alpha_x+\alpha_\lambda{}'),$$

also nach 7):

Digitized by Google

$$2(\sin\alpha_x'\sin\alpha\lambda-\sin\alpha_x\sin\alpha\lambda')$$
$$=\quad\cos(\alpha_x'-\alpha\lambda)-\cos(\alpha_x-\alpha\lambda')$$
$$=-2\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x'-\alpha\lambda)-(\alpha_x-\alpha\lambda')\}\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x'-\alpha\lambda)+(\alpha_x-\alpha\lambda')\}$$
$$=\quad 2\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x'-\alpha_x)+(\alpha\lambda'-\alpha\lambda)\}\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha\lambda-\alpha_x)+(\alpha\lambda'-\alpha_x')\};$$

$$2(\cos\alpha_x'\sin\alpha\lambda-\cos\alpha_x\sin\alpha\lambda')$$
$$=\sin(\alpha_x'+\alpha\lambda)-\sin(\alpha_x'-\alpha\lambda)-\sin(\alpha_x+\alpha\lambda')+\sin(\alpha_x-\alpha\lambda'),$$

also nach 7):

$$2(\cos\alpha_x'\sin\alpha\lambda-\cos\alpha_x\sin\alpha\lambda')$$
$$=\quad\sin(\alpha_x-\alpha\lambda')-\sin(\alpha_x'-\alpha\lambda)$$
$$=\quad 2\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x-\alpha\lambda')-(\alpha_x'-\alpha\lambda)\}\cos\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x-\alpha\lambda')+(\alpha_x'-\alpha\lambda)\}$$
$$=-2\sin\tfrac{1}{2}\{(\alpha_x'-\alpha_x)+(\alpha\lambda'-\alpha\lambda)\}\cos\tfrac{1}{2}\{(\alpha\lambda-\alpha_x)+(\alpha\lambda'-\alpha_x')\};$$

folglich nach 11) und 12):

$$\sin\alpha_x'\sin\alpha\lambda-\sin\alpha_x\sin\alpha\lambda'=\quad(-1)^{m+n}\sin\theta\sin(P_xP_\lambda),$$
$$\cos\alpha_x'\sin\alpha\lambda-\cos\alpha_x\sin\alpha\lambda'=-(-1)^{m+n}\sin\theta\cos(P_xP_\lambda);$$

also wie vorher:

15)

$$\sin\alpha_x'\sin\alpha\lambda-\sin\alpha_x\sin\alpha\lambda'=\quad\sin\theta\sin(P_xP_\lambda),$$
$$\cos\alpha_x'\sin\alpha\lambda-\cos\alpha_x\sin\alpha\lambda'=-\sin\theta\cos(P_xP_\lambda).$$

Aus der ersten der Gleichungen 7) folgt:

$$\sin\alpha_x'\cos\alpha\lambda+\cos\alpha_x'\sin\alpha\lambda=\sin\alpha_x\cos\alpha\lambda'+\cos\alpha_x\sin\alpha\lambda',$$

also:

$$\sin\alpha_x'\cos\alpha\lambda-\sin\alpha_x\cos\alpha\lambda'=-(\cos\alpha_x'\sin\alpha\lambda-\cos\alpha_x\sin\alpha\lambda');$$

und aus der zweiten der Gleichungen 7) folgt:

$$\cos\alpha_x'\cos\alpha\lambda-\sin\alpha_x'\sin\alpha\lambda=\cos\alpha_x\cos\alpha\lambda'-\sin\alpha_x\sin\alpha\lambda'),$$

also:

$$\cos\alpha_x'\cos\alpha\lambda-\cos\alpha_x\cos\alpha\lambda'=\sin\alpha_x'\sin\lambda-\sin\alpha_x\sin\alpha\lambda';$$

welche Resultate mit den aus 14) und 15) durch Gleichsetzung der betreffenden Werthe sich ergebenden Gleichungen übereinstimmen.

§. 2.

Wir wollen jetzt ein beliebiges System sämmtlich in **einer**

Digitized by Google

Ebene, die wir zugleich als Ebene der xy annehmen, an den durch die Coordinaten

$$x_0, y_0;\ x_1, y_1;\ x_2, y_2;\ x_3, y_3;\ x_4, y_4;\ \ldots.$$

bestimmten Punkten wirkender Kräfte

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots.$$

betrachten, und bezeichnen die von den positiven Theilen der Richtungslinien dieser Kräfte mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen Winkel, indem wir diese Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an nach dem positiven Theile der Axe der y hin oder durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch von 0 bis 360° zählen, beziehungsweise durch

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots.$$

Wir nehmen an, dass es für diese Kräfte eine nicht verschwindende Resultirende gebe, welches bekanntlich der Fall ist, wenn die Grössen L und M nicht zugleich verschwinden, oder, was dasselbe ist, wenn die Grösse L^2+M^2 nicht verschwindet. Weil bekanntlich:

1)

$$L = P_0\cos\alpha_0 + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots.,$$
$$M = P_0\sin\alpha_0 + P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + \ldots.$$

ist, so ist offenbar:

$$\begin{aligned}L^2+M^2=P_0^2&+P_1^2+P_2^2+P_3^2+P_4^2+\ldots.\\
&+2P_0P_1(\cos\alpha_0\cos\alpha_1+\sin\alpha_0\sin\alpha_1)\\
&+2P_0P_2(\cos\alpha_0\cos\alpha_2+\sin\alpha_0\sin\alpha_2)\\
&+2P_0P_3(\cos\alpha_0\cos\alpha_3+\sin\alpha_0\sin\alpha_3)\\
&+2P_0P_4(\cos\alpha_0\cos\alpha_4+\sin\alpha_0\sin\alpha_4)\\
&\qquad\text{u. s. w.}\\
&+2P_1P_2(\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\sin\alpha_1\sin\alpha_2)\\
&+2P_1P_3(\cos\alpha_1\cos\alpha_3+\sin\alpha_1\sin\alpha_3)\\
&+2P_1P_4(\cos\alpha_1\cos\alpha_4+\sin\alpha_1\sin\alpha_4)\\
&\qquad\text{u. s. w.}\\
&+2P_2P_3(\cos\alpha_2\cos\alpha_3+\sin\alpha_2\sin\alpha_3)\\
&+2P_2P_4(\cos\alpha_2\cos\alpha_4+\sin\alpha_2\sin\alpha_4)\\
&\qquad\text{u. s. w.}\\
&+2P_3P_4(\cos\alpha_3\cos\alpha_4+\sin\alpha_3\sin\alpha_4)\\
&\qquad\text{u. s. w.,}\\
&\qquad\text{u. s. w.}\end{aligned}$$

Digitized by Google

also nach einem bekannten Satze:

$$2) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad L^2 + M^2$$

$$= P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 + \ldots.$$

$$+ 2P_0P_1\cos(P_0P_1) + 2P_0P_2\cos(P_0P_2) + 2P_0P_3\cos(P_0P_3)$$
$$+ 2P_0P_4\cos(P_0P_4) + \ldots.$$

$$+ 2P_1P_2\cos(P_1P_2) + 2P_1P_3\cos(P_1P_3)$$
$$+ 2P_1P_4\cos(P_1P_4) + \ldots.$$

$$+ 2P_2P_3\cos(P_2P_3) + 2P_2P_4\cos(P_2P_4) + \ldots$$

$$+ 2P_3P_4\cos(P_3P_4) + \ldots.$$

u. s. w.

Von einem beliebigen Punkte, welchen wir übrigens auch in den Anfangspunkt der Coordinaten verlegen können, ziehen wir nun Gerade aus, welche mit den positiven Theilen der Richtungslinien der Kräfte.

$$P_0,\quad P_1,\quad P_2,\quad P_3,\quad P_4, \ldots.$$

gleich gerichtet sind, und lassen das System dieser Geraden — ohne ihre gegenseitige Lage irgend wie zu ändern — um ihren gemeinschaftlichen Ausgangspunkt in dem Sinne von dem positiven Theile der Axe der x an nach dem positiven Theile der Axe der y hin oder durch den Coordinatenwinkel (xy) hindurch eine Drehung um den Winkel θ vollbringen, worauf wir von den Punkten

$$(x_0y_0),\ (x_1y_1),\ (x_2y_2),\ (x_3y_3),\ (x_4y_4), \ldots.$$

aus mit den Geraden des gedrehten Systems, in seiner Lage nach vollbrachter Drehung, gleich gerichtete Gerade ausgehen lassen, welche wir nun als die positiven Theile der Richtungslinien der Kräfte

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4, \ldots.$$

betrachten, und dadurch ein neues System von Kräften erhalten, in welchem die Kräfte selbst und ihre Angriffspunkte ganz dieselben geblieben sind wie in dem ursprünglichen Systeme, nur die positiven Theile der Richtungslinien der Kräfte eine Aenderung in der angegebenen Weise erlitten haben.

Die beiden so eben betrachteten Systeme von Kräften wollen wir in der Ordnung, wie dieselben vorher betrachtet worden sind,

Digitized by Google

beziehungsweise das erste und das zweite System nennen, und werden alle auf das zweite System bezüglichen Grössen mit denselben Buchstaben wie die entsprechenden Grössen des ersten Systems, zur Unterscheidung jedoch mit oberen Accenten versehen, insofern überhaupt eine solche Unterscheidung nöthig ist, bezeichnen.

Weil nun mit Anwendung dieser Bezeichnung:

3)

$$L' = P_0 \cos\alpha_0' + P_1 \cos\alpha_1' + P_2 \cos\alpha_2' + P_3 \cos\alpha_3' + \ldots,$$

$$M' = P_0 \sin\alpha_0' + P_1 \sin\alpha_1' + P_2 \sin\alpha_2' + P_3 \sin\alpha_3' + \ldots$$

ist, so ist ganz wie vorher:

$$4) \ldots\ldots L'^2 + M'^2$$

$$= P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 + \ldots$$

$$+ 2P_0 P_1 \cos(P_0 P_1) + 2P_0 P_2 \cos(P_0 P_2) + 2P_0 P_3 \cos(P_0 P_3) + 2P_0 P_4 \cos(P_0 P_4) + \ldots$$

$$+ 2P_1 P_2 \cos(P_1 P_2) + 2P_1 P_3 \cos(P_1 P_3) + 2P_1 P_4 \cos(P_1 P_4) + \ldots$$

$$+ 2P_2 P_3 \cos(P_2 P_3) + 2P_2 P_4 \cos(P_2 P_4) + \ldots$$

$$+ 2P_3 P_4 \cos(P_3 P_4) + \ldots$$

u. s. w.

also nach 2):

$$L^2 + M^2 = L'^2 + M'^2,$$

und weil nun nach dem Obigen $L^2 + M^2$ nicht verschwindet, so verschwindet auch $L'^2 + M'^2$ nicht; so wie nach der Voraussetzung für das erste System, giebt es also auch für das zweite System eine nicht verschwindende Resultirende, wobei zugleich aus bekannten Formeln auf der Stelle erhellet, dass die Resultirenden der beiden Systeme einander gleich sind.

Die Gleichung der Richtungslinie der Resultirenden des ersten Systems ist bekanntlich:

$$5) \ldots\ldots\ldots N_1 - Mx + Ly = 0,$$

wo:

$$6) \ldots\ldots\ldots N_1 = \Sigma P(x \sin\alpha - y \cos\alpha)$$

ist; und eben so ist die Gleichung der Richtungslinie der Resultirenden des zweiten Systems:

7) . . . . $N_1' - M'x + L'y = 0,$

wo:

8) . . . . $N_1' = \Sigma P(x \sin\alpha' - y \cos\alpha')$

ist.

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Durchschnittspunkts der Richtungslinien der Resultirenden der beiden Systeme durch X, Y; so haben wir zu deren Bestimmung nach 5) und 7) die beiden Gleichungen:

9) . . . . $\begin{cases} N_1 - MX + LY = 0, \\ N_1' - M'X + L'Y = 0; \end{cases}$

also:

$$N_1 L' - ML'X + LL'Y = 0,$$
$$LN_1' - LM'X + LL'Y = 0$$

und:

$$N_1 M' - MM'X + LM'Y = 0,$$
$$MN_1' - MM'X + ML'Y = 0;$$

folglich durch Subtraction:

$$LN_1' - N_1 L' - (LM' - ML')X = 0,$$
$$MN_1' - N_1 M' - (LM' - ML')Y = 0;$$

folglich:

10) . . . . $X = \frac{LN_1' - N_1 L'}{LM' - ML'}, \quad Y = \frac{MN_1' - N_1 M'}{LM' - ML'};$

oder, wenn wir der Kürze wegen:

11) . . . . . . $\begin{cases} U = LM' - ML', \\ V = LN_1' - N_1 L', \\ W = MN_1' - N_1 M' \end{cases}$

setzen:

12) . . . . $X = \frac{V}{U}, \quad Y = \frac{W}{U};$

wo wir uns nun mit der weiteren Entwickelung der Grössen U, V, W beschäftigen wollen.

Wenn man in die Gleichung

Digitized by Google

$$U = LM' - ML'$$

für L, M und L', M' die Ausdrücke 1) und 3) einführt, so erhält man:

$$\begin{aligned}U = \quad & (P_0 \cos\alpha_0 + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + P_3 \cos\alpha_3 + \ldots.)\\ & \times (P_0 \sin\alpha_0' + P_1 \sin\alpha_1' + P_2 \sin\alpha_2' + P_3 \sin\alpha_3' + \ldots.)\\ - & (P_0 \sin\alpha_0 + P_1 \sin\alpha_1 + P_2 \sin\alpha_2 + P_3 \sin\alpha_3 + \ldots.)\\ & \times (P_0 \cos\alpha_0' + P_1 \cos\alpha_1' + P_2 \cos\alpha_2' + P_3 \cos\alpha_3' + \ldots.),\end{aligned}$$

also, wenn man die Producte entwickelt und nach den Kräften ordnet:

$$\begin{aligned}U = \quad & P_0^2(\cos\alpha_0 \sin\alpha_0' - \sin\alpha_0 \cos\alpha_0')\\ & + P_1^2(\cos\alpha_1 \sin\alpha_1' - \sin\alpha_1 \cos\alpha_1')\\ & + P_2^2(\cos\alpha_2 \sin\alpha_2' - \sin\alpha_2 \cos\alpha_2')\\ & + P_3^2(\cos\alpha_3 \sin\alpha_3' - \sin\alpha_3 \cos\alpha_3')\\ & \qquad \text{u. s. w.}\\ & + P_0P_1\left\{\begin{array}{l}(\cos\alpha_0 \sin\alpha_1' - \sin\alpha_0 \cos\alpha_1')\\ + (\cos\alpha_1 \sin\alpha_0' - \sin\alpha_1 \cos\alpha_0')\end{array}\right\}\\ & + P_0P_2\left\{\begin{array}{l}(\cos\alpha_0 \sin\alpha_2' - \sin\alpha_0 \cos\alpha_2')\\ + (\cos\alpha_2 \sin\alpha_0' - \sin\alpha_2 \cos\alpha_0')\end{array}\right\}\\ & + P_0P_3\left\{\begin{array}{l}(\cos\alpha_0 \sin\alpha_3' - \sin\alpha_0 \cos\alpha_3')\\ + (\cos\alpha_3 \sin\alpha_0' - \sin\alpha_3 \cos\alpha_0')\end{array}\right\}\\ & \qquad \text{u. s. w.}\\ & + P_1P_2\left\{\begin{array}{l}(\cos\alpha_1 \sin\alpha_2' - \sin\alpha_1 \cos\alpha_2')\\ + (\cos\alpha_2 \sin\alpha_1' - \sin\alpha_2 \cos\alpha_1')\end{array}\right\}\\ & + P_1P_3\left\{\begin{array}{l}(\cos\alpha_1 \sin\alpha_3' - \sin\alpha_1 \cos\alpha_3')\\ + (\cos\alpha_3 \sin\alpha_1' - \sin\alpha_3 \cos\alpha_1')\end{array}\right\}\\ & \qquad \text{u. s. w.}\\ & + P_2P_3\left\{\begin{array}{l}(\cos\alpha_2 \sin\alpha_3' - \sin\alpha_2 \cos\alpha_3')\\ + (\cos\alpha_3 \sin\alpha_2' - \sin\alpha_3 \cos\alpha_2')\end{array}\right\}\\ & \qquad \text{u. s. w.}\\ & \qquad \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

also:

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
U = \quad & P_0^2 \sin(\alpha_0' - \alpha_0) \\
& + P_1^2 \sin(\alpha_1' - \alpha_1) \\
& + P_2^2 \sin(\alpha_2' - \alpha_2) \\
& + P_3^2 \sin(\alpha_3' - \alpha_3) \\
& \qquad \text{u. s. w.} \\
& + P_0 P_1 \{\sin(\alpha_1' - \alpha_0) + \sin(\alpha_0' - \alpha_1)\} \\
& + P_0 P_2 \{\sin(\alpha_2' - \alpha_0) + \sin(\alpha_0' - \alpha_2)\} \\
& + P_0 P_3 \{\sin(\alpha_3' - \alpha_0) + \sin(\alpha_0' - \alpha_3)\} \\
& \qquad \qquad \text{u. s. w.} \\
& + P_1 P_2 \{\sin(\alpha_2' - \alpha_1) + \sin(\alpha_1' - \alpha_2)\} \\
& + P_1 P_3 \{\sin(\alpha_3' - \alpha_1) + \sin(\alpha_1' - \alpha_3)\} \\
& \qquad \qquad \text{u. s. w.} \\
& + P_2 P_3 \{\sin(\alpha_3' - \alpha_2) + \sin(\alpha_2' - \alpha_3)\} \\
& \qquad \qquad \text{u. s. w.} \\
& \qquad \qquad \text{u. s. w.}
\end{aligned}
$$

Zwei allgemeine Glieder dieses Ausdrucks sind;

$$P_x^2 \sin(\alpha_x' - \alpha_x)$$

und:

$$P_x P_\lambda \{\sin(\alpha_\lambda' - \alpha_x) + \sin(\alpha_x' - \alpha_\lambda)\}$$

oder:

$$P_x P_\lambda \{\sin(\alpha_x' - \alpha_\lambda) + \sin(\alpha_\lambda' - \alpha_x)\};$$

und weil nun nach §. 1. 6):

$$\sin(\alpha_x' - \alpha_x) = \sin\theta,$$

und nach §. 1. 13):

$$\sin(\alpha_x' - \alpha_\lambda) + \sin(\alpha_\lambda' - \alpha_x) = 2\sin\theta\cos(P_x P_\lambda)$$

ist, so sind die beiden in Rede stehenden allgemeinen Glieder:

$$P_x^2 \sin\theta$$

und

$$2P_x P_\lambda \sin\theta\cos(P_x P_\lambda).$$

Führt man jetzt die diesen allgemeinen Gliedern entsprechenden Ausdrücke in den obigen Ausdruck von U ein, so ergiebt sich:

13) . . . . $U\sin\theta^{-1}$

$$= P_0^2 + P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2 + \ldots.$$
$$+ 2P_0P_1\cos(P_0P_1) + 2P_0P_2\cos(P_0P_2) + 2P_0P_3\cos(P_0P_3) + 2P_0P_4\cos(P_0P_4) + \ldots.$$
$$+ 2P_1P_2\cos(P_1P_2) + 2P_1P_3\cos(P_1P_3) + 2P_1P_4\cos(P_1P_4) + \ldots.$$
$$+ 2P_2P_3\cos(P_2P_3) + 2P_2P_4\cos(P_2P_4) + \ldots$$
$$+ 2P_3P_4\cos(P_3P_4) + \ldots.$$

u. s. w.

Ferner ist:

$$V = (P_0\cos\alpha_0 + P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + P_3\cos\alpha_3 + \ldots.)$$
$$\times\{P_0(x_0\sin\alpha_0' - y_0\cos\alpha_0') + P_1(x_1\sin\alpha_1' - y_1\cos\alpha_1') + P_2(x_2\sin\alpha_2' - y_2\cos\alpha_2') + \ldots.\}$$
$$-(P_0\cos\alpha_0' + P_1\cos\alpha_1' + P_2\cos\alpha_2' + P_3\cos\alpha_3' + \ldots.)$$
$$\times\{P_0(x_0\sin\alpha_0 - y_0\cos\alpha_0) + P_1(x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1) + P_2(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2) + \ldots.\},$$

also, wenn man die Producte entwickelt und wieder nach den Kräften gehörig ordnet:

$$V =$$
$$P_0^2\{\cos\alpha_0(x_0\sin\alpha_0' - y_0\cos\alpha_0') - \cos\alpha_0'(x_0\sin\alpha_0 - y_0\cos\alpha_0)\}$$
$$+ P_1^2\{\cos\alpha_1(x_1\sin\alpha_1' - y_1\cos\alpha_1') - \cos\alpha_1'(x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1)\}$$
$$+ P_2^2\{\cos\alpha_2(x_2\sin\alpha_2' - y_2\cos\alpha_2') - \cos\alpha_2'(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2)\}$$
$$+ P_3^2\{\cos\alpha_3(x_3\sin\alpha_3' - y_3\cos\alpha_3') - \cos\alpha_3'(x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3)\}$$

u. s. w.

$$+ P_0P_1\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha_0(x_1\sin\alpha_1' - y_1\cos\alpha_1') - \cos\alpha_0'(x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1)\\ + \cos\alpha_1(x_0\sin\alpha_0' - y_0\cos\alpha_0') - \cos\alpha_1'(x_0\sin\alpha_0 - y_0\cos\alpha_0)\end{array}\right\}$$
$$+ P_0P_2\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha_0(x_2\sin\alpha_2' - y_2\cos\alpha_2') - \cos\alpha_0'(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2)\\ + \cos\alpha_2(x_0\sin\alpha_0' - y_0\cos\alpha_0') - \cos\alpha_2'(x_0\sin\alpha_0 - y_0\cos\alpha_0)\end{array}\right\}$$
$$+ P_0P_3\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha_0(x_3\sin\alpha_3' - y_3\cos\alpha_3') - \cos\alpha_0'(x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3)\\ + \cos\alpha_3(x_0\sin\alpha_0' - y_0\cos\alpha_0') - \cos\alpha_3'(x_0\sin\alpha_0 - y_0\cos\alpha_0)\end{array}\right\}$$

u. s. w.

Digitized by Google

$$+ P_1 P_2 \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha_1 (x_2 \sin\alpha_2' - y_2 \cos\alpha_2') - \cos\alpha_1' (x_2 \sin\alpha_2 - y_2 \cos\alpha_2) \\ + \cos\alpha_2 (x_1 \sin\alpha_1' - y_1 \cos\alpha_1') - \cos\alpha_2' (x_1 \sin\alpha_1 - y_1 \cos\alpha_1) \end{array} \right\}$$

$$+ P_1 P_3 \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha_1 (x_3 \sin\alpha_3' - y_3 \cos\alpha_3') - \cos\alpha_1' (x_3 \sin\alpha_3 - y_3 \cos\alpha_3) \\ + \cos\alpha_3 (x_1 \sin\alpha_1' - y_1 \cos\alpha_1') - \cos\alpha_3' (x_1 \sin\alpha_1 - y_1 \cos\alpha_1) \end{array} \right\}$$

u. s. w.

$$+ P_2 P_3 \left\{ \begin{array}{l} \cos\alpha_2 (x_3 \sin\alpha_3' - y_3 \cos\alpha_3') - \cos\alpha_2' (x_3 \sin\alpha_3 - y_3 \cos\alpha_3) \\ + \cos\alpha_3 (x_2 \sin\alpha_2' - y_2 \cos\alpha_2') - \cos\alpha_3' (x_2 \sin\alpha_2 - y_2 \cos\alpha_2) \end{array} \right\}$$

u. s. w.

u. s. w.

Betrachten wir nun wieder zwei allgemeine Glieder, so ist zuerst:

$$\cos\alpha_\varkappa (x_\varkappa \sin\alpha_\varkappa' - y_\varkappa \cos\alpha_\varkappa') - \cos\alpha_\varkappa' (x_\varkappa \sin\alpha_\varkappa - y_\varkappa \cos\alpha_\varkappa)$$
$$= x_\varkappa (\cos\alpha_\varkappa \sin\alpha_\varkappa' - \cos\alpha_\varkappa' \sin\alpha_\varkappa) = x_\varkappa \sin(\alpha_\varkappa' - \alpha_\varkappa),$$

also nach §. 1. 6):

$$\cos\alpha_\varkappa (x_\varkappa \sin\alpha_\varkappa' - y_\varkappa \cos\alpha_\varkappa') - \cos\alpha_\varkappa' (x_\varkappa \sin\alpha_\varkappa - y_\varkappa \cos\alpha_\varkappa) = x_\varkappa \sin\theta.$$

Ferner ist:

$$\cos\alpha_\varkappa (x_\lambda \sin\alpha_\lambda' - y_\lambda \cos\alpha_\lambda') - \cos\alpha_\varkappa' (x_\lambda \sin\alpha_\lambda - y_\lambda \cos\alpha_\lambda)$$
$$+ \cos\alpha_\lambda (x_\varkappa \sin\alpha_\varkappa' - y_\varkappa \cos\alpha_\varkappa') - \cos\alpha_\lambda' (x_\varkappa \sin\alpha_\varkappa - y_\varkappa \cos\alpha_\varkappa)$$
$$= x_\varkappa (\sin\alpha_\varkappa' \cos\alpha_\lambda - \sin\alpha_\varkappa \cos\alpha_\lambda') - y_\varkappa (\cos\alpha_\varkappa' \cos\alpha_\lambda - \cos\alpha_\varkappa \cos\alpha_\lambda')$$
$$- x_\lambda (\cos\alpha_\varkappa' \sin\alpha_\lambda - \cos\alpha_\varkappa \sin\alpha_\lambda') + y_\lambda (\cos\alpha_\varkappa' \cos\alpha_\lambda - \cos\alpha_\varkappa \cos\alpha_\lambda'),$$

also nach §. 1. 14), 15):

$$\cos\alpha_\varkappa (x_\lambda \sin\alpha_\lambda' - y_\lambda \cos\alpha_\lambda') - \cos\alpha_\varkappa' (x_\lambda \sin\alpha_\lambda - y_\lambda \cos\alpha_\lambda)$$
$$+ \cos\alpha_\lambda (x_\varkappa \sin\alpha_\varkappa' - y_\varkappa \cos\alpha_\varkappa') - \cos\alpha_\lambda' (x_\varkappa \sin\alpha_\varkappa - y_\varkappa \cos\alpha_\varkappa)$$
$$= \{(x_\varkappa + x_\lambda) \cos(P_\varkappa P_\lambda) - (y_\varkappa - y_\lambda) \sin(P_\varkappa P_\lambda)\} \sin\theta.$$

Folglich ist:

$$14) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots V \sin\theta^{-1}$$
$$= P_0^2 x_0 + P_1^2 x_1 + P_2^2 x_2 + P_3^2 x_3 + P_4^2 x_4 + \ldots.$$
$$+ P_0 P_1 \{(x_0 + x_1) \cos(P_0 P_1) - (y_0 - y_1) \sin(P_0 P_1)\}$$
$$+ P_0 P_2 \{(x_0 + x_2) \cos(P_0 P_2) - (y_0 - y_2) \sin(P_0 P_2)\}$$
$$+ P_0 P_3 \{(x_0 + x_3) \cos(P_0 P_3) - (y_0 - y_3) \sin(P_0 P_3)\}$$
$$+ P_0 P_4 \{(x_0 + x_4) \cos(P_0 P_4) - (y_0 - y_4) \sin(P_0 P_4)\}$$

u. s. w.

$$+ P_1 P_2 \{(x_1 + x_2)\cos(P_1 P_2) - (y_1 - y_2)\sin(P_1 P_2)\}$$
$$+ P_1 P_3 \{(x_1 + x_3)\cos(P_1 P_3) - (y_1 - y_3)\sin(P_1 P_3)\}$$
$$+ P_1 P_4 \{(x_1 + x_4)\cos(P_1 P_4) - (y_1 - y_4)\sin(P_1 P_4)\}$$
u. s. w.
$$+ P_2 P_3 \{(x_2 + x_3)\cos(P_2 P_3) - (y_2 - y_3)\sin(P_2 P_3)\}$$
$$+ P_2 P_4 \{(x_2 + x_4)\cos(P_2 P_4) - (y_2 - y_4)\sin(P_2 P_4)\}$$
u. s. w.
$$+ P_3 P_4 \{(x_3 + x_4)\cos(P_3 P_4) - (y_3 - y_4)\sin(P_3 P_4)\}$$
u. s. w.
u. s. w.

Endlich ist:

$$\begin{aligned} W = \; & (P_0\sin\alpha_0 + P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + P_3\sin\alpha_3 + \ldots.) \\ & \times \left\{ \begin{array}{l} P_0(x_0\sin\alpha_0' - y_0\cos\alpha_0') + P_1(x_1\sin\alpha_1' - y_1\cos\alpha_1') \\ \qquad + P_2(x_2\sin\alpha_2' - y_2\cos\alpha_2') + \ldots. \end{array} \right\} \\ & - (P_0\sin\alpha_0' + P_1\sin\alpha_1' + P_2\sin\alpha_2' + P_3\sin\alpha_3' + \ldots.) \\ & \times \left\{ \begin{array}{l} P_0(x_0\sin\alpha_0 - y_0\cos\alpha_0) + P_1(x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1) \\ \qquad + P_2(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2) + \ldots. \end{array} \right\}, \end{aligned}$$

also, wenn man die Producte entwickelt, und in ganz ähnlicher Weise wie vorher auch jetzt wieder nach den Kräften gehörig ordnet:

$$W =$$
$$P_0^2 \{\sin\alpha_0(x_0\sin\alpha_0' - y_0\cos\alpha_0') - \sin\alpha_0'(x_0\sin\alpha_0 - y_0\cos\alpha_0)\}$$
$$+ P_1^2 \{\sin\alpha_1(x_1\sin\alpha_1' - y_1\cos\alpha_1') - \sin\alpha_1'(x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1)\}$$
$$+ P_2^2 \{\sin\alpha_2(x_2\sin\alpha_2' - y_2\cos\alpha_2') - \sin\alpha_2'(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2)\}$$
$$+ P_3^2 \{\sin\alpha_3(x_3\sin\alpha_3' - y_3\cos\alpha_3') - \sin\alpha_3'(x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3)\}$$
u. s. w.
$$+ P_0 P_1 \left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha_0(x_1\sin\alpha_1' - y_1\cos\alpha_1') - \sin\alpha_0'(x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1) \\ + \sin\alpha_1(x_0\sin\alpha_0' - y_0\cos\alpha_0') - \sin\alpha_1'(x_0\sin\alpha_0 - y_0\cos\alpha_0) \end{array} \right\}$$
$$+ P_0 P_2 \left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha_0(x_2\sin\alpha_2' - y_2\cos\alpha_2') - \sin\alpha_0'(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2) \\ + \sin\alpha_2(x_0\sin\alpha_0' - y_0\cos\alpha_0') - \sin\alpha_2'(x_0\sin\alpha_0 - y_0\cos\alpha_0) \end{array} \right\}$$
$$+ P_0 P_3 \left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha_0(x_3\sin\alpha_3' - y_3\cos\alpha_3') - \sin\alpha_0'(x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3) \\ + \sin\alpha_3(x_0\sin\alpha_0' - y_0\cos\alpha_0') - \sin\alpha_3'(x_0\sin\alpha_0 - y_0\cos\alpha_0) \end{array} \right\}$$
u. s. w.
$$+ P_1 P_2 \left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha_1(x_2\sin\alpha_2' - y_2\cos\alpha_2') - \sin\alpha_1'(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2) \\ + \sin\alpha_2(x_1\sin\alpha_1' - y_1\cos\alpha_1') - \sin\alpha_2'(x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1) \end{array} \right\}$$
$$+ P_1 P_3 \left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha_1(x_3\sin\alpha_3' - y_3\cos\alpha_3') - \sin\alpha_1'(x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3) \\ + \sin\alpha_3(x_1\sin\alpha_1' - y_1\cos\alpha_1') - \sin\alpha_3'(x_1\sin\alpha_1 - y_1\cos\alpha_1) \end{array} \right\}$$
u. s. w.
$$+ P_2 P_3 \left\{ \begin{array}{l} \sin\alpha_2(x_3\sin\alpha_3' - y_3\cos\alpha_3') - \sin\alpha_2'(x_3\sin\alpha_3 - y_3\cos\alpha_3) \\ + \sin\alpha_3(x_2\sin\alpha_2' - y_2\cos\alpha_2') - \sin\alpha_3'(x_2\sin\alpha_2 - y_2\cos\alpha_2) \end{array} \right\}$$
u. s. w.
u. s. w.

Digitized by Google

Indem wir auch jetzt wieder zwei allgemeine Glieder betrachten, so ist zuerst:

$$\sin\alpha_x(x_x\sin\alpha_x'-y_x\cos\alpha_x')-\sin\alpha_x'(x_x\sin\alpha_x-y_x\cos\alpha_x)$$
$$=y_x(\cos\alpha_x\sin\alpha_x'-\cos\alpha_x'\sin\alpha_x)=y_x\sin(\alpha_x'-\alpha_x),$$

also nach §. 1. 6):

$$\sin\alpha_x(x_x\sin\alpha_x'-y_x\cos\alpha_x')-\sin\alpha_x'(x_x\sin\alpha_x-y_x\cos\alpha_x)=y_x\sin\theta.$$

Ferner ist:

$$\sin\alpha_x(x_\lambda\sin\alpha_\lambda'-y_\lambda\cos\alpha_\lambda')-\sin\alpha_x'(x_\lambda\sin\alpha_\lambda-y_\lambda\cos\alpha_\lambda)$$
$$+\sin\alpha_\lambda(x_x\sin\alpha_x'-y_x\cos\alpha_x')-\sin\alpha_\lambda'(x_x\sin\alpha_x-y_x\cos\alpha_x)$$
$$=\quad x_x(\sin\alpha_x'\sin\alpha_\lambda-\sin\alpha_x\sin\alpha_\lambda')-y_x(\cos\alpha_x'\sin\alpha_\lambda-\cos\alpha_x\sin\alpha_\lambda')$$
$$-x_\lambda(\sin\alpha_x'\sin\alpha_\lambda-\sin\alpha_x\sin\alpha_\lambda')+y_\lambda(\sin\alpha_x'\cos\alpha_\lambda-\sin\alpha_x\cos\alpha_\lambda'),$$

also nach §. 1. 14), 15):

$$\sin\alpha_x(x_\lambda\sin\alpha_\lambda'-y_\lambda\cos\alpha_\lambda')-\sin\alpha_x'(x_\lambda\sin\alpha_\lambda-y_\lambda\cos\alpha_\lambda)$$
$$+\sin\alpha_\lambda(x_x\sin\alpha_x'-y_x\cos\alpha_x')-\sin\alpha_\lambda'(x_x\sin\alpha_x-y_x\cos\alpha_x)$$
$$=\{(x_x-x_\lambda)\sin(P_xP_\lambda)+(y_x+y_\lambda)\cos(P_xP_\lambda)\}\sin\theta.$$

Folglich ist:

15) . . . . $W\sin\theta^{-1}$

$$= \quad P_0^2y_0+P_1^2y_1+P_2^2y_2+P_3^2y_3+P_4^2y_4+\ldots$$
$$+P_0P_1\{(x_0-x_1)\sin(P_0P_1)+(y_0+y_1)\cos(P_0P_1)\}$$
$$+P_0P_2\{(x_0-x_2)\sin(P_0P_2)+(y_0+y_2)\cos(P_0P_2)\}$$
$$+P_0P_3\{(x_0-x_3)\sin(P_0P_3)+(y_0+y_3)\cos(P_0P_3)\}$$
$$+P_0P_4\{(x_0-x_4)\sin(P_0P_4)+(y_0+y_4)\cos(P_0P_4)\}$$

u. s. w.

$$+P_1P_2\{(x_1-x_2)\sin(P_1P_2)+(y_1+y_2)\cos(P_1P_2)\}$$
$$+P_1P_3\{(x_1-x_3)\sin(P_1P_3)+(y_1+y_3)\cos(P_1P_3)\}$$
$$+P_1P_4\{(x_1-x_4)\sin(P_1P_4)+(y_1+y_4)\cos(P_1P_4)\}$$

u. s. w.

$$+P_2P_3\{(x_2-x_3)\sin(P_2P_3)+(y_2+y_3)\cos(P_2P_3)\}$$
$$+P_2P_4\{(x_2-x_4)\sin(P_2P_4)+(y_2+y_4)\cos(P_2P_4)\}$$

u. s. w.

$$+P_3P_4\{(x_3-x_4)\sin(P_3P_4)+(y_3+y_4)\cos(P_3P_4)\}$$

u. s. w.

u. s. w.

Digitized by Google

Setzen wir

16) . . . . U'

$$= P_0^2+P_1^2+P_2^2+P_3^2+P_4^2+\ldots.$$

$$+2P_0P_1\cos(P_0P_1)+2P_0P_2\cos(P_0P_2)+2P_0P_3\cos(P_0P_3)$$
$$+2P_0P_4\cos(P_0P_4)+\ldots.$$
$$+2P_1P_2\cos(P_1P_2)+2P_1P_3\cos(P_1P_3)$$
$$+2P_1P_4\cos(P_1P_4)+\ldots.$$
$$+2P_2P_3\cos(P_2P_3)+2P_2P_4\cos(P_2P_4)+\ldots.$$
$$+2P_3P_4\cos(P_3P_4)+\ldots.$$

u. s. w.

17) . . . . V'

$$= P_0^2x_0+P_1^2x_1+P_2^2x_2+P_3^2x_3+P_4^2x_4+\ldots.$$
$$+P_0P_1\{(x_0+x_1)\cos(P_0P_1)-(y_0-y_1)\sin(P_0P_1)\}$$
$$+P_0P_2\{(x_0+x_2)\cos(P_0P_2)-(y_0-y_2)\sin(P_0P_2)\}$$
$$+P_0P_3\{(x_0+x_3)\cos(P_0P_3)-(y_0-y_3)\sin(P_0P_3)\}$$
$$+P_0P_4\{(x_0+x_4)\cos(P_0P_4)-(y_0-y_4)\sin(P_0P_4)\}$$

u. s. w.

$$+P_1P_2\{(x_1+x_2)\cos(P_1P_2)-(y_1-y_2)\sin(P_1P_2)\}$$
$$+P_1P_3\{(x_1+x_3)\cos(P_1P_3)-(y_1-y_3)\sin(P_1P_3)\}$$
$$+P_1P_4\{(x_1+x_4)\cos(P_1P_4)-(y_1-y_4)\sin(P_1P_4)\}$$

u. s. w.

$$+P_2P_3\{(x_2+x_3)\cos(P_2P_3)-(y_2-y_3)\sin(P_2P_3)\}$$
$$+P_2P_4\{(x_2+x_4)\cos(P_2P_4)-(y_2-y_4)\sin(P_2P_4)\}$$

u. s. w.

$$+P_3P_4\{(x_3+x_4)\cos(P_3P_4)-(y_3-y_4)\sin(P_3P_4)\}$$

u. s. w.

u. s. w.

18) . . . . W'

$$= P_0^2y_0+P_1^2y_1+P_2^2y_2+P_3^2y_3+P_4^2y_4+\ldots.$$
$$+P_0P_1\{(x_0-x_1)\sin(P_0P_1)+(y_0+y_1)\cos(P_0P_1)\}$$
$$+P_0P_2\{(x_0-x_2)\sin(P_0P_2)+(y_0+y_2)\cos(P_0P_2)\}$$
$$+P_0P_3\{(x_0-x_3)\sin(P_0P_3)+(y_0+y_3)\cos(P_0P_3)\}$$
$$+P_0P_4\{(x_0-x_4)\sin(P_0P_4)+(y_0+y_4)\cos(P_0P_4)\}$$

u. s. w.

Digitized by Google

$$+P_1P_2\{(x_1-x_2)\sin(P_1P_2)+(y_1+y_2)\cos(P_1P_2)\}$$
$$+P_1P_3\{(x_1-x_3)\sin(P_1P_3)+(y_1+y_3)\cos(P_1P_3)\}$$
$$+P_1P_4\{(x_1-x_4)\sin(P_1P_4)+(y_1+y_4)\cos(P_1P_4)\}$$

u. s. w.

$$+P_2P_3\{(x_2-x_3)\sin(P_2P_3)+(y_2+y_3)\cos(P_2P_3)\}$$
$$+P_2P_4\{(x_2-x_4)\sin(P_2P_4)+(y_2+y_4)\cos(P_2P_4)\}$$

u. s. w.

$$+P_3P_4\{(x_3-x_4)\sin(P_3P_4)+(y_3+y_4)\cos(P_3P_4)\}$$

u. s. w.

u. s. w.

so ist nach dem Obigen (§. 2.12)), wie sogleich in die Augen fällt:

19) . . . . $X=\frac{V'}{U'},\quad Y=\frac{W'}{U'}.$

Wenn die Kräfte sämmtlich unter einander parallel sind und die positiven Theile ihrer Richtungslinien sämmtlich nach derselben Seite hin genommen werden, so sind die Cosinus

$$\cos(P_0P_1),\ \cos(P_0P_2),\ \cos(P_0P_3),\ldots.;\ \cos(P_1P_2),\ \cos(P_1P_3),\ldots.;$$
$$\cos(P_2P_3),\ldots.;\ \ldots.$$

sämmtlich der Einheit gleich, und die Sinus

$$\sin(P_0P_1),\ \sin(P_0P_2),\ \sin(P_0P_3);\ldots.;\ \sin(P_1P_2),\ \sin(P_1P_3),\ldots.;$$
$$\sin(P_2P_3),\ldots.;\ \ldots.$$

verschwinden sämmtlich; also ist in diesem Falle:

$$\begin{aligned}U' = {} & P_0^2+P_1^2+P_2^2+P_3^2+P_4^2+\ldots.\\ & +2P_0P_1+2P_0P_2+2P_0P_3+2P_0P_4+\ldots.\\ & +2P_1P_2+2P_1P_3+2P_1P_4+\ldots.\\ & +2P_2P_3+2P_2P_4+\ldots.\\ & +2P_3P_4+\ldots.\\ & \text{u. s. w.}\\ = {} & (P_0+P_1+P_2+P_3+P_4+\ldots.)^2=(\Sigma P)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V' = {} & P_0^2x_0+P_1^2x_1+P_2^2x_2+P_3^2x_3+P_4^2x_4+\ldots.\\ & +P_0P_1(x_0+x_1)+P_0P_2(x_0+x_2)+P_0P_3(x_0+x_3)+\ldots.\\ & +P_1P_2(x_1+x_2)+P_1P_3(x_1+x_3)+\ldots.\\ & +P_2P_3(x_2+x_3)+\ldots.\\ & \text{u. s. w.}\\ = {} & (P_0+P_1+P_2+P_3+P_4+\ldots.)\\ & \times(P_0x_0+P_1x_1+P_2x_2+P_3x_3+\ldots.)\\ = {} & \Sigma P.\Sigma Px,\end{aligned}$$

$$W' = P_0^2 y_0 + P_1^2 y_1 + P_2^2 y_2 + P_3^2 y_3 + P_4^2 y_4 + \ldots\ldots$$
$$+ P_0 P_1 (y_0 + y_1) + P_0 P_2 (y_0 + y_2) + P_0 P_3 (y_0 + y_3) + \ldots\ldots$$
$$+ P_1 P_2 (y_1 + y_2) + P_1 P_3 (y_1 + y_3) + \ldots\ldots$$
$$+ P_2 P_3 (y_2 + y_3) + \ldots\ldots$$
u. s. w.
$$= (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + \ldots\ldots)$$
$$\times (P_0 y_0 + P_1 y_1 + P_2 y_2 + P_3 y_3 + \ldots\ldots)$$
$$= \Sigma P . \Sigma P y;$$

also nach 19) in diesem Falle:

$$20) \ldots\ldots\ldots \quad X = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad Y = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P};$$

was längst bekannt ist.

Weil die Grössen U', V', W' nach 16), 17), 18), und demzufolge nach 19) auch die Coordinaten X, Y, von den Winkeln

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots\ldots$$

und von dem Winkel θ ganz unabhängig sind, indem dieselben nur von den Kräften

$$P_0, P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots\ldots$$

und der durch die Winkel

$$(P_0 P_1), (P_0 P_2), (P_0 P_3), \ldots\ldots; (P_1 P_2), (P_1 P_3), \ldots\ldots; (P_2 P_3), \ldots\ldots; \ldots$$

bestimmten gegenseitigen Lage der Richtungen derselben abhängen; so ist klar, dass bei allen Lagen, in welche das System durch Drehung in der aus dem Obigen bekannten Weise gebracht werden kann, die Richtungslinie der Resultirenden des Systems immer durch den Punkt (XY) geht, und dass man also diesen Punkt ganz mit demselben Rechte und in demselben Sinne, wie man von einem Mittelpunkte oder einem Centrum paralleler Kräfte zu sprechen pflegt, mit dem Namen:

Mittelpunkt oder Centrum auf beliebige Weise sämmtlich in einer und derselben Ebene wirkender Kräfte

belegen kann, wie in der Theorie paralleler Kräfte natürlich auch hier unter der Voraussetzung, dass sich die Kräfte auf eine Resultirende zurückführen lassen.

Von ausführlicheren literarischen Nachweisungen, namentlich

auch über die bekannten Arbeiten deutscher Mathematiker über diesen oder verwandte Gegenstände, nehme ich für jetzt Abstand, da ich auf diesen und ähnliche Gegenstände später aus allgemeineren Gesichtspunkten zurückzukommen hoffe; aus besonderen Gründen will ich jedoch anzuführen nicht unterlassen, dass, nach einer Notiz des Herrn Francesco de Filippi in den „Annali di scienze matematiche e fisiche, compilati da Barnaba Tortolini. Tomo II. Roma 1851. 8°. p. 97.“ mit dem besonderen Falle in einer und derselben Ebene wirkender Kräfte sich auch der berühmte Bordoni schon im Jahre 1818 beschäftigt hat, in einer Abhandlung, die unter dem Titel: „Nuovi Teoremi di Meccanica elementare“ sich in dem „Giornale di Fisica ec. pubblicato in Pavia dai Proff. Brugnatelli e Configliachi. Anno 1818.“ findet, welche ich mir aber bis jetzt nicht habe verschaffen können.

§. 3.

Im Vorhergehenden ist der Winkel $(P_x P_\lambda)$ überall von dem positiven Theile der Richtungslinie der Kraft P_x an im Sinne der Statt gehabten Drehung des Systems nach dem positiven Theile der Richtungslinie der Kraft P_λ hin von 0 bis 360° gezählt worden. Man kann aber, ohne die Richtigkeit der obigen Formeln im Geringsten zu stören und zu beeinträchtigen, unter $(P_x P_\lambda)$ auch den von den positiven Theilen der Richtungslinien der Kräfte P_x und P_λ eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel verstehen, wenn man nur diesen Winkel als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem man sich, um durch diesen 180° nicht übersteigenden Winkel hindurch von dem positiven Theile der Richtungslinie der Kraft P_x zu dem positiven Theile der Richtungslinie der Kraft P_λ zu gelangen, im Sinne der Drehung des Systems oder im entgegengesetzten Sinne bewegen muss, wie sehr leicht auf folgende Art erhellet, wobei wir die von 0 bis 360° gezählten Winkel wie früher durch $(P_x P_\lambda)$, die nur von 0 bis 180° gezählten und positiv oder negativ genommenen Winkel durch $(P_x P_\lambda)'$ bezeichnen wollen. Wenn $(P_x P_\lambda)'$ positiv ist, so ist offenbar:

$$(P_x P_\lambda) = (P_x P_\lambda)',$$

also:

$$\cos(P_x P_\lambda) = \cos(P_x P_\lambda)', \quad \sin(P_x P_\lambda) = \sin(P_x P_\lambda)';$$

wenn $(P_x P_\lambda)'$ negativ ist, so ist offenbar:

$$(P_x P_\lambda) = 360^\circ - \{-(P_x P_\lambda)'\} = 360^\circ + (P_x P_\lambda)',$$

also wieder:

$$\cos(P_x P_\lambda) = \cos(P_x P_\lambda)', \quad \sin(P_x P_\lambda) = \sin(P_x P_\lambda)';$$

daher ist allgemein:

$$\cos(P_x P_\lambda) = \cos(P_x P_\lambda)', \quad \sin(P_x P_\lambda) = \sin(P_x P_\lambda)';$$

und man kann folglich in allen obigen Formeln, ohne deren Richtigkeit im Geringsten zu stören, $(P_x P_\lambda)'$ für $(P_x P_\lambda)$ setzen, oder alle durch $(P_x P_\lambda)$ bezeichneten Winkel bloss von 0 bis 180° zählen, wenn man dieselben nur nach der oben gegebenen Bestimmung gehörig positiv und negativ nimmt.

Anmerkung.

Es lag mir daran, die Richtigkeit der von mir entwickelten Ausdrücke für die Coordinaten X, Y des Mittelpunkts der Kräfte in einfacher Weise praktisch zu prüfen. Deshalb entwarf ich auf Taf. VI. eine möglichst genaue Zeichnung für nur zwei einander gleiche und auf einander senkrecht stehende Kräfte P_0 und P_1. In dieser leicht durch sich selbst verständlichen Zeichnung sind A_0 und A_1 die Angriffspunkte der Kräfte P_0 und P_1, also:

$$A_0 = (x_0 y_0), \quad A_1 = (x_1 y_1);$$

die Richtungen der Kräfte P_0 und P_1 sind in den drei angenommenen verschiedenen Lagen des Systems durch die von A_0 und A_1 ausgehenden, mit Pfeilspitzen versehenen Geraden dargestellt, und durch einfache Construction hat sich als Mittelpunkt der Kräfte der Punkt M ergeben. Es ist also:

$$x_0 = +OB_0, \quad y_0 = +A_0 B_0;$$

$$x_1 = +OB_1, \quad y_1 = -A_1 B_1;$$

und:

$$X = +ON, \quad Y = +MN.$$

Ferner ist in diesem Falle offenbar

$$(P_0 P_1) = 270^0,$$

wenn wir die Winkel von 0 bis 360° zählen und bloss positiv nehmen, also:

$$\cos(P_0 P_1) = 0, \quad \sin(P_0 P_1) = -1.$$

Weil wir die Kräfte P_0 und P_1 einander gleich angenommen

Digitized by Google

haben, so wollen wir für dieselben das gemeinschaftliche Zeichen P schreiben, und erhalten nun aus den Formeln §. 2. 16), 17), 18):

$$U' = 2P^2;$$

$$V' = \{x_0 + x_1 + (y_0 - y_1)\} P^2, \quad W' = \{y_0 + y_1 - (x_0 - x_1)\} P^2;$$

folglich nach §. 2. 19):

$$X = \frac{x_0 + x_1 + (y_0 - y_1)}{2}, \quad Y = \frac{y_0 + y_1 - (x_0 - x_1)}{2}.$$

Führen wir nun für x_0, y_0 und x_1, y_1 ihre obigen Werthe ein, so erhalten wir:

$$X = \frac{x_0 + x_1 + y_0 - y_1}{2} = \frac{OB_0 + OB_1 + A_0B_0 + A_1B_1}{2},$$

$$Y = \frac{y_0 + y_1 - x_0 + x_1}{2} = \frac{A_0B_0 - A_1B_1 - OB_0 + OB_1}{2};$$

oder:

$$X = +ON = \frac{OB_0 + OB_1 + A_0B_0 + A_1B_1}{2},$$

$$Y = +MN = \frac{OB_1 + A_0B_0 - OB_0 - A_1B_1}{2}.$$

Die in der Zeichnung ausgeführte Construction dieser Werthe hat ganz das Richtige gegeben, so weit es bei der natürlich immer nur beschränkten Genauigkeit einer solchen Zeichnung möglich war.

Digitized by Google

XV.

Lösung zweier Aufgaben über Berechnung der Flächeninhalte verschiedentlich bestimmter Ellipsen.

Von

Herrn Dr. *Wilhelm Matzka*,

Professor der Mathematik an der Universität in Prag.

Die hier mitgetheilte Auflösung der beiden an sich minder bedeutsamen Aufgaben geschah in Folge einer zufälligen Veranlassung, und die Veröffentlichung ihres Ergebnisses dürfte theils in der Einfachheit der fraglichen Schlussausdrücke, theils darin eine Entschuldigung finden, dass in der zweiten Aufgabe sich ausweist, das Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten einer Funktion sei, bei gewissen Einschränkungen dieser letzteren, in manchen Fällen zur Entscheidung, ob ein individueller Werth der Funktion ein Maximum oder Minimum sei, nicht ganz geeignet.

Erste Aufgabe.

Bestimmung des Flächeninhaltes einer Ellipse aus ihrer allgemeinsten Gleichung.

Sei die vollständige oder allgemeinste Gleichung einer Ellipse dargestellt durch:

$$1) \quad . \; . \; . \; . \quad Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey = K,$$

der leichteren Vergleichung halber, wie bei Cauchy, Exercices de Mathématiques, 3e année, 1828, p. 65.

Digitized by Google

Setzen wir nun vorerst überhaupt:

2) . . . . $\begin{cases} x = \xi + r\cos\psi, \\ y = \eta + r\sin\psi \end{cases}$

in die obige Gleichung:

1) . . $f(x,y) = Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey = K,$

so übergeht sie in die Polargleichung der Ellipse

$$sr^2 + 2tr + u = K,$$

wenn wir setzen:

3) . . $\begin{cases} s = A\cos\psi^2 + B\sin\psi^2 + 2C\cos\psi\sin\psi, \\ t = (A\xi + C\eta + D)\cos\psi + (C\xi + B\eta + E)\sin\psi, \\ u = f(\xi,\eta) = A\xi^2 + B\eta^2 + 2C\xi\eta + 2D\xi + 2E\eta. \end{cases}$

Soll der Punkt $\xi\eta$ der Mittelpunkt der Ellipse sein, so muss für alle Werthe des Polarwinkels ψ der Strahl r zwei entgegengesetzt gleiche Werthe erhalten, mithin

$$t = 0$$

sein. Dies giebt für ξ, η die beiden Gleichungen:

4) . . . . $\begin{cases} A\xi + C\eta + D = 0, \\ C\xi + B\eta + E = 0; \end{cases}$

und daraus erhält man für den Mittelpunkt der Ellipse die Coordinaten:

5) . . . . . $\xi = \dfrac{CE - BD}{AB - C^2}, \quad \eta = \dfrac{CD - AE}{AB - C^2}$

und zugleich ist die charakteristische Differenz $AB - C^2 = \Delta^2$ positiv, wenn die obige Gleichung einer Ellipse angehören soll.

Die Polargleichung der Ellipse ist sonach, wenn der Pol in deren Mittelpunkt verlegt wird,

$$sr^2 + u = K.$$

Für obigen Mittelpunkt $\xi\eta$ wird aber

$$u = f(\xi,\eta) = (A\xi + C\eta + D)\xi + (C\xi + B\eta + E)\eta + D\xi + E\eta$$

$$= D\xi + E\eta = \frac{AE^2 + BD^2 - 2CDE}{\Delta^2},$$

oder $u = k$, wenn wir abkürzend:

Digitized by Google

$$6) \ldots\ldots\quad \frac{AE^2+BD^2-2CDE}{\Delta^2}=k$$

setzen. Schreiben wir diess in die vorige Polargleichung, so wird selbe nunmehr:

$$7) \ldots\ldots\quad sr^2=K-k$$

und in ihr ist zufolge (3):

$$8) \ldots \left\{\begin{aligned} s &= A\frac{1+\cos 2\psi}{2}+B\frac{1-\cos 2\psi}{2}+C\sin 2\psi \\ &= \frac{A+B}{2}+\frac{A-B}{2}\cos 2\psi+C\sin 2\psi. \end{aligned}\right.$$

Gehen wir nun darauf aus die Halbaxen a, b der Ellipse zu finden, von denen a die längere sein soll; so ist

$$a=\text{Max.}r,$$
$$b=\text{Min.}r;$$

und für sie wird im ersten Falle:

$$s=\text{Min.}=s_1,$$

im zweiten Falle:

$$s=\text{Max.}=s_2.$$

Sonach sind wir darauf verwiesen, zuvörderst das Minimum und Maximum von s zu suchen, folglich obigen Ausdruck des s nach ψ zu differenziiren. Diess giebt:

$$\frac{1}{2}\frac{ds}{d\psi}=-\frac{A-B}{2}\sin 2\psi+C\cos 2\psi,$$

und wenn wir $\frac{ds}{d\psi}=0$ setzen und die allgemeine Auflösung dieser Bestimmungsgleichung für ψ mit α bezeichnen, erhalten wir:

$$C\cos 2\alpha=\frac{A-B}{2}\sin 2\alpha=0,$$

daher:

$$9) \ldots\ldots\quad \frac{\cos 2\alpha}{\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\sin 2\alpha}{C}=\frac{1}{\mp G},$$

wenn wir abkürzend setzen:

$$10) \ldots\ldots\quad \left(\frac{A-B}{2}\right)^2+C^2=G^2,$$

und G positiv annehmen.

Digitized by Google

Hiefür, wird gemäss (8), für $\varphi = \alpha$:

$$s = \frac{A+B}{2} + \frac{\left(\frac{A-B}{2}\right)^2 + C^2}{\mp G},$$

also:

$$s = \frac{A+B}{2} \mp G.$$

Nun sind bei der Ellipse jedenfalls A und B einstimmig, also für positiv annehmbar, G ist ebenfalls positiv vorausgesetzt, mithin gilt für G das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem wir den kleinsten oder grössten Werth von s, d. i. s_1 oder s_2 verlangen.

Es ist nemlich:

11) . . . . $s_1 = \frac{A+B}{2} - G$

der kleinste,

$$s_2 = \frac{A+B}{2} + G$$

der grösste Werth von s. Sonach verwandelt sich die Gleichung (7) in:

12) . . . . $\begin{cases} s_1 a^2 = K - k, \\ s_2 b^2 = K - k \end{cases}$

und liefert die Längen der Halbaxen a und b.

Sei nun f der fragliche Flächeninhalt der Ellipse, so ist bekanntlich überhaupt $f = \pi ab$, also hier:

$$f = \pi \frac{K-k}{\sqrt{s_1 s_2}}.$$

Es ist aber:

$$s_1 s_2 = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - G^2 = \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 - \left(\frac{A-B}{2}\right)^2 - C^2$$

$$= AB - C^2 = \Delta^2,$$

daher wird:

13) . . . . $f = \pi \frac{K-k}{\Delta}$,

der auffällig einfache und doch allgemeinste Ausdruck der Fläche der Ellipse, in welchem man nur, weil f immer positiv gedacht wird, die Zahl $\Delta = \sqrt{AB - C^2}$ mit $K - k$ gleichstimmig zu nehmen hat.

Digitized by Google

Zweite Aufgabe.

Durch einen bestimmten Punkt der Axe einer schiefen circulären Kegelfläche denke man sich alle möglichen Ebenen dergestalt gelegt, dass sie gegen die Ebene ihrer leitenden Kreislinie **gleich geneigt** seien und die Kegelfläche in **lauter Ellipsen** schneiden; man suche die Flächeninhalte solcher Ellipsen überhaupt, und die Lage sowie die Grösse der kleinsten und grössten derartigen Ellipse insbesondere.

1.

Man nehme den Mittelpunkt O des leitenden oder Grundkreises des Kegels (Taf. VII. Fig. 1.) zum Ursprunge rechtwinkliger Coordinaten, die Ebene dieses Kreises zur Ebene der $x'y'$ und lege die $z'x'$-Ebene durch des Kegels Axe, wodurch diese Coordinatenebene zum Hauptaxenschnitt des Kegels wird. Der Halbmesser des Grundkreises sei ϱ, so sind seine Gleichungen:

$$z'=0,\quad x'^2+y'^2=\varrho^2;$$

ferner seien die Coordinaten des Mittelpunktes oder der Spitze C der Kegelfläche $x'=OF=e$, $y'=0$, $z'=FC=f$; und zugleich bedingen wir, dass diese Coordinaten e, f positiv seien, indem wir diejenigen Hälften der Axen der x' und z' als positiv annehmen, auf welche die Projektionen des Kegel-Mittelpunktes in diese Axen zu liegen kommen.

Dann sind die Gleichungen irgend einer Seite der Kegelfläche

$$\frac{x'-e}{m}=\frac{y'}{n}=\frac{z'-f}{1}.$$

Bekanntlich eliminirt man aus diesen vier Gleichungen die Coordinaten x', y', z' und in der so entstehenden Gleichung:

$$(e-mf)^2+(nf)^2=\varrho^2$$

setzt man für die arbiträren Constanten m, n, 1 ihre Proportionellen $x'-e$, y', $z'-f$ und findet so für die Kegelfläche die Gleichung:

$$(ez'-fx')^2+f^2y'^2=\varrho^2(z'-f)^2.$$

Digitized by Google

2.

In der Axe OC des Kegels liege der bestimmte Punkt Q, durch den die erwähnten unzählig vielen Ebenen gelegt werden sollen. Ihn nehmen wir zum Ursprung neuer zu den vorigen parallelen und gleich gerichteten Coordinatenaxen der $x_1 y_1 z_1$ und bedingen, dass beziehlich dieser zweiten Axen der Kegelmittelpunkt C die Coordinaten $g = QG$, $h = GC$ habe. Dann gelten für die früheren Coordinaten die Verwandlungsgleichungen:

$$x' = e - g + x_1,$$
$$y' = y_1,$$
$$z' = f - h + z_1.$$

Führen wir sie in der letzten Gleichung der Kegelfläche ein, so wird selbe:

$$(ez_1 - fx_1 - eh + fg)^2 + f^2 y_1{}^2 = \varrho^2 (z_1 - h)^2.$$

Benützen wir zur Abkürzung noch den Halbmesser r des von der Ebene $x_1 y_1$ erzeugten Kreisschnittes, so bestehen bekanntlich die Proportionen:

$$\frac{e}{g} = \frac{f}{h} = \frac{OC}{QC} = \frac{\varrho}{r};$$

folglich, wenn man in obiger Gleichung der Kegelfläche für e, f, ϱ ihre Proportionalen g, h, r einträgt, nimmt sie die Form an:

$$(gz_1 - hx_1)^2 + h^2 y_1{}^2 = r^2 (z_1 - h)^2.$$

3.

Durch den angewiesenen Punkt Q lege man jetzt irgend eine den Kegel schneidende Ebene $\mathfrak{E}$ unter dem spitzen Winkel ε gegen des Kegels Grundebene $x' y'$, also auch gegen die zu ihr parallele Ebene $x_1 y_1$ geneigt. Um volle Bestimmtheit in die Auffassung dieses Neigungswinkels zu bringen, nehmen wir als p o s i t i v e Halbscheid der schneidenden Ebene diejenige an, welche auf der positiven Seite der $x_1 y_1$ d. i. auf derjenigen Seite liegt, wohin sich die positive Richtung (oder Halbaxe) der z_1 erstreckt. Dieselbe schneidende Ebene zertheilt auch die $x_1 y_1$-Ebene in zwei Hälften (Halb-Ebenen), deren eine die Projektionen der Punkte obiger positiven Halb-Ebene in diese $x_1 y_1$-Ebene auf-

nimmt. Jene und diese Halb-Ebene betrachten wir sonach als die zwei Schenkel des Flächenwinkels ε und zwar die in der x_1y_1-Ebene liegende als den Anfangs- oder Ausgangsschenkel, die andere aber als den End- oder Schlussschenkel desselben; zugleich wollen wir diesen Neigungswinkel ε jederzeit als positiv in Rechnung bringen.

Die Einschnittslinie jener schneidenden Ebene 𝔈 in die x_1y_1-Ebene nehmen wir nun zur x-Axe neuer rechtwinkliger Coordinaten, deren y-Axe in der schneidenden Ebene selbst liegt, von welcher die positive Hälfte in der positiven Hälfte der schneidenden Ebene 𝔈 liegen soll. Die wandelbare positive Richtung oder Halbaxe der x bestimmen wir noch wie folgt. Wir denken uns die schneidende Ebene 𝔈 zu allererst durch die Axe der x_1 hindurch geführt, folglich mit dieser die x-Axe übereinfallend, und nehmen hier die mit der positiven Halbaxe der x_1 zusammenliegende Halbaxe der x für die positive an. Drehen wir nun in Gedanken die Ebene 𝔈 um den fest gehaltenen Punkt Q dergestalt, dass die so eben als positiv erklärte Halbaxe der x aus jener der x_1 um den festgehaltenen Punkt Q sich schwenkend zunächst den ersten Quadranten (rechten Winkel), den die positiven Halbaxen der x_1 und y_1 mit einander machen, durchstreift und sich dann immer weiter und weiter, und endlich ringsherum schwenkt, so wird diese bewegliche Halbaxe Ox jederzeit zur positiven Halbaxe oder Richtung der x angenommen und der von ihr durchstrichene Winkel $x_1Ox = \varphi$ gilt immer als positiv, und wächst sohin stetig von 0 bis 360°. Zur Abkürzung wird es wohl gestattet sein, diesen Winkel φ, nach dem in der Bergmannssprache gebräuchlichen Begriffe vom „Streichen eines ebenen Ganges" den Streichungs- oder Streichwinkel der schneidenden Ebene 𝔈 zu nennen; was insbesondere dann ganz passend ist, wenn zur Erleichterung des Ueberblickes die Ebene xy wagrecht gedacht wird.

4.

Für einen beliebigen Punkt M $(x_1 = QP,\ y_1 = PN,\ z_1 = NM)$ der schneidenden Ebene 𝔈 (Taf. VII. Fig. 2.) seien jetzt die in derselben Ebene liegenden Coordinaten $x = QR$, $y = RM$. Dann findet man sofort, dass der Winkel $NRM = \varepsilon$, also $RN = y\cos\varepsilon$ und $NM = y\sin\varepsilon = z_1$ ist. Wenn man dann die gebrochenen Linien QRN und QPN oder auch die $QRNM$ und $QPNM$ auf die Axen der x_1 und y_1 projicirt, so erfolgt:

$$\begin{matrix} x_1 \\ y_1 \end{matrix} = QR \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \varphi + RN \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} (\varphi - 90^0),$$

und man erhält sonach:

$$x_1 = x \cos\varphi + y \cos\varepsilon \sin\varphi,$$

$$y_1 = x \sin\varphi - y \cos\varepsilon \cos\varphi,$$

$$z_1 = y \sin\varepsilon$$

zu Umwandlungsgleichungen der Coordinaten $x_1 y_1 z_1$ in x, y.

5.

Lassen wir nunmehr den Punkt M $(x_1 y_1 z_1)$ der Einschnittskurve der Ebene $\mathfrak{E}$ in die Kegelfläche zugehören, so haben wir die letzten Coordinatenausdrücke in die vorangehende Gleichung des Kegels einzusetzen und finden so des entstehenden Kegelschnittes Gleichung:

$$[xh\cos\varphi + y(h\cos\varepsilon\sin\varphi - g\sin\varepsilon)]^2 + h^2(x\sin\varphi - y\cos\varepsilon\cos\varphi)^2$$
$$= r^2(y\sin\varepsilon + h)^2.$$

Ordnen wir sie nach den Potenzen der x und y, so verwandelt sie sich in

$$Ax^2 + By^2 + 2Cxy + 2Dx + 2Ey = K,$$

indem wir abkürzend setzen:

$$\begin{aligned} A &= h^2, \\ B &= (h\cos\varepsilon\sin\varphi - g\sin\varepsilon)^2 + h^2\cos\varepsilon^2\cos\varphi^2 - r^2\sin\varepsilon^2, \\ C &= -gh\sin\varepsilon\cos\varphi, \\ D &= 0, \\ E &= -hr^2\sin\varepsilon, \\ K &= h^2r^2. \end{aligned}$$

6.

Dieser Schnitt soll nun für alle Streichungswinkel φ eine Ellipse werden, folglich muss der charakteristische Unterschied $AB - C^2$ immer positiv und grösser als Null ausfallen; er kann demnach $= \Delta^2$ gesetzt werden. Es ist aber, wenn man h^2 als Faktor heraushebt:

Digitized by Google

$$\frac{\varDelta^2}{h^2} = h^2\cos\varepsilon^2 + (g^2-r^2)\sin\varepsilon^2 - 2gh\cos\varepsilon\sin\varepsilon\sin\varphi - g^2\sin\varepsilon^2\cos\varphi^2,$$

$$= (h\cos\varepsilon - g\sin\varepsilon\sin\varphi)^2 - r^2\sin\varepsilon^2,$$

folglich, wenn man den für $\varepsilon = 0$ stattfindenden Kreisschnitt, als nicht zur Frage gehörig, ausschliesst und sohin noch den von Null verschiedenen Faktor $\sin\varepsilon^2$ heraushebt

$$\frac{\varDelta^2}{h^2\sin\varepsilon^2} = (h\cot\varepsilon - g\sin\varphi)^2 - r^2.$$

Dieser Unterschied $\varDelta^2 = AB - C^2$ wird nun für einen gewissen Winkel $\varepsilon = \varepsilon_0$ zu Null, daher der Kegelschnitt eine Parabel, als Grenzform der mit φ und ε wandelbaren Ellipsen; und man findet für ihn die Bestimmungsgleichung:

$$(h\cot\varepsilon_0 - g\sin\varphi)^2 - r^2 = 0,$$

folglich:

$$\cot\varepsilon_0 = \frac{g\sin\varphi \pm r}{h}.$$

Dieser Winkel wird nun möglichst klein, daher seine Cotangente möglichst gross ausfallen, wenn $\sin\varphi = +1$, also $\varphi = 90^\circ$ wird. Dann ist:

$$\cot\varepsilon_0 = \frac{g \pm r}{h},$$

und von diesen zwei als ε_0 sich ergebenden spitzen Winkeln ist der dem $+r$ entsprechende der kleinere, daher hier allein als Grenze der ε in Betracht kommende; deshalb nehmen wir entschieden den aus

$$\cot\varepsilon_0 = \frac{g+r}{h} = \frac{e+\varrho}{f}$$

folgenden Winkel ε_0 als oberste Grenze der möglichen Neigungswinkel ε an, so dass wir fortan

$$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$$

bedingen.

Zur ferneren Abkürzung setzen wir:

$$h\cot\varepsilon = c,$$

und finden, wegen $\cot\varepsilon > \cot\varepsilon_0$,

$$c > h\cot\varepsilon_0,$$

Digitized by Google

also:

$$c > g + r.$$

Eben so setzen wir in dem entstehenden Quotienten

$$\frac{\Delta^2}{h^2 r^2 \sin\varepsilon^2} = \left(\frac{c - g\sin\varphi}{r}\right)^2 - 1$$

den Potentiand

$$\frac{c - g\sin\varphi}{r} = v,$$

von dem wir sogleich ersehen, dass, weil $c > g + r$, also:

$$v > \frac{r + g(1 - \sin\varphi)}{r} > 1 + \frac{g}{r}(1 - \sin\varphi),$$

somit v positiv und > 1 ist, der Unterschied $v^2 - 1$ und somit auch Δ^2 jedenfalls positiv sich ergiebt. Hiernach erhalten wir:

$$\Delta = hr\sin\varepsilon\sqrt{v^2 - 1},$$

jedoch immer für $\sin\varepsilon > 0$.

7.

Suchen wir jetzt den Flächeninhalt f der entstehenden Ellipse nach den Formeln (6) und (13) der I. Aufgabe

$$k = \frac{AE^2 + BD^2 - 2CDE}{\Delta^2},$$

$$\mathfrak{f} = \pi\frac{K - k}{\Delta};$$

so finden wir:

$$k = \frac{AE^2}{\Delta^2} = \frac{h^2 r^2}{v^2 - 1} = + \text{ (positiv)}.$$

$$K - k = \frac{v^2 - 2}{v^2 - 1} h^2 r^2,$$

mithin die Fläche der Ellipse:

$$\mathfrak{f} = \frac{\pi r h}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{v^2 - 2}{(v^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi r h}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{(v + \sqrt{2})(v - \sqrt{2})}{(v^2 - 1)^{\frac{3}{2}}},$$

worin

$$v = \frac{c - g\sin\varphi}{r}$$

Digitized by Google

ist. Da diese Fläche f nur **positiv** in Rechnung gebracht zu werden pflegt, müssen wir noch bedingen, dass, wenn $v > 1$ aber $< \sqrt{2} = 1{,}4$ wäre, $\sqrt{v^2-1}$ negativ zu nehmen sei, oder dass $\sqrt{v^2-1}$ immer mit dem Vorzeichen von $v - \sqrt{2}$ genommen werde.

8.

Aus dem Ausdrucke des Flächeninhaltes f und der Hilfszahl v erhellet auf der Stelle, dass für zwei Winkel φ, welche **einerlei Sinus** haben, also, wenn φ einen spitzen Winkel vorstellt, für φ und sein Supplement $180^0 - \varphi$, andererseits für $180 + \varphi$ und $360^0 - \varphi$ sowohl v als auch f einen und denselben Werth erhalten.

Demnach sind zwei solche elliptische Schnitte flächengleich, wenn die Spuren ihrer Ebenen unter zwei supplementären Streichungswinkeln φ und $180^0 - \varphi$, oder unter $180^0 + \varphi$ und $360^0 - \varphi$ gegen den Hauptdurchmesser des Grundkreises des Kegels geneigt sind.

Diess erklärt sich übrigens auch leicht daraus, dass ein Paar solcher Schnitte gegen den Haupt-Axenschnitt $z_1 x_1$, der den Kegel in zwei symmetrisch gleiche Hälften zertheilt, symmetrisch liegen, daher selbst symmetrisch gleich sein müssen.

9.

Um ferner die **grössten** und **kleinsten Beträge** dieses Flächeninhaltes f, so wie die Streichungswinkel φ der sie enthaltenden Schnitt-Ebenen zu ermitteln, setzen wir für einen Augenblick den Faktor oder Quotienten

$$\frac{f \sin\varepsilon}{\pi r h} = \frac{v^2-2}{(v^2-1)^{\frac{3}{2}}} = q,$$

und differenziiren ihn nach φ, bemerkend, dass

$$\frac{dv}{d\varphi} = -\frac{g}{r}\cos\varphi \quad \text{und} \quad \frac{dq}{dv} = -v \cdot \frac{v^2-4}{(v^2-1)^{\frac{5}{2}}}$$

ist. So finden wir:

$$\frac{dq}{d\varphi} = q' = \frac{g}{r} \cdot \frac{v(v+2)(v-2)}{(v^2-1)^{\frac{5}{2}}} \cos\varphi.$$

Digitized by Google

Dieser Differentialquotient kann bei Eintritt eines grössten oder kleinsten Werthes von q und f, wegen $v > 1$, nur verschwinden, wenn

$$\cos\varphi = 0 \quad \text{oder} \quad v = 2$$

ist, von denen die erste Bedingung entweder $\varphi = 90^0$ oder $\varphi = 270^0$ erheischt, so dass die schneidende Ebene durch die y_1-Axe hindurch geht und sohin auf dem Haupt-Axenschnitte $z_1 x_1$ senkrecht steht.

Um noch entscheiden zu können, ob ein solcher äusserster Werth des q wirklich statt habe, bedürfen wir bekanntlich noch des zweiten Differentialquotienten von q, zu dessen Ermittlung wir jedoch vorerst noch den, nur die Veränderliche v enthaltenden und nie verschwindenden Faktor

$$\frac{g}{r} \cdot \frac{v(v+2)}{(v^2-1)^{\frac{3}{2}}} = V$$

setzen und dadurch

$$q = V(v-2)\cos\varphi$$

machen. Wir finden sonach den zweiten Differentialquotienten:

$$q'' = \frac{d^2q}{d\varphi^2} = -\left(\frac{dV}{dv}(v-2) + V\right)\frac{g}{r}\cos\varphi^2 - V(v-2)\sin\varphi,$$

und je nachdem er negativ oder positiv ausfällt, muss q und sohin auch f ein Maximum oder Minimum werden.

10.

I. Im ersten Falle, wo $\varphi = 90^0$ ist, fällt die positive Halbaxe der x auf die der y_1, es ist $\sin\varphi = 1$, die Hilfszahl v übergeht in:

$$v_1 = \frac{c-g}{r},$$

und die elliptische Durchschnittsfigur hat den Inhalt:

$$\mathrm{f}_1 = \frac{\pi r h}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{v_1^2 - 2}{(v_1^2-1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi r h}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{v_1 + \sqrt{2}}{v_1^2 - 1} \cdot \frac{v_1 - \sqrt{2}}{\sqrt{v_1^2-1}}.$$

Ferner ist hier:

$$V_1 = \frac{g}{r} \cdot \frac{v_1(v_1+2)}{(v_1^2-1)^{\frac{3}{2}}}, \quad q'' = -V_1(v_1-2),$$

Digitized by Google

und sonach sind $v_1 - \sqrt{2}$, $\sqrt{v_1^2 - 1}$, V_1 gleichstimmig.

Nun sei:

a) $v_1 > 2$, so sind $v_1 - 2$, $v_1 - \sqrt{2}$ und somit auch V_1 positiv, also ist q'' negativ und deshalb f_1 ein Maximum.

b) Sei $v_1 < 2$ aber $> \sqrt{2}$ also $v_1 - 2$ negativ aber $v_1 - \sqrt{2}$ positiv; so ist V_1 positiv, also q'' positiv und f_1 ein Minimum.

c) Endlich sei $v_1 < \sqrt{2} < 2$ aber immer noch > 1, so ist sowohl $v_1 - 2$ als auch $v_1 - \sqrt{2}$ negativ, daher V_1 und q'' negativ, also f_1 ein Maximum.

11.

II. Im zweiten Falle, wo $\varphi = 270^0$ ist, fällt die positive Halbaxe der x auf die negative der y_1, es ist $\sin\varphi = -1$, die Hilfszahl v übergeht in:

$$v_2 = \frac{c+g}{r} > 1 + 2\frac{g}{r},$$

und die Ellipse hat den Inhalt:

$$f_2 = \frac{\pi r h}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{v_2^2 - 2}{(v_2^2 - 1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pi r h}{\sin\varepsilon} \cdot \frac{v_2 + \sqrt{2}}{v_2^2 - 1} \cdot \frac{v_2 - \sqrt{2}}{\sqrt{v_2^2 - 1}}.$$

Ferner ist:

$$V_2 = \frac{g}{r} \cdot \frac{v_2(v_2 + 2)}{(v_2^2 - 1)^{\frac{3}{2}}},$$

und:

$$q'' = V_2(v_2 - 2);$$

daher sind $v_2 - \sqrt{2}$, $\sqrt{v_2^2 - 1}$, V_2 immer gleichstimmig.

Nun sei:

α) $v_2 > 2$, so sind $v_2 - 2$, $v_2 - \sqrt{2}$ und V_2 positiv, daher ist q'' positiv und sohin f_2 ein Minimum.

β) Sei $v_2 < 2$ aber noch $> \sqrt{2}$, so ist $v_2 - 2$ negativ, dagegen $v_2 - \sqrt{2}$ und damit auch V_2 positiv, also q'' negativ, und f_2 ein Maximum.

γ) Endlich sei $v_2 < \sqrt{2} < 2$, so ist $v_2 - 2$ und $v_2 - \sqrt{2}$, also auch V_2 negativ und sonach q'' positiv, daher f_2 ein Minimum.

Digitized by Google

12.

III. Betrachten wir noch den Zusammenhang der beiderlei Fälle, indem wir berücksichtigen, dass immer:

$$v_2 - v_1 = 2\frac{g}{r} = +, \text{ also } v_2 > v_1 \text{ ist; so sei:}$$

1) in I. a) die $v_1 > 2$, so ist auch $v_2 > 2$ wie in II. α). Hiernach ist für $v_1 > 2$ die Ellipse f_1 ein Maximum und zugleich wegen $v_2 > 2$ die f_2 ein Minimum.

2) Wie in I. b) sei $\sqrt{2} < v_1 < 2$, daher f_1 ein Minimum, so ist wegen $v_2 > v_1 > \sqrt{2}$ die v_2 zwar $> \sqrt{2}$; ob sie aber nothwendig doch noch < 2, mithin (wie in II. β)) die f_2 ein Maximum sei, lässt sich allgemein nicht entscheiden, bevor man nicht den eigentlichen Werth von v_2 berechnet hat.

3) Endlich sei wie in I. c) die Zahl $v_1 < \sqrt{2}$, folglich f_1 ein Maximum, dann ist aus $v_2 = v_1 + 2\frac{g}{r}$ keineswegs allgemein ersichtlich, dass $v_2 < 2$ sei, folglich findet wieder die vorige Ungewissheit statt.

13.

IV. Verschwindet endlich der Differentialquotient q', weil $v = 2$ wird, so wird $V = 8\frac{g}{r}$, und die Fläche der Ellipse:

$$f_3 = \frac{2\pi r . h}{3\sqrt{3} . \sin\varepsilon}.$$

Hiebei wird $q'' = -2(\frac{2g}{r}\cos\varphi)^2$ immer negativ, mithin wäre f_3 jedenfalls ein Maximum.

Den zugehörigen Streichungswinkel φ findet man aus der Bedingungsgleichung:

$$v = \frac{c - g\sin\varphi}{r} = 2,$$

daher, wenn man den ihr genügenden spitzen Winkel mit φ' bezeichnet, ist:

Digitized by Google

$$\sin\varphi' = \sin(180^0 - \varphi') = \frac{c - 2r}{g}.$$

Dieser Bruch muss jedoch positiv und < 1 ausfallen, daher:

$$c > 2r, \text{ aber } c < 2r + g$$

sein. Da nun:

$$\cot\varepsilon = \frac{c}{h}$$

ist, so muss:

$$\cot\varepsilon > \frac{2r}{h}, \text{ aber } < \frac{2r + g}{h}$$

sein. Derlei möglich grösste Schnitte unter den Streichungswinkeln φ' und $180^0 - \varphi'$ könnten sich demnach nur ergeben, wenn der Neigungswinkel ε durch die letzteren zwei Ungleichungen eingeengt wäre. Der ersteren Ungleichung genügt unsere in Artikel 6 gestellte Bedingung $\cot\varepsilon > \frac{g + r}{h}$, wirklich dann, wenn $g > r$, d. i., wenn die Projektion des Kegelmittelpunktes ausserhalb des Grundkreises dessen Ebene trifft.

Nehmen wir den Winkel φ zwischen 180^0 und 360^0 und setzen wir $\varphi = 180^0 + \omega$, so erstreckt sich ω von 0 bis 180^0 und es ist:

$$\sin\varphi = -\sin\omega,$$

daher:

$$v = \frac{c + g\sin\omega}{r},$$

und wegen:

$$c = 2r + g\sin\varphi' \quad \text{auch} \quad v = 2 + \frac{g}{r}(\sin\omega + \sin\varphi') > 2.$$

Sonach kann nur im ersten gestreckten Winkel von φ, nicht aber im zweiten $v =$ oder < 2 werden. Ferner ist bei $\varphi = 90^0$ die $v = v_1 = \frac{c - g}{r} = 2 - \frac{g}{r}(1 - \sin\varphi')$, also $v_1 < 2$.

Da sich aber hieraus nicht ersehen lässt, ob $v_1 >$ oder $< \sqrt{2}$ sei, so kann man (vermöge I. b) c)) nicht wissen, ob hier f_1 ein Maximum oder Minimum sei.

Dagegen ist für $\varphi = 270^0$ die $v = v_2 = \frac{c + g}{r} = 2 + \frac{g}{r}(1 + \sin\varphi')$ also $v_2 > 2$ und sonach f_2 ein Minimum.

Digitized by Google

14.

Wenn demnach bei gewissen schiefen Kegeln solche Neigungswinkel ε der schneidenden Ebene gewählt werden könnten, dass $v = 2$ würde, also der positive spitze Winkel φ' nach obigem Ausdrucke sich bestimmen liesse; so erhielte man einmal, wenn die positive Halbaxe der x im ersten und zweiten Quadranten der Axen der x_1 und y_1 liegt, zwei gleiche Maximalwerthe $\mathfrak{f}_3$ der elliptischen Fläche $\mathfrak{f}$; jedoch würde sich im allgemeinen in voraus **nicht** entscheiden lassen, ob für $\varphi = 90^0$ der Werth $\mathfrak{f}_1$ ein Minimum oder Maximum sei; obschon Letzteres unwahrscheinlich ist, weil dann drei Maxima nach einander folgen würden, nemlich bei $\varphi = \varphi'$, $\varphi = 90^0$ und $\varphi = 180^0 - \varphi'$; was jedoch durchaus unmöglich ist. Es zeigt sich daher, dass das Vorzeichen des zweiten Differentialquotienten mancher Funktion — wofern diese in beschränktem Sinne aufgefasst wird — nicht immer ein verlässliches Kennzeichen für ein Maximum oder Minimum derselben an die Hand gebe.

15.

Dieserwegen ziehen wir nun die Aenderung der Hilfszahlen v und q und ihrer Differentialquotienten in Betracht, unter der Voraussetzung, dass der Streichungswinkel φ von 0 bis 360^0 stetig anwachse. Da ersehen wir sofort, dass

$$v = \frac{c - g \sin\varphi}{r}$$

im ersten Quadranten des Winkels φ von $\frac{c}{r}$ stetig bis $\frac{c-g}{r}$ abnimmt, im zweiten dagegen wieder auf $\frac{c}{r}$ hinaufsteigt. Soll demnach in diesem Bereiche die Zahl v durch 2 hindurchgehen, so muss diess zwei Mal geschehen und zwar ist diess nur möglich, wenn sie anfangs und zu Ende grösser, in der Mitte aber kleiner als 2, also $v - 2$ dort positiv, hier negativ ist; es muss also $\frac{c}{r} > 2$ und $\frac{c-g}{r} < 2$, oder $c > 2r$ aber $< 2r + g$ sein. Demzufolge ist der Differentialquotient

$$\frac{dq}{d\varphi} = \frac{g}{r} \cdot \frac{v(v+2)(v-2)}{(v^2-1)^{\frac{3}{2}}} \cdot \cos\varphi$$

Digitized by Google

anfangs (bei $\varphi=0$) positiv, für $\varphi=\varphi'$ und $v-2=0$ aber Null, also für $\varphi=\varphi'$ bis $\varphi=90^0$ negativ, wo er abermals Null wird. Er geht demnach zuerst aus dem Positiven durch Null in's Negative, dann umgekehrt; dort also muss q und mit ihr f seinen grössten, hier einen kleinsten Werth erhalten. — Setzt man diese Betrachtungen fort, so findet man folgende Zusammenstellung:

I. Von $\varphi=0$ bis $\varphi=180^0$.

φ =	0	……	φ'	……	90^0	……	$180^0-\varphi'$	……	180^0
$v-2$ =	$+$	…. $+$ ….	$\overset{+}{\underset{-}{0}}$	…. $-$ ….	$-$ (Min.)	…. $-$ ….	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	…. $+$ ….	$+$
$\frac{dq}{d\varphi}$ =	$+$	…. $+$ ….	$\overset{+}{\underset{-}{0}}$	…. $-$ …. $-$ ….	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	…. $+$ ….	$\overset{+}{\underset{-}{0}}$	…. $-$ ….	$-$
q und f =		……..	Max.	……..	Min.	……..	Max.	…………	

II. Von $\varphi=180^0$ bis $\varphi=360^0$.

φ =	180^0	……..	270^0	……..	$360^0-\varphi'$
$v-2$ =	$+$	…. $+$ ….	$+$	…. $+$ ….	$+$
$\frac{dq}{d\varphi}$ =	$-$	…. $-$ ….	$\overset{-}{\underset{+}{0}}$	…. $+$ ….	$+$
q und f =		…………	Min.	………………	

Hieraus erhellt sonach, dass wofern

$$2r+g>c>2r,$$

also

$$\frac{2r+g}{h}>\cot\varepsilon>\frac{2r}{h}$$

ist, der erste Differentialquotient $\frac{dq}{d\varphi}$ anstandslos Auskunft über den regelrechten Wechsel der zwei Maxima und zwei Minima der q und f gibt.

Prag, 30. Oktober 1866.

Digitized by Google

XVI.

Zur Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung mittelst Aufsteigen zu höherer (zweiter) Ordnung.

Von

Herrn Professor Dr. *J. Dienger*

am Polytechnikum in Carlsruhe.

I.

Sei

$$f(x, y, y') = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

wo $y' = \frac{dy}{dx}$, die vorgelegte Differentialgleichung erster Ordnung, aus der durch Differenzirung erhalten wird:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y' + \frac{\partial f}{\partial y'} y'' = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

wo $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$. Aus (2) ergebe sich, indem man nöthigenfalls (1) damit verbindet:

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

eine Differentialgleichung, deren allgemeines Integral die Gleichung

$$\varphi(x, y, a, b) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

sei, wo a, b zwei willkürliche Konstanten bedeuten. Zieht man aus (4):

$$y = \psi(x, a, b), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

so genügt selbstverständlich dieser Werth von y der (3) identisch, und es gibt keine andere Funktion, welche, an die Stelle von y gesetzt, dieser Gleichung identisch Genüge leisten kann.

Digitized by Google

Da nun offenbar alle Funktionen, welche der (1) genügen, auch der (2) und (3) genügen; letzterer aber blos ψ (für y) genügt, so kann der (1) auch nur durch eine Funktion genügt werden, welche aus ψ entsteht, indem vielleicht die eine oder die andere Konstante in ψ besondere Werthe annimmt u. s. w. Jedenfalls muss die der (1) genügende Funktion in ψ enthalten sein.

Werden also a und b gehörig bestimmt, so genügt (das nunmehrige) ψ der (1), so dass dann identisch

$$f(x, \psi, \psi') = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

wobei natürlich auch wegen (2):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\psi' + \frac{\partial f}{\partial y'}\psi'' = 0, \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

wenn man in $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y'}$ an die Stelle von y und y' setzt ψ und ψ'. Da alsdann die erste Seite der (7) der (totale) Differentialquotient der Grösse $f(x, \psi, \psi')$ nach x ist, so folgt hieraus, dass in (6) die Grösse x ausgefallen ist, dass mithin nur a und b in dieser Gleichung vorkommen. Dieselbe stellt nun die Beziehung zwischen a und b fest, damit die (5) oder (4) die Integralgleichung von (1) sei.

Das System der zwei Gleichungen

$$f(x, \psi, \psi') = 0, \quad y = \psi \quad (\text{oder } \varphi = 0) \quad \ldots\ldots (8)$$

stellt also die allgemeine Integralgleichung von (1) dar. Die erste dieser Gleichungen (die nur a und b thatsächlich enthält) sagt nämlich offenbar aus, dass die zweite der (1) identisch genüge, natürlich unter der Voraussetzung, dass a und b an einander durch eben diese erste Gleichung gebunden sind.

II.

Differenzirt man die Gleichung (4) nochmals, so ergibt sich:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}y' = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

aus welcher Gleichung y' ganz eben so folgen wird, wie aus (5), nämlich $y' = \psi'$, natürlich unter der Voraussetzung, dass man y aus (4) in (9) einsetze.

Daraus ergibt sich, dass die Elimination von y' und b aus

Digitized by Google

$$f(x, y, y') = 0, \quad \varphi(x, y, a, b) = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' = 0 \quad (10)$$

ebenfalls zu der Integralgleichung von (1), mit der einen willkürlichen Konstanten a, führt. Denn die Elimination von b aus (8) führt zu der fraglichen Integralgleichung. Da aber $y = \psi$, so kann man die (8) auch schreiben:

$$f(x, y, \psi') = 0, \quad \varphi(x, y, a, b) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

und die Elimination von b muss immer noch zu der Integralgleichung führen. Die erste dieser Gleichungen ist aber das Ergebniss der Elimination von y' zwischen der ersten und dritten (10), indem die letztere auch heisst: $y' = \psi'$, woraus nun offenbar unsere Behauptung folgt.

III.

Eliminirt man etwa b zuerst aus den zwei letzten (10) und dann y' aus der so erhaltenen Gleichung und der ersten (10), so erhält man natürlich immer wieder die mehrgenannte Integralgleichung. Die aus erster Rechnung hervorgegangene Gleichung hat die Bedeutung einer ersten Integralgleichung von (3), so dass hieraus folgt, dass wenn man eine solche erste Integralgleichung von (3) (mit x, y, y' und einer Konstanten a) kennt, man durch Elimination von y' zwischen derselben und (1) ebenfalls die Integralgleichung von (1) erhält.

Welche der zwei Konstanten man zwischen den (11), d. h. zwischen (6) und (4) eliminirt, ist ganz gleichgiltig. Denn folgen aus diesen zwei Gleichungen:

$$a = \Phi(x, y), \quad b = \Phi_1(x, y); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

so genügen natürlich diese Grössen der (6), d. h. man hat eine Gleichung zwischen Φ, Φ_1, woraus sofort hervorgeht, dass beide Gleichungen (12) als Integralgleichungen von (1) erklärt werden dürfen.

Welches folglich auch diejenige der (zwei möglichen) ersten Integralgleichungen von (3) sei, die man in dem zu Eingang diesses Paragraphen angegebenen Verfahren benützt, ist gleichgiltig.

IV.

Gesetzt, es seien die Gleichungen

Digitized by Google

$$\lambda = a, \quad \mu = b \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

aus den zwei Gleichungen

$$F(x, y, a, b) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0 \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

durch Elimination von je einer der Konstanten entstanden, so dass also λ, μ Funktionen von x, y, y' (ohne a oder b) sind. Dann hat die Gleichung

$$f(\lambda, \mu) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

zur Integralgleichung das System

$$F(x, y, a, b) = 0, \quad f(a, b) = 0 \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Die (15) ist die (1) in §. I.; die (13) sind erste Integralgleichungen von (3), deren allgemeine Integralgleichung die erste (16) ist, welche mit der (4) zusammenfällt; die letzte (16) ist die (6) des §. I. Denn wenn man $F = 0$ auflöst und daraus die (5) erhält, sodann $y = \psi$ in (15) einsetzt, so erhält man ganz dasselbe, als wenn man y, y' zwischen

$$F(x, y, a, b) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = 0, \quad f(\lambda, \mu) = 0 \quad (17)$$

eliminirt. Da die zwei ersten die (13) liefern, so ergibt sich durch diese Elimination die letzte (16).

Will man die Gleichung

$$F(x, y, a, b) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

nicht herstellen, um sich thatsächlich zu überzeugen, dass die (13) beide aus den (14) entstehen, so hat man nur die (13) zu differenziren. Entsteht aus beiden dieselbe Differentialgleichung zweiter Ordnung, so besteht nothwendig die Funktion $F(x, y, a, b)$, so dass die (13) aus (14) entstehen können, und es ist (18) die allgemeine Integralgleichung der Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Eliminirt man also y' zwischen

$$\lambda = a, \quad f(\lambda, \mu) = 0, \quad \text{oder} \quad \mu = b, \quad f(\lambda, \mu) = 0,$$

so erhält man die Integralgleichung von (15). Dies kommt auch darauf hinaus, y' und b aus

$$\lambda = a, \quad \mu = b, \quad f(a, b) = 0;$$

oder y' und a aus

$$\lambda = a, \quad \mu = b, \quad f(a, b) = 0,$$

d. h. denselben Gleichungen, zu eliminiren.

Digitized by Google

XVII.

Elementar-geometrischer Beweis des Satzes: Die Kegelschnitte werden von den in den Kegel gelegten Kugeln in ihren Brennpunkten berührt.

Von

Herrn Dr. *F. C. Fresenius*,

Lehrer an der höheren Bürgerschule in Frankfurt a. M.

I. Für die Parabel. (Taf. VII. Fig. 3.)

cbn sei Durchschnitt des Kegels durch die Achse, *dto* Durchschnitt der hineingelegten Kugel, $so \parallel bn$, *cn* senkrecht zur Kegelachse *bm*, $io \perp cn$ und *so*, also ist der Durchschnitt der Ebene *ios* mit der Kegeloberfläche die Parabel *is*.

Es ist zu beweisen, dass *o* Brennpunkt derselben ist.

1) $co:ct = ct:cu$
$$\frac{cu = no}{ct^2 = co.no}$$

2) $co:oi = oi:on$
$$\frac{oi^2 = co.on}{oi = ct}$$

3) $sc:so = bc:bn = 1:1$
$$\frac{so = st}{sc + st = ct = 2.so}$$
$$oi = 2.so$$

Wo aber bei der Parabel die Ordinate gleich doppelter Abscisse ist, da ist der Brennpunkt. Also ist der Berührungspunkt der Kugel Brennpunkt der Parabel.

II. Für die Ellipse. (Taf. VII. Fig. 4.)

Die Figur zeigt wieder den Achsenschnitt durch Kegel und beide Kugeln, welche die Ebene der Ellipse berühren. *sp* ist Durchschnitt dieser auf *pbq* senkrecht stehenden Ebene, also zugleich grosse Achse der Ellipse. Es ist zu beweisen, dass die Berührungspunkte *o* und *u* die Brennpunkte der Ellipse sind.

Digitized by Google

ms = *mp*; *mw*, *nc*, *hs* und *pq* senkrecht gegen die Kegelachse.

1) $co : ct = ct : cf$

$$\frac{cf = on}{ct^2 = co . on}$$

$ct =$ Ordinate des Kreises, dessen Durchmesser *cn* ist, in *o*;

$ct =$ Ordinate in *o* für die Ellipse, deren gr. Achse $= sp$.

2) $\angle xsk = 90^0$ und $\angle xpk = 90^0$ (gebildet von den Halbirungslinien zweier Nebenwinkel)

$\angle usk = \angle sxo$ | $\angle xpo = \angle pku$

$\Delta\, usk \backsim \Delta\, sxo$ | $\Delta\, xpo \backsim \Delta\, pku$

$us : uk = xo : os$ | $po : xo = uk : pu$

$us . os = uk . xo$ | $po . pu = uk . xo$

$$us : pu = po : os$$

$$us : us + pu = po : po + os$$

d. h. $us : ps = po : ps$

$$us = po$$

$$pu = os$$

3) $\dfrac{ms = mp}{mo = mu}$

4) $po = pd = qt$

$\dfrac{so = pu = st}{uo = sq}$

5) $sm : sp = sw : sq$

$\dfrac{sm = \frac{1}{2} sp}{sw = \frac{1}{2} sq = om = mu}$

6) $\dfrac{so : sc = sm : sw}{so : so + sc = sm : sm + sw}$

$so + sc = ct$

$\dfrac{sm + sw = su}{so . su = ct . sm}$

$\dfrac{su = op}{so . op = ct . sm}$

7) $so = sm - om$

sm heisse *a* (grosse Halbachse)

$so = a - om$

$\dfrac{op = a + om}{so . op = (a - om)(a + om)}$

$= a^2 - om^2$

8) $$\frac{tc \text{ (Ord. in } o) = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - om^2}}{ct . sm = b \sqrt{a^2 - om^2}}$$

9) $so . op = ct . sm$

$a^2 - om^2 = b \sqrt{a^2 - om^2}$

$(a^2 - om^2)^2 = b^2 (a^2 - om^2)$

$a^2 - om^2 = b^2$

$om^2 = a^2 - b^2 = e^2$ ($e =$ Excentricität)

$om = e = mu$.

Also sind *o* und *u* die Brennpunkte.

Digitized by Google

III. Für die Hyperbel. (Taf. VII. Fig. 5.)

Die Voraussetzungen sind denen des vorigen Beweises ganz analog. on, wm, $pq \perp$ zur Achse, $sm = mp$. Die Berührungspunkte o und u sind als die Brennpunkte zu erweisen.

1) $co : ct = ct : on$

$ct =$ Ordinate in o für den Kreis cn und die Hyperbel ou.

2) $\Delta xso \sim \Delta sku$ und $\Delta xop \sim \Delta puk$

$os : ox = ku : us$ $op : ox = ku : up$

$os . us = ox . ku$ $op . up = ox . ku$

$$os : op = up : us$$

$$os : op - os = up : us - up$$

d. h. $os : sp = up : sp$

3) $os = up$ und da $sm = mp$

$$om = mu$$

4) $po = pd = qt$

$so = pu = ts$

$uo = sq$

5) $sm : sp = sw : sq$

$sm = \frac{1}{2} sp$

$sw = \frac{1}{2} sq = om = mu$

6) $so : sc = sm : sw$

$so : so + sc = sm : sm + sw$

$so + sc = ct$

$sm + sw = su$

$so . su = ct . sm$

$su = op$

$so . op = ct . sm$

7) $so = om - sm$

$sm = a$ (Halbachse)

$so = om - a$

$op = om + a$

$so . op = (om - a)(om + a)$

$= om^2 - a^2$

8) tc (Ord. in o) $= \frac{b}{a} \sqrt{om^2 - a^2}$

$$ct . sm = b \sqrt{om^2 - a^2}$$

9) $so . op = ct . sm$

$om^2 - a^2 = b \sqrt{om^2 - a^2}$

$(om^2 - a^2)^2 = b^2 (om^2 - a^2)$

$om^2 - a^2 = b^2$

$om^2 = a^2 + b^2 = e^2$

$om = e = mu.$

Also sind o und u die Brennpunkte.

Digitized by Google

XVIII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Es ist:

$$4a_1 a_2 = (a_1 + a_2)^2 - (a_2 - a_1)^2,$$

$$24a_1 a_2 a_3 = (a_1 + a_2 + a_3)^3 - (a_1 + a_2 - a_3)^3 - (a_1 + a_3 - a_2)^3 - (a_2 + a_3 - a_1)^3,$$

$$\begin{aligned} 192 a_1 a_2 a_3 a_4 = & \;(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^4 \\ & - (a_1 + a_2 + a_3 - a_4)^4 \\ & - (a_1 + a_2 + a_4 - a_3)^4 \\ & - (a_1 + a_3 + a_4 - a_2)^4 \\ & - (a_2 + a_3 + a_4 - a_1)^4 \\ & + (a_2 + a_3 - a_4 - a_1)^4 \\ & + (a_2 + a_4 - a_3 - a_1)^4 \\ & + (a_3 + a_4 - a_2 - a_1)^4. \end{aligned}$$

Ein allgemeines Gesetz, unter welchem diese Formeln als besondere Fälle enthalten sind, hat Herr Professor Tardy in Genua in den „Annali di scienze matematiche e fisiche, compilati da Barnaba Tortolini. Tomo Secondo. Roma. 1851. p. 287.“ bewiesen.

Es ist, wie sich durch Entwickelung des Quadrats leicht allgemein nachweisen lässt:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)^2$$

$$= \left\{ \begin{aligned} & 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + (n-2)x^{n-3} + (n-1)x^{n-2} + nx^{n-1} \\ & \qquad + (n+1)x^n \\ & + nx^{n+1} + (n-1)x^{n+2} + (n-2)x^{n+3} + \ldots + 3x^{2n-2} + 2x^{2n-1} + x^{2n}, \end{aligned} \right.$$

und weil nun

$$(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)^2 = \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}\right)^2$$

Digitized by Google

ist, so ist auch:

$$\left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)^2$$

$$= \left\{ \begin{array}{c} 1+2x+3x^2+4x^3+\ldots.+(n-2)x^{n-3}+(n-1)x^{n-2}+nx^{n-1} \\ +(n+1)x^n \\ +nx^{n+1}+(n-1)x^{n+2}+(n-2)x^{n+3}+\ldots.+3x^{2n-2}+2x^{2n-1}+x^{2n}. \end{array} \right.$$

Jede durch die gerade Linie, welche die Mittelpunkte zweier einander gegenüberstehenden Seiten eines Tetraeders mit einander verbindet, gelegte Ebene theilt das Tetraeder in zwei einander gleiche Theile.

In der Ebene eines gewöhnlichen Vierecks den Punkt zu bestimmen, dessen Entfernungen von den vier Ecken des Vierecks, in die zwei den entsprechenden Ecken gegenüberstehenden Seiten multiplicirt, gleiche Producte geben.

Lehrsatz.

In Taf. III. Fig. 16. seien aus den Punkten C und C' mit gleichen Halbmessern zwei Kreise beschrieben, von denen jeder durch den Mittelpunkt des anderen geht. Die Durchschnittspunkte der Centrallinie dieser beiden Kreise mit ihren Peripherieen seien O und O'. In einem beliebigen Punkte T der Peripherie des um C' beschriebenen Kreises ziehe man an denselben eine Berührende, fälle von dem Punkte O auf diese Berührende ein Perpendikel OM, und ziehe CM und CT; so ist der Winkel MCO' dreimal so gross als der Winkel TCO'.

Diesen Satz hat Herr Professor Cesare Toscani in Siena in den „Annali di Scienze matematiche e fisiche, compilati da Barnaba Tortolini. Tomo Terzo. Roma. 1852. p. 276“ bewiesen, und zur Trisection des Winkels angewandt.

Digitized by Google

XIX.

Miscellen.

In Thl. XXXIX. S. 479. habe ich bewiesen, dass

$$a^3+(a+d)^3+(a+2d)^3+\ldots.+(a+nd)^3$$

$$=\frac{\{(a+(n+1)d)(a+nd)\}^2-\{a(a-d)\}^2}{4d}$$

ist, und will hier nachträglich bemerken, dass diese Summenformel sich noch in zweckmässiger Weise transformiren lässt. Es ist nämlich:

$$\{(a+(n+1)d)(a+nd)\}^2-\{a(a-d)\}^2$$

$$=\{(a+(n+1)d)(a+nd)+a(a-d)\}\{(a+(n+1)d)(a+nd)-a(a-d)\},$$

aber, wie man leicht findet:

$$(a+(n+1)d)(a+nd)+a(a-d)=2a^2+2nad+n(n+1)d^2$$

$$=\frac{4a^2+4nad+n^2d^2+2n(n+1)d^2-n^2d^2}{2}$$

$$=\frac{(2a+nd)^2+n(n+2)d^2}{2}$$

und

$$(a+(n+1)d)(a+nd)-a(a-d)=(n+1)d(2a+nd);$$

also nach dem Obigen:

$$a^3+(a+d)^3+(a+2d)^3+\ldots.+(a+nd)^3$$

$$=\frac{(n+1)(2a+nd)\{(2a+nd)^2+n(n+2)d^2\}}{8}.$$

Digitized by Google

Für $a=0$ und $d=1$ erhält man hieraus:

$$1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2,$$

wie bekannt. G.

Es ist, wie man mittelst leichter Rechnung findet:

$$\left\{\frac{n(n+1)}{1.2}\right\}^2=6\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}-6\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}+\frac{n(n+1)}{1.2}.$$

Setzt man nun in dieser Gleichung für n nach und nach 1, 2, 3, 4, ... n und summirt mittelst der bekannten Summirung der figurirten Zahlen, so erhält man auf der Stelle:

$$\left\{\frac{1.2}{1.2}\right\}^2+\left\{\frac{2.3}{1.2}\right\}^2+\left\{\frac{3.4}{1.2}\right\}^2+\left\{\frac{4.5}{1.2}\right\}^2+\ldots+\left\{\frac{n(n+1)}{1.2}\right\}^2$$

$$=6\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{1.2.3.4.5}-6\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

Weiter entwickelt wird diese Summe:

$$\frac{3n^5+15n^4+25n^3+15n^2+2n}{3.4.5},$$

oder:

$$\frac{1}{20}n^5+\frac{1}{4}n^4+\frac{5}{12}n^3+\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{30}n.$$

Der in Thl. XLV. S. 217. mitgetheilte Satz:

> „Die Höhendurchschnittspunkte der vier Dreiecke, die ein vollständiges Viereck darbietet, liegen in **einer** geraden Linie“

ist allerdings nicht neu, und findet sich schon im Archiv. Thl. III. S. 231. in einer Abhandlung von F. Seydewitz, wo er auf folgende Art ausgesprochen wird:

> „Die Höhenpunkte der vier Dreiecke, welche von vier beliebigen Geraden gebildet werden, liegen in einer geraden Linie.“

Zugleich wird dort Herr Heinen als Erfinder genannt, worauf

Digitized by Google

wir hier ganz besonders hinweisen. Der Satz ist a. a. O. aus allgemeineren Betrachtungen abgeleitet worden. Durch die Mittheilung desselben in Thl. XLV. S. 217. sollte vorzüglich die Aufsuchung elementarer geometrischer Beweise veranlasst werden, um den Satz in die geometrischen Elemente aufnehmen zu können, wozu er sich gewiss sehr gut eignet. Die mir bis jetzt gütigst zugesandten Beweise will ich nun im Folgenden, ohne ängstliche Unterscheidung dessen, was diese Beweise vielleicht gemeinschaftlich haben, sämmtlich mittheilen, mit noch anderen in zweien der mir eingesandten Aufsätze enthaltenen geometrischen Bemerkungen. Der Herausgeber.

A.

Beweis des Satzes: Die Höhendurchschnittspunkte der vier Dreiecke, die von vier beliebigen sich durchschneidenden geraden Linien gebildet werden (oder: die ein vollständiges Viereck darbietet), liegen in einer geraden Linie.

Von Herrn Carl Schmidt in Spremberg.

Das vollständige Viereck sei $ABCDEF$ (Taf. III. Fig. 5.); die vier Dreiecke desselben sind ABF, ACD, BCE und DEF. Ich betrachte drei beliebige unter ihnen, etwa die drei ersten. Diesen drei Dreiecken zugleich gehört von den vier Seiten des vollständigen Vierecks nur ABC an; die Punkte A, B, C liegen also in einer geraden Linie und jeder ist Eckpunkt von zweien der betrachteten Dreiecke. Ich ziehe von jedem dieser drei Endpunkte in jedem seiner zwei Dreiecke die Höhen. Diese sechs Höhen sind je zwei einander parallel als Senkrechte zu je einer der drei anderen Seiten des vollständigen Vierecks, und diese drei Paar Parallelen geben zwölf Durchschnittspunkte: drei derselben sind ihre Ausgangspunkte A, B, C, die in gerader Linie liegen; drei sind die „Höhendurchschnittspunkte" der drei betrachteten Dreiecke, nämlich beziehlich Z, Y, X, von denen bewiesen werden soll, dass sie in gerader Linie liegen; die sechs übrigen sind je drei und drei die Ecken zweier von den Höhenlinien gebildeter Dreiecke GHJ und $G_1H_1J_1$. Ich betrachte eins dieser Dreiecke, etwa GHJ, mit Bezug auf die Punkte A, B, C, die auf seinen Seitenlinien liegen, und dann mit Bezug auf die Punkte Z, Y, X, die auch auf seinen Seitenlinien liegen.

Nach dem Satze des Menelaus ist

$$AG.BH.CJ = AJ.BG.CH.$$

Digitized by Google

Ich setze aus den ersten, aus den zweiten und aus den dritten Factoren dieser Producte drei Proportionen an, um auf die Punkte Z, Y, X überzugehen:

$$AG:AJ = ZG:ZH,$$

$$BH:BG = XH:XJ,$$

$$CJ:CH = YJ:YG.$$

Da das Product der ersten Glieder dieser drei Proportionen gleich dem der zweiten ist, so ist auch das Product der dritten Glieder gleich dem der vierten, also:

$$ZG.XH.YJ = ZH.XJ.YG,$$

woraus nach der Umkehrung des Menelaus folgt, dass die drei Punkte Z, Y, X in gerader Linie liegen.

Betrachte ich noch die beiden ersten Dreiecke, ABF und ACD, zusammen mit dem vierten, DEF, dessen Höhendurchschnittspunkt W heissen mag, indem ich dabei als Höhenausgangspunkte die Punkte B, F, E der diesen Dreiecken zugleich zugehörigen Vierecksseite benutze, so ergiebt sich, dass auch Z, Y und W derselben geraden Linie angehören.

Es liegen also alle vier Höhendurchschnittspunkte in einer einzigen geraden Linie.

Der vorstehende Beweis beruht auf den beiden Theoremen, die an die Spitze der Lehre von den Transversalen gestellt werden, dem Satze des Menelaus und der Umkehrung dieses Satzes. Der Satz selber dreht sich um die einfachsten Begriffe und könnte schon im geometrischen Anschauungsunterricht als Probe exacter Zeichnung dienen. Für eine etwaige Behandlung desselben im Unterricht — zu dem Zwecke, unmittelbar nach dem Menelaus und dessen Umkehrung eine Anwendung folgen zu lassen, die den Nutzen dieses Satzes ins Licht stellt, — würde es gerathen sein, den Beweis zu theilen, so dass der an sich schon merkwürdige Satz, der den Kern des Beweises bildet, etwa in folgender Fassung voranginge:

Durchschneiden sich drei Paar Parallelen und liegen drei Durchschnittspunkte, die sämmtlichen sechs Linien angehören, in gerader Linie, so liegen auch diejenigen drei Durchschnittspunkte, welche zu den ersteren die Gegenecken der Parallelogramme bilden, in gerader Linie.

Digitized by Google

B.

Schreiben des Herrn Oberlehrers v. Behr in Königsberg i. Pr. an den Herausgeber

In dem Bd. 45. Heft 2. S. 217. Ihres Archivs finde ich einen Lehrsatz mitgetheilt, den ich vor etwa vier Jahren einmal in der Schule zum Beweis vorgelegt habe. Einer meiner Schüler (Hulisch, jetzt Bauakademiker in Berlin) lieferte mir damals folgenden Beweis, den ich, weil er ganz geschickt ist, mir notirte und Ihnen hiermit zur Verfügung stelle.

Lehrsatz. Die Höhenschnittpunkte der vier Dreiecke, welche ein vollständiges Vierseit darbietet, liegen auf einer geraden Linie.

Der Beweis stützt sich auf den Hilfssatz: Wenn P der Höhenschnittpunkt in einem Dreieck ABC ist, so ist das Stück CP nur von dem Winkel C und der gegenüberliegenden Seite AB abhängig, nemlich $= AB.\mathrm{cotg}\, C$.

In Taf. III. Fig. 6. sei nun P_1 der Höhenpunkt im Dreieck ABC, P_2 im Dreieck BEF, P_3 in ADF und P_4 in DCE. Man kann nun zunächst beweisen, dass die Linie P_1P_2 parallel P_3P_4 sein muss. Es sei nemlich O der Schnittpunkt der Höhen AG und EJ, auf denen die Punkte P_1 und P_2 liegen; da nun offenbar $OP_1 \parallel DP_4$ und $OP_2 \parallel DP_3$, so bleibt nur noch übrig, zu zeigen, dass $OP_1 : OP_2 = DP_4 : DP_3$. Nun sind OP_1 auf AB und OP_2 auf BC unter gleichen Winkeln projicirt in JK und GH; dieselben Strecken sind aber zugleich auch die Projectionen von CE auf AB und von AF auf BC unter gleichen Winkeln. Daher ist schliesslich $OP_1 : OP_2 = CE : AF$. Andererseits ist in dem Dreieck CDE nach dem oben angeführten Hilfssatz $DP_4 = CE.\mathrm{cotg}\, CDE$ und in dem Dreieck ADF ebenso $DP_3 = AF.\mathrm{cotg}\, ADF$; daraus folgt $DP_4 : DP_3 = CE : AF$. Aus dieser und der vorigen Proportion aber ergibt sich

$$OP_1 : OP_2 = DP_4 : DP_3.$$

Hieraus folgt, wie zu Anfang bemerkt wurde, dass $P_1P_2 \parallel P_3P_4$. — Da sich nun ganz eben so beweisen lässt, dass $P_1P_3 \parallel P_2P_4$ und auch $P_1P_4 \parallel P_2P_3$, so müssen alle vier Punkte auf derselben geraden Linie liegen.

Der Lehrsatz von Herrn Alessandro Dorna über ein Parallelepipedum findet seinen Beweis in einer leicht auf der Hand

Digitized by Google

liegenden elementaren Betrachtung des Durchschnitts durch zwei gegenüberliegende parallele Kanten. In Taf. III. Fig. 7. sind AB' und $A'B$ Diagonalen von Parallelogrammen, m und m' ihre Mitten.

Der andere Lehrsatz desselben Mathematikers über das Verhältniss, in welchem sich die drei durch einen Punkt M gehenden Transversalen eines Dreiecks schneiden:

$$\frac{AM}{DM}=\frac{AE}{CE}+\frac{AF}{BF}$$

lässt sich auf folgende Art leicht geben.

Betrachtet man BE in Taf III. Fig. 8. als eine Transversale, welche die Seiten des Dreiecks ACD in den Punkten E, B und M schneidet, so gilt bekanntlich die Gleichung:

$$DM.CB.AE=AM.DB.CE,$$

also:

$$\frac{AM}{DM}=\frac{CB}{DB}\cdot\frac{AE}{CE}=(1+\frac{CD}{BD})\cdot\frac{AE}{CE}$$

$$=\frac{AE}{CE}+\frac{CD.AE}{BD.CE}.$$

Ausserdem gilt bekanntlich auch wegen der drei durch M gehenden Transversalen die Gleichung:

$$CD.AE.BF=BD.CE.AF,$$

d. i.:

$$\frac{CD.AE}{BD.CE}=\frac{AF}{BF}.$$

Dieses in die vorige Gleichung substituirt gibt das Resultat:

$$\frac{AM}{DM}=\frac{AE}{CE}+\frac{AF}{BF}.$$

C.

Ueber verschiedene geometrische Sätze.

Von Herrn Oberlehrer Dr. Stammer an der Realschule in Düsseldorf.

I. Der in Thl. XLV. Nr. IX. S. 217. aufgegebene Satz über die Durchschnittspunkte der Höhen der vier Dreiecke eines voll-

Digitized by Google

ständigen Vierseits lässt sich auf ganz elementarem Wege beweisen.

In dem vollständigen Vierseit $ABCDEF$ (Taf. III. Fig. 9.) betrachten wir zunächst die drei Dreiecke EBC, ABF, EAD, deren Höhendurchschnittspunkte M, N, O sind.

Die beiden Paraellelen $A\alpha$, $E\varepsilon$, von den Transversalen BF, $B\beta$ durchschnitten, liefern $BK:KM=BA:AE$. Ebenso ergeben die Parallelen $B\beta'$, $E\varepsilon'$ mit den Transversalen EB, FA die Proportion:

$$LA:AO = BA:AE.$$

Daher:

$$LA:AO = BK:KM,$$

woraus folgt, dass NOM eine Gerade ist, wenn man NB, $N\alpha$, NO als Strahlen, von den Parallelen LO, BM durchschnitten, ansieht. Auf derselben Geraden liegt natürlich auch der vierte Durchschnittspunkt.

II. Der Satz vom Parallelepiped, dass nämlich, wenn A und A' zwei gegenüberliegende Ecken und AB, AC, AD und $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$ die in denselben zusammenstossenden Kanten sind, die Diagonale AA' von den Ebenen BCD und $B'C'D'$ in drei und von den Schwerpunkten der beiden abgeschnittenen Tetraeder des Parallelepipeds in vier gleiche Theile getheilt wird: ergiebt sich sogleich aus der Betrachtung der Diagonalebene $ABA'B'$, welche alle genannten Theilpunkte enthält.

III. Der einfachste Beweis der Umkehrung des Ptolemäischen Lehrsatzes, der sich ganz an den gewöhnlichen Beweis des ursprünglichen Satzes anschliesst, dürfte der folgende sein.

In Taf. III. Fig. 10. macht man $\angle CBE = \angle ABD$ (wie bei'm directen Satz) und $\angle BCE = \angle BDA$ (welche im Kreisviereck gleich sind). Daher Dreieck $DCE \sim$ Dreieck ADB, folglich:

$$BC:BE = BD:BA, \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$BC:CE = BD:AD. \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

Schreibt man die erste dieser Proportionen $BC:BD=BE:BA$ und bedenkt, dass auch $\angle DBC = \angle ABE$, so folgt, dass Dreieck $DBC \sim$ Dreieck ABE, mithin $DC:BD = AE:AB$. Aus dieser und der Proportion (2) folgt weiter:

$$DC.AB + BC.AD = BD.(AE+CE),$$

welche Gleichung, mit der Annahme verglichen, lehrt, dass E auf AC liegt, wodurch der Satz bewiesen ist.

Digitized by Google

IV. Die Transversalen des Tetraeders und Sätze über die Transversalen im Viereck.

Ich bezeichne die Ecken des Tetraeders mit *A, B, C, D,* die auf den gegenüberliegenden Ebenen befindlichen Fusspunkte der Transversalen mit α, β, γ, δ, und endlich die Theilpunkte der Kanten *AB, AC, BC,* u. s. w. mit (*ab*), (*ac*), (*bc*), u. s. w.

Betrachtet man jede der vier Ecktransversalen als gemeinschaftliche Durchschnittslinie von drei Ebenen, welche durch die in der Ecke zusammenstossenden Kanten gelegt sind, so erkennt man zunächst, dass die Spuren von je drei zusammengehörigen Ebenen auf der der Ecke gegenüberliegenden Tetraederfläche die drei in Einem Punkte sich schneidenden Ecktransversalen des Dreiecks sind. Ein System von vier in einem Punkte sich schneidenden Ecktransversalen des Tetraeders erhält man demnach, wenn man durch einen Punkt im Raume und die Kanten des Tetraeders die sechs Ebenen legt. Als allgemeinste Bedingung für die Transversalen kann man daher die folgende aufstellen:

> Die vier Durchschnittspunkte α, β, γ, δ der Ecktransversalen des Tetraeders mit den gegenüberliegenden Ebenen müssen so beschaffen sein, dass die in diesen Ebenen durch die Punkte gezogenen Ecktransversalen der Dreiecke die Kanten des Tetraeders zu je zweien in denselben Punkten (*ab*), (*ac*) u. s. w. treffen.

Durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt der Tetraedertransversalen gehen auch die drei Geraden, welche die Theilpunkte von je zwei gegenüberliegenden Kanten verbinden. Von den sechs Theilpunkten sind drei willkürlich, welche aber weder auf den Seiten derselben Fläche, noch auf den Kanten derselben Ecke liegen dürfen. Die anderen erhält man durch Construction oder mit Hülfe der bekannten Gleichung für die Transversalen des Dreiecks.

Einen besondern Fall bildet das Tetraeder, in welchem die gegenüberliegenden Kanten senkrecht auf einander stehen, und welches man dadurch erhält, dass man die vierte Fläche senkrecht auf die Durchschnittslinie der Ebenen legt, die durch die drei Kanten der gegenüberliegenden Ecke senkrecht auf deren Seiten gelegt sind. Der schon von Heis in seiner Stereometrie und in diesem Archiv (Theil XXXI. Seite 42.) bewiesene Satz, dass die Höhen eines solchen Tetraeders sich in Einem Punkte schneiden, ist ein besonderer Fall des obigen allgemeinen Satzes.

Digitized by Google

Es folgt aber daraus auch, dass in diesem Tetraeder sich die Linien der kürzesten Entfernungen der gegenüberliegenden Kanten in Einem Punkte schneiden.

Betrachtet man die Projektion des Tetraeders als eine ebene Figur, so gelten für dieselbe die für's Tetraeder bewiesenen projektivischen Eigenschaften. Die Ecken des Tetraeders sind jetzt die Ecken eines vollständigen Vierecks (nach Steiner, zum Unterschied von Vierseit), die Kanten sind die sechs Seiten des Vierecks u. s. w. Die Sätze heissen jetzt: Zieht man in einem der vier Dreiecke, welche zu Ecken je drei der Ecken des vollständigen Vierseits haben, zwei beliebige Ecktransversalen und in einem anderen Dreieck eine Ecktransversale, so erhält man für alle vier Dreiecke je ein System von drei sich in Einem Punkte schneidenden Ecktransversalen der Art, dass jede der sechs Seiten des Vierecks von je zwei Transversalen in demselben Punkte getroffen wird (auch direkt zu beweisen). Die vier Geraden, von welchen jede den Durchschnittspunkt der Transversalen eines Dreiecks mit dem vierten Eckpunkt des Vierecks verbindet, schneiden sich in Einem Punkte. Durch denselben Punkt gehen auch die Geraden, welche die Theilpunkte von je zwei gegenüberliegenden Seiten des Vierecks verbinden.

Ein besonderer Fall des letzten Satzes ist der bekannte Lehrsatz, dass sich die Verbindungslinien der Mitten der gegenüberliegenden Seiten eines gewöhnlichen Vierecks und der Mitten der Diagonalen in Einem Punkte schneiden.

Vermöge des Prinzips der Dualität erhält man fürs vollständige Vierseit folgenden Satz: Nimmt man auf zwei Seiten eines der vier Dreiecke, welche von je drei Seiten des Vierseits gebildet werden, zwei beliebige Punkte an und legt durch dieselben eine Gerade, so bestimmt diese auf der dritten Seite einen neuen Punkt. Die Geraden, welche diese Punkte mit den Gegenecken verbinden, bestimmen auf den anderen gegenüberliegenden Seiten neue Punkte, durch welche wieder, wenn noch ein Punkt beliebig angenommen worden, drei neue Transversalen bestimmt werden. Auf diese Weise erhält man vier Dreieckstransversalen der Art, dass jede der sechs Ecken des Vierseits mit zwei Theilpunkten auf einer Geraden liegt. Dann liegen die vier Punkte, von welchen jeder der Durchschnitt einer Vierecksseite mit der Transversale des nicht zu der Seite gehörigen Dreiecks ist, in einer Geraden, auf welcher sich auch die sechs durch die Ecken gehenden Geraden zu je zwei schneiden.

Diese Sätze sind natürlich nicht die allgemeinsten, die sich

Digitized by Google

über das Viereck und das Vierseit aufstellen lassen, wie schon ihre Herleitung ergiebt, insofern der Durchschnittspunkt zweier Geraden in der Ebene nicht nothwendig die Projektion des Durchschnittspunktes im Raume der projicirten Geraden ist.

Bemerkung über die Berechnung des Flächeninhalts geradliniger Figuren durch Trapezia.

Von dem Herausgeber.

Vielleicht mögen die folgenden einfachen Bemerkungen über die bei geodätischen Rechnungen so oft vorkommende Berechnung des Flächeninhalts geradliniger Figuren durch Trapezia nicht ganz ohne Interesse sein.

In Taf. III. Fig. 11. seien AA' und BB' auf verschiedenen Seiten von AB auf dieser Geraden senkrecht, und hierauf werde $A'B'$ gezogen. Dann ist:

$$2(\Delta\, ACA' - \Delta\, BCB') = AA'.AC - BB'.BC;$$

aber:

$$AA' : BB' = AC : BC$$

oder:

$$AA'.BC = BB'.AC,$$

also:

$$\begin{aligned} 2(\Delta ACA' - \Delta BCB') &= AA'.AC + AA'.BC - BB'.AC - BB'.BC \\ &= AA'.(AC + BC) - BB'.(AC + BC) \\ &= (AA' - BB)(AC + BC), \end{aligned}$$

und folglich:

$$1) \; . \; . \; . \; . \; 2(\Delta ACA' - \Delta BCB') = (AA' - BB').AB,$$

oder:

$$2) \; . \; . \; . \; . \; 2(\Delta BCB' - \Delta ACA') = (BB' - AA').AB.$$

In Taf. III. Fig. 12. ist nun, wenn durch die Figur

$$abcdef\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon,$$

deren Flächeninhalt wir durch F bezeichnen wollen, die beliebige Axe MN gelegt ist, und von den Ecken der Figur auf dieselbe wie gewöhnlich Perpendikel gefällt worden sind:

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
2F = \; & (aa'+bb').a'b' && +(\alpha\alpha'+\beta\beta').\alpha'\beta' \\
& +(bb'+cc').b'c' && +(\beta\beta'+\gamma\gamma').\beta'\gamma' \\
& +(cc'+dd').c'd' && +(\gamma\gamma'+\delta\delta').\gamma'\delta' \\
& +(dd'+ee').d'e' && +(\delta\delta'+\varepsilon\varepsilon').\delta'\varepsilon' \\
& +(ee'+ff').e'f' && \\
& +2(\Delta ama'-\Delta am\alpha')+2(\Delta \varepsilon n\varepsilon'-\Delta fnf'),
\end{aligned}
$$

also nach 1) oder 2):

$$
\begin{aligned}
3)\;\ldots\; 2F = \; & (a\alpha'+bb').a'b' && +(\alpha\alpha'+\beta\beta').\alpha'\beta' \\
& +(bb'+cc').b'c' && +(\beta\beta'+\gamma\gamma').\beta'\gamma' \\
& +(cc'+dd').c'd' && +(\gamma\gamma'+\delta\delta').\gamma'\delta' \\
& +(dd'+ee').d'e' && +(\delta\delta'+\varepsilon\varepsilon').\delta'\varepsilon' \\
& +(ee'+ff').e'f' && \\
& +(aa'-\alpha\alpha').\alpha'a' && +(\varepsilon\varepsilon'-ff').\varepsilon'f'.
\end{aligned}
$$

Man sieht hieraus deutlich, wie man in solchen Fällen wie der obige zu rechnen hat; auf weitere Erörterungen über vorstehende Formel und Verallgemeinerungen derselben mittelst des Positiven und Negativen wollen wir uns nicht einlassen, da das Obige für die Praxis vollständig genügt.

Zur geometrischen Construction der vierten und der mittleren Proportionale.

Von Herrn Dr. K. Weihrauch in Arensburg auf der Insel Oesel in Livland.

Die gewöhnlichen Lösungen der Aufgabe, zu drei gegebenen Linien die vierte, zu zwei gegebenen die mittlere Proportionale zu finden, für erstere durch Auftragen der Linien auf die Schenkel eines beliebigen Winkels und Parallelenziehen, für letztere durch Construction eines rechtwinkligen Dreiecks, stehen in keinem Zusammenhange. In didaktischer Hinsicht muss es angenehm sein, eine Lösung angeben zu können, die beide Fälle umfasst.

Sei abc (Taf. III. Fig. 13.) ein Dreieck, in dem die Höhe be gezogen ist. Ein Beweis des Satzes, dass die drei Höhen sich

in einem Punkte schneiden, besteht bekanntlich darin, dass die Grösse der Abschnitte *eo*, welche durch die zweite und die dritte Höhe *ad* und *cf* auf *be* hervorgebracht werden, sich beide Male $=\frac{ae.ec}{be}$ ergibt.

Sind also die Linien *m*, *n*, *p* gegeben, so trage man an einen Endpunkt von *n* die Linie *p* als Verlängerung, die Linie *m* als Normale auf $p+n$, verbinde die Endpunkte und ziehe im entstandenen Dreieck eine zweite Höhe; der untere Abschnitt *x* auf der ersten Höhe ist dann die gesuchte vierte Proportionale zu *m*, *n*, *p*. (Taf. III. Fig. 14. und Fig. 15.).

Fällt der Punkt *o* (Taf. III. Fig. 13.) mit *b* zusammen, wie es beim rechtwinkligen Dreieck geschieht, so wird $m=x$; der Ort des Scheitels wird durch einen Halbkreis über $n+p$ bestimmt, und man erfährt die Grösse von *m* und *x* durch eine aus dem *n* und *p* gemeinsamen Punkte gezogene Normale, was eine der bekannten Constructionen für die mittlere Proportionale ist. Auch die andere, vermittelst der Kathete und des anliegenden Abschnittes, erlaubt einen ähnlichen Zusammenhang nachzuweisen. In Taf. III. Fig. 13. ist $ab:ac=ae:af$, was für die vierte Proportionale abermals eine leichte Construction an die Hand gibt; fällt *f* mit *b* zusammen, wie beim rechtwinkligen Dreieck, so kommt die genannte zweite Lösung zum Vorschein.

Ueber einen Satz von der Hyperbel.

Von dem Herausgeber.

So viel ich weiss, hat Brianchon den Satz gefunden, dass der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Höhen eines in eine gleichseitige Hyperbel beschriebenen Dreiecks jederzeit ein Punkt derselben Hyperbel ist. Analytisch lässt sich dieser Satz, der nach meiner Meinung zweckmässig als Uebung in der Theorie der Kegelschnitte und der analytischen Geometrie benutzt werden kann, ohne Schwierigkeit auf folgende Art beweisen, wobei es mir nicht darauf ankommt, wenn die folgende, jedenfalls weniger bekannte Darstellung, schon anderwärts gegeben sein sollte, was

Digitized by Google

ich nicht weiss, und auch in diesem Augenblicke nicht weiter untersuchen mag.

Wir legen die beiden auf einander senkrecht stehenden Asymptoten der gleichseitigen Hyperbel als Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy zu Grunde; dann ist, wenn wir die sogenannte Potenz der Hyperbel durch $\overline{\omega}^2$ bezeichnen, die Gleichung derselben:

$$xy = \overline{\omega}^2.$$

Ein beliebiges in die Hyperbel beschriebenes Dreieck sei $A_0A_1A_2$, und die Coordinaten seiner Ecken A_0, A_1, A_2 seien beziehungsweise x_0, y_0; x_1, y_1; x_2, y_2; so ist:

$$x_0y_0 = \overline{\omega}^2, \quad x_1y_1 = \overline{\omega}^2, \quad x_2y_2 = \overline{\omega}^2.$$

Die Gleichungen der Seiten A_0A_2 und A_1A_2 sind:

$$y - y_0 = \frac{y_0 - y_2}{x_0 - x_2}(x - x_0),$$

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1);$$

also sind die Gleichungen der von A_0 auf A_1A_2 und von A_1 auf A_0A_2 gefällten Perpendikel:

$$y - y_0 = -\frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}(x - x_0),$$

$$y - y_1 = -\frac{x_0 - x_2}{y_0 - y_2}(x - x_1);$$

und aus diesen beiden Gleichungen müssen x, y bestimmt werden, um den Höhendurchschnitt (xy) zu finden. Nun ist aber:

$$y_0 = \frac{\overline{\omega}^2}{x_0}, \quad y_1 = \frac{\overline{\omega}^2}{x_1}, \quad y_2 = \frac{\overline{\omega}^2}{x_2}$$

und:

$$x_0 = \frac{\overline{\omega}^2}{y_0}, \quad x_1 = \frac{\overline{\omega}^2}{y_1}, \quad x_2 = \frac{\overline{\omega}^2}{y_2};$$

also nach dem Obigen:

$$y - y_0 = -\frac{x_1 - x_2}{\frac{\overline{\omega}^2}{x_1} - \frac{\overline{\omega}^2}{x_2}}(x - x_0) = \frac{x_1x_2}{\overline{\omega}^2}(x - x_0),$$

$$y - y_1 = -\frac{x_0 - x_2}{\frac{\overline{\omega}^2}{x_0} - \frac{\overline{\omega}^2}{x_2}}(x - x_1) = \frac{x_0x_2}{\overline{\omega}^2}(x - x_1);$$

Digitized by Google

und:

$$y - y_0 = -\frac{\frac{\overline{\omega}^2}{y_1} - \frac{\overline{\omega}^2}{y_2}}{y_1 - y_2}(x - x_0) = \frac{\overline{\omega}^2}{y_1 y_2}(x - x_0),$$

$$y - y_1 = -\frac{\frac{\overline{\omega}^2}{y_0} - \frac{\overline{\omega}^2}{y_2}}{y_0 - y_2}(x - x_1) = \frac{\overline{\omega}^2}{y_0 y_2}(x - x_1).$$

Wir haben also die Gleichungen:

$$y - y_0 = \frac{x_1 x_2}{\overline{\omega}^2}(x - x_0), \quad y - y_1 = \frac{x_0 x_2}{\overline{\omega}^2}(x - x_1).$$

und:

$$x - x_0 = \frac{y_1 y_2}{\overline{\omega}^2}(y - y_0), \quad x - x_1 = \frac{y_0 y_2}{\overline{\omega}^2}(y - y_1);$$

aus denen man durch Subtraction die Gleichungen:

$$y_1 - y_0 = \frac{(x_1 - x_0)\, x_2}{\overline{\omega}^2}x,$$

$$x_1 - x_0 = \frac{(y_1 - y_0)\, y_2}{\overline{\omega}^2}y;$$

also:

$$\frac{\overline{\omega}^2}{x_1} - \frac{\overline{\omega}^2}{x_0} = \frac{(x_1 - x_0)\, x_2}{\overline{\omega}^2}x,$$

$$\frac{\overline{\omega}^2}{y_1} - \frac{\overline{\omega}^2}{y_0} = \frac{(y_1 - y_0) y_2}{\overline{\omega}^2}y;$$

folglich:

$$\frac{x_2 x}{\overline{\omega}^2} = -\frac{\overline{\omega}^2}{x_0 x_1}, \quad \frac{y_2 y}{\overline{\omega}^2} = -\frac{\overline{\omega}^2}{y_0 y_1};$$

also:

$$x_0 x_1 x_2 x = -\overline{\omega}^4, \quad y_0 y_1 y_2 y = -\overline{\omega}^4$$

erhält, welche Gleichungen an sich bemerkenswerth sind. Durch Multiplication ergiebt sich:

$$x_0 y_0 . x_1 y_1 . x_2 y_2 . xy = \overline{\omega}^8,$$

also nach dem Obigen:

$$\overline{\omega}^2 \overline{\omega}^2 \overline{\omega}^2 xy = \overline{\omega}^6 xy = \overline{\omega}^8,$$

folglich:

$$xy = \overline{\omega}^2,$$

so dass also der Punkt (xy), nämlich der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Höhen des in die Hyperbel beschriebenen Dreiecks $A_0 A_1 A_2$, ein Punkt derselben Hyperbel ist, wie behauptet wurde.

Digitized by Google

Einige Bemerkungen über das von den, von den Spitzen eines Dreiecks nach den Mittelpunkten der Gegenseiten gezogenen Transversalen als Seiten gebildete Dreieck.

Von dem Herausgeber.

Das von den Transversalen, welche die Spitzen A, B, C eines Dreiecks ABC mit den Mittelpunkten der Gegenseiten a, b, c verbinden, die beziehungsweise durch α, β, γ bezeichnet werden mögen, gebildete Dreieck ist schon oft betrachtet worden, auch von mir selbst analytisch und rein geometrisch in meinen Supplementen zum mathematischen Wörterbuche. Thl. I. S. 704. Die in dem trefflichen Giornale di Matematiche, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Anno IV. Settembre e Ottobre 1866. p. 293. vorgelegte „Questione: Essendo dato un triangolo ABC, si formi colle mediane un secondo triangolo, dimostrare: che l'area del triangolo, che ha per lati le mediane, ha un rapporto costante coll'area del triangolo ABC. (Mogni).“ veranlasste mich zu einigen neuen gelegentlichen Betrachtungen über diesen Gegenstand, von denen ich nachstehend das Wesentliche mittheilen werde, weil der eine oder andere Ausdruck vielleicht nicht ganz ohne Interesse sein dürfte, oder zu Uebungen für Schüler benutzt werden könnte. Alle im Folgenden in Anwendung gebrachten Formeln findet man in meiner Abhandlung Theil XXXVI. Nr. XVIII., auf welche daher hier ein für alle Mal verwiesen wird; auch werden hier ganz dieselben Zeichen gebraucht wie dort und ganz das nämliche Coordinatensystem zu Grunde gelegt, worüber daher hier nichts weiter zu sagen ist.

Die Coordinaten von C sind:

$$2R\cos A\sin B,\quad 2R\sin A\sin B;$$

die Coordinaten des Mittelpunkts der Seite AB oder c sind:

$$R\sin C,\ 0;$$

also ist:

$$\gamma^2 = R^2(2\cos A\sin B - \sin C)^2 + 4R^2\sin A^2\sin B^2,$$

woraus man mit Rücksicht darauf, dass

$$A+B+C=180^0$$

ist, leicht findet:

Digitized by Google

$$\gamma^2 = R^2(\sin C^2 + 4\sin A \sin B \cos C).$$

Also ist überhaupt:

$$1) \ldots \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha^2 &= R^2(\sin A^2 + 4\cos A \sin B \sin C), \\ \beta^2 &= R^2(\sin B^2 + 4\sin A \cos B \sin C), \\ \gamma^2 &= R^2(\sin C^2 + 4\sin A \sin B \cos C). \end{aligned} \right.$$

Bekanntlich ist:

$$\cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C + \sin A \sin B \cos C$$
$$= \tfrac{1}{2}(\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2),$$

also nach 1):

$$2) \ldots \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 3R^2(\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2),$$

oder:

$$3) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$$
$$= 6R^2(\cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C + \sin A \sin B \cos C).$$

Bekanntlich ist:

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R};$$

also:

$$\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R^2},$$

folglich nach 2):

$$4) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}.$$

Aus 1) erhält man mittelst der leicht zu beweisenden Relation:

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A \sin B \sin C$$

ohne Schwierigkeit:

$$5) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4}{R^4}$$
$$= \sin A^4 + \sin B^4 + \sin C^4 + 16\sin A^2 \sin B^2 \sin C^2$$
$$+ 16\cos A^2 \sin B^2 \sin C^2$$
$$+ 16\sin A^2 \cos B^2 \sin C^2$$
$$+ 16\sin A^2 \sin B^2 \cos C^2;$$

und weil nun nach 2)

$$\frac{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2}{R^4} = 9(\sin A^2 + \sin B^2 + \sin C^2)$$

ist, so ist:

$$\frac{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2-2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)}{R^4}$$

$$\begin{aligned}=7(\sin A^4+\sin B^4+\sin C^4)&+2\sin A^2\sin B^2(9-16\cos C^2)\\&+2\sin B^2\sin C^2(9-16\cos A^2)\\&+2\sin C^2\sin A^2(9-16\cos B^2)\\&-32\sin A^2\sin B^2\sin C^2.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir den Inhalt des aus den Transversalen α, β, γ als Seiten construirten Dreiecks durch $\varDelta$, so ist bekanntlich:

$$16\varDelta^2=2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4,$$

also:

$$16\varDelta^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)^2-2(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4),$$

folglich nach der obigen Gleichung:

6)

$$\begin{aligned}\frac{16\varDelta^2}{R^4}=7(\sin A^4+\sin B^4+\sin C^4)&+2\sin A^2\sin B^2(9-16\cos C^2)\\&+2\sin B^2\sin C^2(9-16\cos A^2)\\&+2\sin C^2\sin A^2(9-16\cos B^2)\\&-32\sin A^2\sin B^2\sin C^2.\end{aligned}$$

Setzt man aber in dieser Formel

$\cos C^2=1-\sin C^2,\quad \cos A^2=1-\sin A^2,\quad \cos B^2=1-\sin C^2;$

so wird dieselbe, wie man sogleich übersieht:

7) . . . . $\dfrac{16\varDelta^2}{R^4}$

$$=7(\sin A^4+\sin B^4+\sin C^4-2\sin A^2\sin B^2-2\sin B^2\sin C^2-2\sin C^2\sin A^2)$$
$$+64\sin A^2\sin B^2\sin C^2,$$

also, weil

$$\sin A=\frac{a}{2R},\quad \sin B=\frac{b}{2R},\quad \sin C=\frac{c}{2R}$$

ist:

$$\frac{16\varDelta^2}{R^4}=\frac{7(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2)}{16R^4}+64\sin A^2\sin B^2\sin C^2.$$

Bezeichnen wir den Inhalt des gegebenen Dreiecks ABC durch D, so ist bekanntlich:

$$16D^2=2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2-a^4-b^4-c^4$$

Digitized by Google

und

$$D = 2R^2 \sin A \sin B \sin C;$$

also ist nach obiger Gleichung:

$$\frac{16\Delta^2}{R^4} = -\frac{7D^2}{R^4} + \frac{16D^2}{R^4},$$

folglich:

$$16\Delta^2 = 9D^2,$$

oder:

8) . . . . $$4\Delta = 3D, \quad \frac{\Delta}{D} = \frac{3}{4};$$

wie bekannt.

Nach 4) ist also:

9) . . . . $$\frac{\Delta}{D} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Weil

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \sin C = \frac{c}{2R}$$

ist; so ist, wie man leicht findet:

$$\sin A^2 + 4\cos A \sin B \sin C = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4R^2},$$

also nach 1):

10)

$$\alpha^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}, \quad \beta^2 = \frac{2(c^2 + a^2) - b^2}{4}, \quad \gamma^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4};$$

wie bekannt.

Bezeichnet man die den Seiten α, β, γ des von den Transversalen gebildeten Dreiecks gegenüberstehenden Winkel dieses Dreiecks durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$; so ist:

$$\cos \mathfrak{A} = \frac{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2}{2\beta\gamma},$$

und folglich nach 10), wie man leicht findet:

11) . . . . $$\begin{cases} \cos \mathfrak{A} = \dfrac{5a^2 - (b^2 + c^2)}{2\sqrt{\{2(c^2+a^2) - b^2\}\{2(a^2+b^2) - c^2\}}}, \\ \cos \mathfrak{B} = \dfrac{5b^2 - (c^2 + a^2)}{2\sqrt{\{2(a^2+b^2) - c^2\}\{2(b^2+c^2) - a^2\}}}, \\ \cos \mathfrak{C} = \dfrac{5c^2 - (a^2 + b^2)}{2\sqrt{\{2(b^2+c^2) - a^2\}\{2(c^2+a^2) - b^2\}}}. \end{cases}$$

Digitized by Google

Bezeichnen wir den Halbmesser des um das von den Transversalen gebildete Dreieck beschriebenen Kreises durch $\mathfrak{R}$, so ist:

$$\alpha^2 = 4\mathfrak{R}^2 \sin\mathfrak{A}^2 = R^2(\sin A^2 + 4\cos A \sin B \sin C),$$
$$\beta^2 = 4\mathfrak{R}^2 \sin\mathfrak{B}^2 = R^2(\sin B^2 + 4\sin A \cos B \sin C),$$
$$\gamma^2 = 4\mathfrak{R}^2 \sin\mathfrak{C}^2 = R^2(\sin C^2 + 4\sin A \sin B \cos C);$$

und da nun

$$\Delta = 2\mathfrak{R}^2 \sin\mathfrak{A} \sin\mathfrak{B} \sin\mathfrak{C},$$
$$D = 2R^2 \sin A \sin B \sin C,$$
$$4\Delta = 3D$$

ist; so ist, wie man leicht findet:

12)
$$\frac{R}{\mathfrak{R}} = \frac{6\sin A \sin B \sin C}{\sqrt{\left\{\begin{array}{r}(\sin A^2+4\cos A \sin B \sin C)(\sin B^2+4\sin A \cos B \sin C)\\ \times(\sin C^2+4\sin A \sin B \cos C)\end{array}\right\}}},$$

oder nach dem Obigen:

13)
$$\frac{R}{\mathfrak{R}} = \frac{6abc}{\sqrt{\{2(b^2+c^2)-a^2\}\{2(c^2+a^2)-b^2\}\{2(a^2+b^2)-c^2\}}}.$$

Weil nun nach dem Obigen:

$$\sin\mathfrak{A} = \frac{R}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{\sqrt{\sin A^2 + 4\cos A \sin B \sin C}}{2}$$
$$= \frac{R}{\mathfrak{R}} \cdot \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{4R}$$

ist, so ist nach 13):

$$14)\ldots\left\{\begin{array}{l}\sin\mathfrak{A} = \dfrac{3abc}{2R\sqrt{\{2(c^2+a^2)-b^2\}\{2(a^2+b^2)-c^2\}}},\\[2ex] \sin\mathfrak{B} = \dfrac{3abc}{2R\sqrt{\{2(a^2+b^2)-c^2\}\{2(b^2+c^2)-a^2\}}},\\[2ex] \sin\mathfrak{C} = \dfrac{3abc}{2R\sqrt{\{2(b^2+c^2)-a^2\}\{2(c^2+a^2)-b^2\}}};\end{array}\right.$$

oder, weil bekanntlich

$$\frac{abc}{4R} = D$$

ist:

Digitized by Google

$$15) \ldots \begin{cases} \sin \mathfrak{A} = \dfrac{6D}{\sqrt{\{2(c^2+a^2)-b^2\}\{2(a^2+b^2)-c^2\}}}, \\ \sin \mathfrak{B} = \dfrac{6D}{\sqrt{\{2(a^2+b^2)-c^2\}\{2(b^2+c^2)-a^2\}}}, \\ \sin \mathfrak{C} = \dfrac{6D}{\sqrt{\{2(b^2+c^2)-a^2\}\{2(c^2+a^2)-b^2\}}}. \end{cases}$$

Nach 15) und 11) ist:

$$16) \ldots\ldots \begin{cases} \tang \mathfrak{A} = \dfrac{12D}{5a^2-(b^2+c^2)}, \\ \tang \mathfrak{B} = \dfrac{12D}{5b^2-(c^2+a^2)}, \\ \tang \mathfrak{C} = \dfrac{12D}{5c^2-(a^2+b^2)}; \end{cases}$$

womit wir diese Bemerkungen schliessen wollen.

Bemerkungen zur elementaren Berechnung des Kreisumfangs.

Von dem Herausgeber.

Der nächste Zweck der folgenden Bemerkungen ist: eine Anwendung des Binomialtheorems zu zeigen, die vielleicht bei'm Unterrichte nützliche Verwendung finden kann.

Den Halbmesser des Kreises wollen wir durch R bezeichnen; die Seite und den Umfang eines in den Kreis beschriebenen regulären $n$ecks bezeichnen wir durch s_n und u_n, und die Seite und den Umfang eines um den Kreis beschriebenen regulären $n$ecks durch S_n und U_n; der sogenannte kleine Halbmesser des in den Kreis beschriebenen regulären $n$ecks werde durch r_n bezeichnet.

Aus der leicht durch sich selbst verständlichen Figur Taf. VII. Fig. 6. erhellet sogleich die Richtigkeit der folgenden Proportion:

$$\tfrac{1}{2}S_n : \tfrac{1}{2}s_n = S_n : s_n = R : r_n;$$

und weil augenscheinlich die Dreiecke CAE und AOB einander ähnlich sind, so ist:

$$\tfrac{1}{2}S_n - \tfrac{1}{2}S_{2n} : \tfrac{1}{2}S_{2n} = S_n - S_{2n} : S_{2n} = R : r_n;$$

also ist, wenn man dies mit der vorhergehenden Proportion vergleicht:

Digitized by Google

$$S_n : s_n = S_n - S_{2n} : S_{2n},$$

folglich:

$$S_n + s_n : s_n = S_n : S_{2n},$$

woraus sich die Gleichung:

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad S_{2n} = \frac{s_n S_n}{S_n + s_n}$$

ergiebt; weil nun aber:

$$S_{2n} = \frac{U_{2n}}{2n}, \quad s_n = \frac{u_n}{n}, \quad S_n = \frac{U_n}{n}$$

ist, so ist:

$$2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad U_{2n} = \frac{2u_n U_n}{U_n + u_n}.$$

Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke *DEF* und *ABD* folgt ferner:

$$\tfrac{1}{2}S_{2n} : \tfrac{1}{2}s_{2n} = S_{2n} : s_{2n} = s_{2n} : \tfrac{1}{2}s_n,$$

also:

$$3) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2s_{2n}^2 = s_n S_{2n};$$

und folglich auf ganz ähnliche Art wie vorher, weil $s_{2n} = \frac{u_{2n}}{2n}$ ist:

$$4) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad u_{2n}^2 = u_n U_{2n}.$$

Setzen wir nun:

$$5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad q_n = \frac{U_n - u_n}{U_n + u_n},$$

so ist:

$$1 + q_n = \frac{2U_n}{U_n + u_n}, \quad 1 - q_n = \frac{2u_n}{U_n + u_n};$$

folglich nach 2):

$$U_{2n} = u_n(1 + q_n),$$

also nach 4):

$$u_{2n}^2 = u_n^2(1 + q_n),$$

so dass wir jetzt die folgenden Formeln haben:

$$6) \quad \ldots \quad u_{2n} = u_n\sqrt{1 + q_n}, \quad U_{2n} = u_n(1 + q_n);$$

oder auch:

$$7) \quad \ldots \quad u_{2n} = u_n\sqrt{1 + q_n}, \quad U_{2n} = u_{2n}\sqrt{1 + q_n}.$$

In ähnlicher Bezeichnung wie oben ist:

$$q_{2n} = \frac{U_{2n} - u_{2n}}{U_{2n} + u_{2n}},$$

also offenbar nach 7):

8) . . . . $$q_{2n} = \frac{u_{2n} - u_n}{u_{2n} + u_n}.$$

Wenn man nun bei der annähernden Berechnung des Kreisumfangs von den Umfängen u_n und U_n der inneren und äusseren regulären $n$ecke ausgeht, so kann man die Rechnung auf verschiedene Arten anordnen, etwa auf folgende Art:

9)

$$q_n = \frac{U_n - u_n}{U_n + u_n},$$

$$u_{2n} = u_n\sqrt{1 + q_n}, \quad U_{2n} = u_n(1 + q_n);$$

$$q_{2n} = \frac{U_{2n} - u_{2n}}{U_{2n} + u_{2n}} = \frac{u_{2n} - u_n}{u_{2n} + u_n},$$

$$u_{4n} = u_{2n}\sqrt{1 + q_{2n}}, \quad U_{4n} = u_{2n}(1 + q_{2n});$$

$$q_{4n} = \frac{U_{4n} - u_{4n}}{U_{4n} + u_{4n}} = \frac{u_{4n} - u_{2n}}{u_{4n} + u_{2n}},$$

$$u_{8n} = u_{4n}\sqrt{1 + q_{4n}}, \quad U_{8n} = u_{4n}(1 + q_{4n});$$

$$q_{8n} = \frac{U_{8n} - u_{8n}}{U_{8n} + u_{8n}} = \frac{u_{8n} - u_{4n}}{u_{8n} + u_{4n}},$$

$$u_{16n} = u_{8n}\sqrt{1 + q_{8n}}, \quad U_{16n} = u_{8n}(1 + q_{8n});$$

u. s. w.

Man braucht aber bloss den Umfang u_n des inneren $n$ecks zu Grunde zu legen, weil sich daraus U_n berechnen lässt. Es ist nämlich offenbar:

$$S_n : s_n = R : r_n, \quad \text{also auch} \quad U_n : u_n = R : r_n;$$

nun ist aber:

$$r_n^2 = R^2 - \tfrac{1}{4}s_n^2 = R^2 - \frac{u_n^2}{4n^2} = R^2\left(1 - \frac{u_n^2}{4n^2 R^2}\right),$$

folglich:

$$U_n : u_n = 1 : \sqrt{1 - \frac{u_n^2}{4n^2 R^2}},$$

Digitized by Google

also:

$$10) \ldots\ldots\ldots U_n = \frac{u_n}{\sqrt{1-\frac{u_n^2}{4n^2R^2}}},$$

und wenn man, wie es bei allen diesen Rechnungen bekanntlich das Vortheilhafteste ist, $R=1$ setzt:

$$11) \ldots U_n = \frac{u_n}{\sqrt{1-\left(\frac{u_n}{2n}\right)^2}} = \frac{u_n}{\sqrt{(1-\frac{u_n}{2n})(1+\frac{u_n}{2n})}}.$$

Weil die halbe Seite eines jeden in den Kreis beschriebenen regulären Vielecks offenbar kleiner als der Halbmesser ist, so ist:

$$\tfrac{1}{2}.\frac{u_n}{n} < 1, \quad \frac{u_n}{2n} < 1, \quad \left(\frac{u_n}{2n}\right)^2 < 1;$$

und weil nun nach Vorstehendem:

$$U_n = u_n\left\{1-\left(\frac{u_n}{2n}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

ist, so kann man sich bei der Berechnung von U_n aus u_n zweckmässig des Binomialtheorems bedienen, wodurch man in der bekannten Bezeichnung der Binomialcoefficienten den folgenden Ausdruck erhält:

$$U_n = u_n\{1-(-\tfrac{1}{2})_1\cdot\left(\frac{u_n}{2n}\right)^2+(-\tfrac{1}{2})_2\cdot\left(\frac{u_n}{2n}\right)^4-(-\tfrac{1}{2})_3\cdot\left(\frac{u_n}{2n}\right)^6+\ldots\}.$$

Nun ist aber bekanntlich:

$$(-\tfrac{1}{2})_1 = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\tfrac{1}{2},$$

$$(-\tfrac{1}{2})_2 = \frac{-\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}-1}{1.2} = +\frac{1.3}{2.4},$$

$$(-\tfrac{1}{2})_3 = \frac{-\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}-1.-\frac{1}{2}-2}{1.2.3} = -\frac{1.3.5}{2.4.6},$$

$$(-\tfrac{1}{2})_4 = \frac{-\frac{1}{2}.-\frac{1}{2}-1.-\frac{1}{2}-2.-\frac{1}{2}-3}{1.2.3.4} = +\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8},$$

u. s. w.,

also:

$$12) \ldots U_n = u_n\left\{\begin{array}{l}1+\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{u_n}{2n}\right)^2+\frac{1.3}{2.4}\cdot\left(\frac{u_n}{2n}\right)^4\\ \quad+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\left(\frac{u_n}{2n}\right)^6\\ \quad+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\left(\frac{u_n}{2n}\right)^8\\ \quad+\ldots\ldots\end{array}\right\}.$$

Digitized by Google

Wenn man die vorstehende convergirende Reihe bei einem gewissen Gliede abbricht, also etwa:

$$13)\quad U_n = u_n \left\{ 1 + \tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{u_n}{2n}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\left(\frac{u_n}{2n}\right)^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\left(\frac{u_n}{2n}\right)^6 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\left(\frac{u_n}{2n}\right)^8 \text{ u. s. w. } + \frac{1.3.5.7\ldots.(2k-1)}{2.4.6.8\ldots.2k}\cdot\left(\frac{u_n}{2n}\right)^{2k} \right\}$$

setzt, so kann man den Fehler, welchen man bei der Bestimmung von U_n begeht, auf folgende Art beurtheilen. Es ist offenbar die Summe der auf das letzte Glied der eingeklammerten Reihe folgenden Glieder:

$$\frac{1.3.5\ldots.(2k+1)}{2.4.6\ldots.(2k+2)}\cdot\left(\frac{u_n}{2n}\right)^{2k+2} + \frac{1.3.5\ldots.(2k+3)}{2.4.6\ldots.(2k+4)}\cdot\left(\frac{u_n}{2n}\right)^{2k+4} + \frac{1.3.5\ldots.(2k+5)}{2.4.6\ldots.(2k+6)}\cdot\left(\frac{u_n}{2n}\right)^{2k+6} + \ldots\ldots$$

$$< \left(\frac{u_n}{2n}\right)^{2k+2} + \left(\frac{u_n}{2n}\right)^{2k+4} + \left(\frac{u_n}{2n}\right)^{2k+6} + \left(\frac{u_n}{2n}\right)^{2k+8} + \ldots.$$

folglich kleiner als:

$$\left(\frac{u_n}{2n}\right)^{2k+2} \left\{ 1 + \left(\frac{u_n}{2n}\right)^2 + \left(\frac{u_n}{2n}\right)^4 + \left(\frac{u_n}{2n}\right)^6 + \ldots. \right\},$$

also, wie aus der elementaren Lehre von den geometrischen Reihen bekannt ist, kleiner als:

$$\frac{\left(\frac{u_n}{2n}\right)^{2k+2}}{1-\left(\frac{u_n}{2n}\right)^2},$$

und der Fehler, welchen man begeht, wenn man U_n mittelst der Formel 13) bestimmt, ist also immer kleiner als:

$$u_n\cdot\frac{\left(\frac{u_n}{2n}\right)^{2k+2}}{1-\left(\frac{u_n}{2n}\right)^2}.$$

Digitized by Google

Dass dieser Fehler in's Unendliche abnimmt, wenn k in's Unendliche wächst, ist klar, weil $\frac{u_n}{2n} < 1$ ist; natürlich sind u_n und $\frac{u_n}{2n}$ hier als constante Grössen zu betrachten, indem man nur k sich verändern lässt.

Bei der Rechnung nach den Formeln 9) ist vorzüglich die Berechnung der Quadratwurzeln:

$$\sqrt{1+q_n},\quad \sqrt{1+q_{2n}},\quad \sqrt{1+q_{4n}},\quad \sqrt{1+q_{8n}},\ldots.$$

lästig, weshalb man sich bei dieser Berechnung auch wieder zweckmässig des Binomialtheorems bedienen wird, wie wir jetzt für die erste dieser Quadratwurzeln zeigen wollen. Weil nach 5) offenbar $q_n < 1$ ist, so ist nach dem Binomialtheorem:

$$\sqrt{1+q_n} = (1+q_n)^{\frac{1}{2}} = 1 + (\tfrac{1}{2})_1 q_n + (\tfrac{1}{2})_2 q_n^2 + (\tfrac{1}{2})_3 q_n^3 + \ldots.$$

und folglich, weil:

$$(\tfrac{1}{2})_1 = \frac{\frac{1}{2}}{1} = +\tfrac{1}{2},$$

$$(\tfrac{1}{2})_2 = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1.2} = -\frac{1}{2.4},$$

$$(\tfrac{1}{2})_3 = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1.2.3} = +\frac{1.3}{2.4.6},$$

$$(\tfrac{1}{2})_4 = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)(\frac{1}{2}-3)}{1.2.3.4} = -\frac{1.3.5}{2.4.6.8},$$

u. s. w.

ist:

14)

$$\sqrt{1+q_n} = 1 + \tfrac{1}{2}q_n - \frac{1}{2.4}q_n^2 + \frac{1.3}{2.4.6}q_n^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}q_n^4 + \ldots$$

Die einzelnen Glieder dieser Reihe berechnet man am Besten nach und nach mittelst der folgenden Formeln:

$$\tfrac{1}{2}q_n = 1.\frac{q_n}{2},$$

$$\frac{1}{2.4}q_n^2 = \tfrac{1}{2}q_n.\frac{q_n}{4},$$

$$\frac{1.3}{2.4.6}q_n^3 = \frac{1}{2.4}q_n^2.\frac{3q_n}{6},$$

$$\frac{1.3.5}{2.4.6.8}q_n^4 = \frac{1.3}{2.4.6}q_n^3.\frac{5q_n}{8},$$

$$\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.10}q_n^5 = \frac{1.3.5}{2.4.6.8}q_n^4.\frac{7q_n}{10},$$

u. s. w.

Digitized by Google

Zur Berechnung von u_{2n} aus u_n hat man nun nach 9) die folgende Formel:

$$15) \ldots u_{2n} = u_n(1 + \tfrac{1}{2}q_n - \frac{1}{2.4}q_n^2 + \frac{1.3}{2.4.6}q_n^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8}q_n^4 + \ldots).$$

Bleibt man nun in dieser Formel bei einem gewissen Gliede stehen und setzt demzufolge etwa:

$$16) \ldots\ldots u_{2n} = u_n \left\{ \begin{array}{l} 1 + \tfrac{1}{2}q_n - \frac{1}{2.4}q_n^2 + \frac{1.3}{2.4.6}q_n^3 - \ldots. \\ \ldots. + (-1)^{k-1}.\frac{1.3\ldots.(2k-3)}{2.4\ldots.2k}q_n^k \end{array} \right\},$$

so kann man den Fehler, welchen man auf diese Weise begeht, auf folgende Art beurtheilen.

Man setze der Kürze wegen:

$$17) \ldots \quad C_1 = \tfrac{1}{2}, \quad C_k = \frac{1.3\ldots.(2k-3)}{2.4\ldots.2k} \text{ für } k > 1;$$

so ist:

$$u_{2n} = u_n\{1 + C_1 q_n - C_2 q_n^2 + C_3 q_n^3 - \ldots. + (-1)^{k-1} C_k q_n^k\}$$
$$+ (-1)^k u_n \{C_{k+1} q_n^{k+1} - C_{k+2} q_n^{k+2} + C_{k+3} q_n^{k+3} - C_{k+4} q_n^{k+4} + \ldots.\}$$
$$= u_n\{1 + C_1 q_n - C_2 q_n^2 + C_3 q_n^3 - \ldots. + (-1)^{k-1} C_k q_n^k\}$$
$$+ (-1)^k u_n \left\{ \begin{array}{l} (C_{k+1} q_n^{k+1} - C_{k+2} q_n^{k+2}) \\ + (C_{k+3} q_n^{k+3} - C_{k+4} q_n^{k+4}) \\ + (C_{k+5} q_n^{k+5} - C_{k+6} q_n^{k+6}) \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}.$$

Weil nach 17) für $k \overline{\geq} 1$:

$$C_{k+1} = C_k . \frac{2k-1}{2k+2}$$

ist, so bilden die positiven Grössen

$$C_1, \quad C_2, \quad C_3, \quad C_4, \quad C_5, \ldots.$$

eben so wie die Potenzen von q_n eine fortwährend abnehmende Reihe, und die Differenzen:

$$C_{k+1} q_n^{k+1} - C_{k+2} q_n^{k+2},$$
$$C_{k+3} q_n^{k+3} - C_{k+4} q_n^{k+4},$$
$$C_{k+5} q_n^{k+5} - C_{k+6} q_n^{k+6},$$

u. s. w.

Digitized by Google

sind folglich offenbar sämmtlich positiv; also ist nach dem Obigen:

$$u_{2n} > u_n\{1 + C_1 q_n - C_2 q_n^2 + C_3 q_n^3 - \ldots + (-1)^{k-1} C_k q_n^k\}$$

oder

$$u_{2n} < u_n\{1 + C_1 q_n - C_2 q_n^2 + C_3 q_n^3 - \ldots + (-1)^{k-1} C_k q_n^k\},$$

jenachdem k eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

Folglich ist immer:

$$u_n\{1 + C_1 q_n - C_2 q_n^2 + C_3 q_n^3 - \ldots + (-1)^{k-1} C_k q_n^k\} \lessgtr u_{2n},$$

$$u_n\{1 + C_1 q_n - C_2 q_n^2 + C_3 q_n^3 - \ldots + (-1)^{k} C_{k+1} q_n^{k+1}\} \gtrless u_{2n};$$

jenachdem k gerade / ungerade ist, und es sind also:

$$u_n\{1 + C_1 q_n - C_2 q_n^2 + C_3 q_n^3 - \ldots + (-1)^{k-1} C_k q_n^k\},$$
$$u_n\{1 + C_1 q_n - C_2 q_n^2 + C_3 q_n^3 - \ldots + (-1)^{k} C_{k+1} q_n^{k+1}\}$$

jederzeit zwei Gränzen, zwischen denen u_{2n} liegt. Der absolute Werth des Unterschieds dieser beiden Gränzen, welchen der zu bestimmende Fehler offenbar nie übersteigen kann, ist:

$$C_{k+1} q_n^{k+1} u_n,$$

und es erhellet aus dem Obigen leicht, dass dieser Fehler in's Unendliche abnimmt, wenn man k in's Unendliche wachsen lässt, wobei man noch bemerken kann, dass u_n nie grösser als 2π ist.

Nachdem man U_n nach der oben gegebenen Anleitung bestimmt hat, kann man die Formeln 9) nun auf folgende Art darstellen:

18)

$$q_n = \frac{U_n - u_n}{U_n + u_n},$$

$$u_{2n} = u_n(1 + \tfrac{1}{2} q_n - \frac{1}{2.4} q_n^2 + \frac{1.3}{2.4.6} q_n^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} q_n^4 + \ldots),$$

$$U_{2n} = u_n(1 + q_n);$$

$$q_{2n} = \frac{u_{2n} - u_n}{u_{2n} + u_n},$$

$$u_{4n} = u_{2n}(1 + \tfrac{1}{2} q_{2n} - \frac{1}{2.4} q_{2n}^2 + \frac{1.3}{2.4.6} q_{2n}^3 - \frac{1.3.5}{2.4.6.8} q_{2n}^4 + \ldots),$$

$$U_{4n} = u_{2n}(1 + q_{2n});$$

Digitized by Google

$$q_{4n}=\frac{u_{4n}-u_{2n}}{u_{4n}+u_{2n}},$$

$$u_{8n}=u_{4n}(1+\tfrac{1}{2}q_{4n}-\frac{1}{2.4}q_{4n}^2+\frac{1.3}{2.4.6}q_{4n}^3-\frac{1.3.5}{2.4.6.8}q_{4n}^4+\ldots.),$$

$$U_{8n}=u_{4n}(1+q_{4n});$$

u. s. w.

Aus der ersten der beiden Formeln 6) erhält man nach und nach:

$$u_{2n}=u_n\sqrt{1+q_n},$$

$$u_{4n}=u_{2n}\sqrt{1+q_{2n}}$$
$$=u_n\sqrt{1+q_n}.\sqrt{1+q_{2n}},$$

$$u_{8n}=u_{4n}\sqrt{1+q_{4n}}$$
$$=u_n\sqrt{1+q_n}.\sqrt{1+q_{2n}}.\sqrt{1+q_{4n}},$$

$$u_{16n}=u_{8n}\sqrt{1+q_{8n}}$$
$$=u_n\sqrt{1+q_n}.\sqrt{1+q_{2n}}.\sqrt{1+q_{4n}}.\sqrt{1+q_{8n}},$$

u. s. w.

also allgemein:

19) $$u_{2^k n}=u_n\sqrt{1+q_n}.\sqrt{1+q_{2n}}.\sqrt{1+q_{4n}}\ldots.\sqrt{1+q_{2^{k-1}n}}.$$

Ferner ist nach 4):

$$(u_{2^k n})^2=u_{2^{k-1}n}\,U_{2^k n},$$

also nach 19):

$$u_n^2(1+q_n)(1+q_{2n})(1+q_{4n})\ldots.(1+q_{2^{k-1}n})$$
$$=u_n\sqrt{1+q_n}.\sqrt{1+q_{2n}}.\sqrt{1+q_{4n}}\ldots.\sqrt{1+q_{2^{k-2}n}}.U_{2^k n},$$

und folglich:

20)
$$U_{2^k n}=u_n\sqrt{1+q_n}.\sqrt{1+q_{2n}}.\sqrt{1+q_{4n}}\ldots.\sqrt{1+q_{2^{k-2}n}}.(1+q_{2^{k-1}n})$$

oder:

21)
$$U_{2^k n}=u_n\sqrt{1+q_n}.\sqrt{1+q_{2n}}.\sqrt{1+q_{4n}}\ldots.\sqrt{1+q_{2^{k-1}n}}.\sqrt{1+q_{2^{k-1}n}},$$

Digitized by Google

daher nach 19) und 21):

$$22) \ldots\ldots \quad U_{2^k n} = u_{2^k n} \cdot \sqrt{1+q_{2^{k-1}n}},$$

wie es nach der zweiten der Formeln 7) sein muss.

Weil natürlich

$$u_{2^k n} < 2\pi < U_{2^k n}$$

ist, so sind:

$$u_n\sqrt{1+q_n}\cdot\sqrt{1+q_{2n}}\cdot\sqrt{1+q_{4n}}\ldots\sqrt{1+q_{2^{k-1}n}},$$

$$u_n\sqrt{1+q_n}\cdot\sqrt{1+q_{2n}}\cdot\sqrt{1+q_{4n}}\ldots\sqrt{1+q_{2^{k-1}n}}\cdot\sqrt{1+q_{2^{k-1}n}}$$

zwei Gränzen, zwischen denen 2π liegt.

Nach 5) ist:

$$q_n = \frac{U_n - u_n}{U_n + u_n} = \frac{1-\frac{u_n}{U_n}}{1+\frac{u_n}{U_n}},$$

also, weil nach dem Obigen bekanntlich:

$$S_n : s_n = U_n : u_n = R : r_n$$

ist:

$$23) \ldots\ldots \quad q_n = \frac{1-\frac{r_n}{R}}{1+\frac{r_n}{R}} = \frac{R-r_n}{R+r_n},$$

und für $R=1$:

$$24) \ldots\ldots \quad q_n = \frac{1-r_n}{1+r_n},$$

woraus zugleich erhellet, dass immer $q_n < 1$ ist.

Nach 8) und 7) ist:

$$q_{2n} = \frac{u_{2n} - u_n}{u_{2n} + u_n} = \frac{u_n\sqrt{1+q_n} - u_n}{u_n\sqrt{1+q_n} + u_n},$$

also:

$$25) \ldots\ldots \quad q_{2n} = \frac{\sqrt{1+q_n}-1}{\sqrt{1+q_n}+1},$$

oder:

$$q_{2n} = \frac{(\sqrt{1+q_n}-1)^2}{q_n} = \frac{q_n}{(\sqrt{1+q_n}+1)^2},$$

Digitized by Google

also:

$$26) \ldots q_{2n} = \frac{2+q_n-2\sqrt{1+q_n}}{q_n} = \frac{q_n}{2+q_n+2\sqrt{1+q_n}},$$

und da nun offenbar:

$$2+q_n+2\sqrt{1+q_n} > 4$$

ist, so ist immer:

$$27) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad q_{2n} < \tfrac{1}{4}q_n.$$

Daher ist nach und nach:

$$q_{2n} < \tfrac{1}{4}q_n,$$

$$q_{4n} < \tfrac{1}{4}q_{2n} < \frac{1}{4^2}q_n,$$

$$q_{8n} < \tfrac{1}{4}q_{4n} < \frac{1}{4^3}q_n,$$

$$q_{16n} < \tfrac{1}{4}q_{8n} < \frac{1}{4^4}q_n,$$

u. s. w.,

also allgemein:

$$28) \ldots\ldots\ldots\ldots \quad q_{2^k n} < \frac{1}{4^k}q_n,$$

woraus man sieht, dass, wenn k in's Unendliche wächst, $q_{2^k n}$ in's Unendliche abnimmt, sich also $1+q_{2^k n}$ oder auch $1+q_{2^{k-1} n}$, folglich natürlich auch $\sqrt{1+q_{2^{k-1} n}}$, in's Unendliche der Einheit als Gränze nähert.

Diese Bemerkungen über den vorliegenden Gegenstand mögen für jetzt hinreichen.

Einfacher Beweis der Formel $e^{xi} = \cos x + i \sin x$.

Von Herrn Dr. K. L. Bauer, Assistenten der Physik am Polytechnikum in Carlsruhe.

Von den bekannten Beweisen obiger Formel basirt einer auf der Definition der Exponentialgrösse e^z, auch bei komplexen z, als Grenzwerth der Potenz $(1+\frac{z}{m})^m$ für ohne Ende wachsende m (Schlömilch, Höb. Anal. I. 258. u. s. w.); ein anderer, weniger zu empfehlender, auf der imaginären Substitution xi statt x in der

für reelle x entwickelten Exponentialreihe (Stern, Algebr. Anal. S. 179. u. s. w.). Ist man in der Wahl der Beweismittel unbeschränkt, so dürfte man am einfachsten zum Ziele gelangen wie folgt.

Jedenfalls werden wir

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad e^{xi} = u + iv$$

setzen können, so dass u und v reelle Funktionen von x bedeuten; diese sind zu ermitteln. Differenzirt man beiderseitig in Bezug auf x, so folgt:

$$i(u + iv) = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx},$$

welche Gleichung sofort in die beiden anderen zerfällt:

$$2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{du}{dx} = -v,$$

$$3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{dv}{dx} = u.$$

Hieraus ergibt sich weiter:

$$u\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dx} = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{d(u^2 + v^2)}{dx} = 0, \quad u^2 + v^2 = \text{Const.}$$

Weil nun gemäss 1) gleichzeitig $x = 0$, $u = 1$, $v = 0$ zu nehmen ist, so hat man bestimmter:

$$4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad u^2 + v^2 = 1.$$

Nach dieser Beziehung verwandelt sich Gleichung 3) in:

$$\frac{dv}{\sqrt{1 - v^2}} = dx, \quad \arcsin v = x + \text{Const.},$$

und mit Benutzung von 4):

$$v = \sin(x + \text{Const.}), \quad u = \cos(x + \text{Const.}).$$

Die Integrationskonstante bestimmt sich wie oben durch Specialisirung von x, u, v in 0, 1, 0; wornach die Konstante gleichzeitig den Bedingungen zu genügen hat: $\sin \text{Const.} = 0$, $\cos \text{Const.} = 1$, woraus $\text{Const.} = 2m\pi$ folgt, ein ganzes, positives oder negatives Vielfaches der Kreisperipherie. Gleichung 1) ist also zu schreiben:

Digitized by Google

$$e^{xi} = \cos(x + 2m\pi) + i\sin(x + 2m\pi)$$
$$= \cos x + i\sin x,$$

woraus auch leicht $e^{2m\pi i} = 1$, also

$$1') \quad \ldots\ldots\ldots \quad e^{xi + 2m\pi i} = \cos x + i\sin x$$

folgt.

Man könnte dieses Beweisverfahren etwas abändern, indem man die logarithmische Ableitung von Formel 1) nähme. Man würde dann auf die Differentialgleichungen geführt:

$$2') \quad \ldots\ldots\ldots \quad u\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dx} = 0;$$

$$3') \quad \ldots\ldots\ldots \quad u^2 + v^2 = u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx},$$

welche beide auch aus 2) und 3) gefolgert werden können. In der Gestalt

$$\frac{d(u^2 + v^2)}{dx} = 0, \quad dx = \frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2}$$

sind sie ohne Weiteres integrabel und führen also ebenfalls zum Ziel.

Ueber die in Thl. XLV. Heft 2. S. 219. mitgetheilte Summirungsformel des Herrn Alessandro Dorna in Turin.

Von Herrn M. Curtze, Lehrer am Gymnasium in Thorn.

Die in Thl. XLV. Hft. 2. S. 219. mitgetheilte, dem trefflichen Giornale di Matematiche di Napoli entnommene Formel des Herrn Alessandro Dorna

(1)

$$\tfrac{1}{2}n\cos 0\varphi + (n-1)\cos\varphi + (n-2)\cos 2\varphi + \ldots + 2\cos(n-2)\varphi + 1.\cos(n-1)\varphi = \frac{\sin^2\frac{1}{2}n\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}$$

lässt sich in folgender Weise leicht entwickeln. Bekanntlich ist:

(2)

$$\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos p\varphi = \frac{\cos\frac{1}{2}(p+1)\varphi . \sin\frac{1}{2}p\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

Setzt man hierin der Reihe nach:

$$p = n-1,\ n-2,\ n-3, \ldots 3,\ 2,\ 1;$$

so erhält man:

Digitized by Google

$$\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+..+\cos(n-2)\varphi+\cos(n-1)\varphi=\frac{\cos\frac{1}{2}n\varphi.\sin\frac{1}{2}(n-1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi},$$

$$\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+..+\cos(n-2)\varphi=\frac{\cos\frac{1}{2}(n-1)\varphi.\sin\frac{1}{2}(n-2)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi},$$

$$\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+..+\cos(n-3)\varphi=\frac{\cos\frac{1}{2}(n-2)\varphi.\sin\frac{1}{2}(n-3)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi},$$

u. s. w. u. s. w.

$$\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi=\frac{\cos\frac{4}{2}\varphi.\sin\frac{3}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi},$$

$$\cos\varphi+\cos2\varphi=\frac{\cos\frac{3}{2}\varphi.\sin\frac{2}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi},$$

$$\cos\varphi=\frac{\cos\frac{2}{2}\varphi.\sin\frac{1}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi};$$

und hieraus durch beiderseitige Addition:

$$(n-1)\cos\varphi+(n-2)\cos2\varphi+(n-3)\cos3\varphi+\ldots+2\cos(n-2)\varphi+1.\cos(n-1)\varphi$$

$$=\frac{\left\{\begin{array}{c}\cos\frac{1}{2}n\varphi.\sin\frac{1}{2}(n-1)\varphi+\cos\frac{1}{2}(n-1)\varphi\sin\frac{1}{2}(n-2)\varphi+\ldots\\ \ldots+\cos\frac{3}{2}\varphi\sin\frac{2}{2}\varphi+\cos\frac{2}{2}\varphi.\sin\frac{1}{2}\varphi\end{array}\right\}}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

Verwandelt man jetzt nach der Formel

$$\cos\alpha.\sin\beta=\tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$$

jedes der Producte im Zähler des Bruches auf der rechten Seite in eine Differenz zweier Sinusse, so erhält man nach leichter Umformung:

$$(n-1)\cos\varphi+(n-2)\cos2\varphi+(n-3)\cos3\varphi+\ldots+2\cos(n-2)\varphi+1.\cos(n-1)\varphi$$

$$=\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi+\sin\frac{3}{2}\varphi+\sin\frac{5}{2}\varphi+\ldots+\sin\frac{2n-3}{2}\varphi+\sin\frac{2n-1}{2}\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi}-\frac{n}{2}.$$

Der Zähler des Bruches lässt sich für $\alpha=\frac{1}{2}\varphi$, $\beta=\varphi$ und $m=n$ nach der Formel

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\ldots+\sin(\alpha+(m-1)\beta)$$

$$=\frac{\sin(\alpha+\frac{1}{2}(m-1)\beta).\sin\frac{1}{2}m\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}$$

zusammenziehen, und ist dann:

$$\frac{\sin(\frac{1}{2}\varphi+\frac{1}{2}(n-1)\varphi).\sin\frac{1}{2}n\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}=\frac{\sin^2\frac{1}{2}n\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.$$

Digitized by Google

Führt man diesen Werth des Zählers ein, setzt $-\frac{n}{2}$ auf die linke Seite und beachtet, dass $\cos 0\varphi = 1$ ist, so ergibt sich unmittelbar die Formel

$$\frac{n}{2}\cos 0\varphi + (n-1)\cos\varphi + (n-2)\cos 2\varphi + \ldots + 2\cos(n-2)\varphi + 1.\cos(n-1)\varphi$$
$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}n\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi},$$

was die zu beweisende Gleichung ist.

Behandelt man die bekannte Formel:

$$(3) \ldots \sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\varphi . \sin\frac{1}{2}n\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}$$

in derselben Weise wie Formel (2) unter Beachtung der Gleichungen:

$$\sin\alpha . \sin\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)],$$

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + \ldots + \cos(\alpha+(n-1)\beta)$$
$$= \frac{\cos[\alpha + \frac{1}{2}(n-1)\beta]\sin\frac{1}{2}n\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta},$$

so erhält man sehr leicht folgende, vielleicht eben so interessante Formel:

(4)

$$(n-1)\sin\varphi + (n-2)\sin 2\varphi + (n-3)\sin 3\varphi + \ldots + 2\sin(n-2)\varphi + 1.\sin(n-1)\varphi$$
$$= \frac{n\sin\varphi - \sin n\varphi}{4\sin^2\frac{1}{2}\varphi}.$$

Mit Rücksicht auf diese Formel, die sich nicht gut anders schreiben lässt, würde ich die Formel (1) auch folgendermassen zu schreiben mir erlauben:

(5)

$$(n-1)\cos\varphi + (n-2)\cos 2\varphi + (n-3)\cos 3\varphi + \ldots + 2\cos(n-2)\varphi + 1.\cos(n-1)\varphi$$
$$= \frac{\sin^2\frac{1}{2}n\varphi - n\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{2\sin^2\frac{1}{2}\varphi}.$$

Schreiben des Herrn Gymnasial-Oberlehrers Dr. Meyer in Bunzlau (Schlesien) an den Herausgeber.

In Folge Ihrer im dritten Hefte des 45. Theils Ihres sehr geschätzten Archivs Seite 348. enthaltenen Aufforderung zur Mittheilung eines directen Beweises der Relationen:

$$1) \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad \sin 20^0 + \sin 40^0 = \sin 80^0,$$

$$2) \quad -\sin 20^0.\sin 40^0 + \sin 20^0.\sin 80^0 + \sin 40^0.\sin 80^0 = \tfrac{3}{4},$$

$$3) \;.\;.\;.\;.\;.\quad 16 \sin 20^0.\sin 40^0.\sin 60^0.\sin 80^0 = 3,$$

erlaube ich mir, Ihnen nachfolgend einen solchen Beweis zur gefälligen Mittheilung für das Archiv zu übersenden:

$$1) \;.\;.\;.\; \sin 20^0 + \sin 40^0 = 2\sin\frac{40^0+20^0}{2}.\cos\frac{40^0-20^0}{2}$$

$$= 2\sin 30^0.\cos 10^0 = \cos 10^0 = \sin 80^0.$$

$$2) \;.\;.\;.\; \sin 80^0.\sin 40^0 + \sin 80^0 \sin 20^0 - \sin 40^0.\sin 20^0$$

$$= \cos 10^0(\sin 40^0 + \sin 20^0) - \tfrac{1}{2}\cos 20^0 + \tfrac{1}{2}\cos 60^0$$

$$= \cos 10^0.2\sin 30^0.\cos 10^0 - \tfrac{1}{2}(2\cos^2 10^0 - 1) + \tfrac{1}{4}$$

$$= \cos^2 10^0 - \cos^2 10^0 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}.$$

$$3) \;16\sin 20^0.\sin 40^0.\sin 60^0.\sin 80^0 = 8\sin 20^0.\sin 60^0(\cos 40^0 - \cos 120^0)$$

$$= 8\sin 20^0.\sin 60^0.\cos 40^0 + 8\sin 20^0.\sin 30^0.\sin 60^0$$

$$= 8\sin 20^0.\sin 60^0.\cos 40^0 + 4\sin 20^0.\sin 60^0$$

$$= 4\sin 60^0(\sin 60^0 - \sin 20^0) + 4\sin 60^0.\sin 20^0 = 4\sin^2 60^0 = 3.$$

(Vergl. S. 143.)

Berichtigungen.

Thl. VII. S. 105. Z. 9. statt $1-\cos y^2$ setze man $1-\sin y^2$.

— — S. 105. Z. 6. v. u. muss es statt

$$-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\{\sin\tfrac{1}{2}C^2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2 - \cos\tfrac{1}{2}C^2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\}$$

heissen:

$$-\frac{\sin(\alpha+\beta)^2}{\lambda^2\mu^2}\{\sin\tfrac{1}{2}C^2\cos\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2 - \cos\tfrac{1}{2}C^2\sin\tfrac{1}{2}(\varphi-\psi)^2\}^2.$$

— — S. 106. Z. 17. von unten statt $B_1 = -2\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu^2}\right)\cot\frac{1}{2}C$ setze man $B_1 = -2\left(\frac{1}{\lambda^2}-\frac{1}{\mu^2}\right)\cot\frac{1}{2}C$.

Druckfehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln.

No. 18. Taf. I. S. 6. Fusstabelle, Spalte 3 zwischen Zeile 1 mit D. und Zeile 2 fehlt in einigen Auflagen das Minuszeichen (—).

No. 19. Taf. II. S. 443. Diff. zwischen $\log\text{tang}\, 39^0\, 58'\, 10''$ und $20''$ statt 228 lies 428.

Digitized by Google

XX.

Wurfbewegung im widerstehenden Mittel und Construction der Flugbahn.

Von

Herrn Dr. *A. M. Nell*,
Lehrer an der technischen Schule zu Darmstadt.

§. 1.

Um die Bewegung eines Körpers im lufterfüllten Raume bestimmen zu können, ist natürlich vor allem nöthig, das Gesetz des Luftwiderstandes zu kennen. Newton, der sich zuerst eingehend mit diesem Gegenstand befasste, nahm an, dass dieser Widerstand dem Quadrat der Geschwindigkeit proportional sei. Da übrigens die hieraus entwickelten Umstände der Bewegung keine gute Uebereinstimmung mit der Erfahrung zeigten, so suchte man in neuerer Zeit andere Gesetze zu Grunde zu legen. Hutton, der ausgedehnte Beobachtungen über den Luftwiderstand machte, stellte eine Formel auf, in welcher ausser der zweiten auch die erste und nullte Potenz der Geschwindigkeit vorkam.

In einem Schriftchen: Theorie des Widerstands der Luft bei der Bewegung der Körper entwickelt Schmidt eine andere Formel, worin das Quadrat der Geschwindigkeit als Exponent erscheint, wodurch Hutton's Beobachtungen sehr genau dargestellt wurden. Ausserdem zeigt Schmidt, dass für kleinere Geschwindigkeiten das Newton'sche Gesetz sich aus dieser Formel herleiten lässt.

Es scheint hiernach, dass insbesondere für so grosse Geschwindigkeiten, wie sie bei den Flinten- und Geschützkugeln vorkommen, das von Schmidt aufgestellte Gesetz der Wahrheit am nächsten kommt. Aber trotzdem wollen wir das einfachere Gesetz von Newton hier beibehalten, und diess um so mehr, als von militärischen Schriftstellern nachgewiesen wurde, dass

Digitized by Google

dadurch die Bewegung der aus gezogenen Röhren geworfenen Geschosse hinreichend genau dargestellt werden kann, und dass die Verschiedenheiten der complicirtesten Luftwiderstandsgesetze nur einen geringen Einfluss auf die Rechnungsresultate ausüben.

§. 2.

Nach Newton ist der Luftwiderstand (wir wollen ihn durch P bezeichnen) gleich dem Gewicht einer Luftsäule, deren Basis der zur Flugbahn normale grösste Querschnitt (F) des Körpers und deren Höhe ein gewisser Theil der Geschwindigkeitshöhe $\left(\frac{v^2}{2g}\right)$. Wir setzen daher

$$P = \gamma F . \frac{\lambda v^2}{2g} \quad \dots\dots\dots\dots 1)$$

wo γ das Gewicht der Cubikeinheit Luft und λ den Faktor für den Antheil der Geschwindigkeitshöhe bedeutet.

Die der (in Gewichtseinheiten ausgedrückten) Kraft P entsprechende Beschleunigung (G), welche sie einer Masse vom Gewichte Q ertheilt, ist bekanntlich: $G = \frac{P}{Q} g$. Substituirt man obigen Werth von P, so wird $G = \frac{\lambda \gamma F}{2Q} v^2$. Wir schreiben der Kürze halber

$$G = b v^2, \quad \dots\dots\dots\dots 2)$$

so dass also:

$$b = \frac{\lambda \gamma F}{2Q}. \quad \dots\dots\dots\dots 3)$$

Durch Beobachtungen fand sich im Durchschnitt $\lambda = 0{,}23$; setzt man ferner für den Cubikmeter Luft $\gamma = 1{,}3$ Kilogr., so wird

$$b = 0{,}1495 \frac{F}{Q}. \quad \dots\dots\dots\dots 4)$$

Manche Schriftsteller setzen $\frac{1}{2b} = K$; danach ist

$$K = \frac{1}{\lambda \gamma} . \frac{Q}{F}, \quad \dots\dots\dots\dots 5)$$

oder mit den obigen Zahlenwerthen:

$$K = 3{,}3445 \frac{Q}{F}. \quad \dots\dots\dots\dots 6)$$

K ist eine lineare Dimension.

Digitized by Google

§. 3.

Sei nun *ABDS* (Taf. VIII. Fig. 1.) die Flugbahn eines Geschosses, das vom Punkte A mit der Geschwindigkeit V unter dem Neigungswinkel α zum Horizont ausgeht. Nach der Zeit t in B angelangt, besitze es die Geschwindigkeit v; der Tangentenwinkel an dieser Stelle sei gleich φ. Bezeichnet man durch X und Y die Beschleunigungen parallel zu den Coordinatenaxen, so bestehen die Gleichungen:

$$X=\frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y=\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Auf den Körper wirken im Punkte B die Beschleunigung der Schwere nach abwärts und der Luftwiderstand G in der Tangente der Bahn. Wird G parallel zu den Axen zerlegt, so hat man die Seitenkräfte $G\cos\varphi$ und $G\sin\varphi$ und daher, weil diese Kräfte die Coordinaten zu verkleinern streben:

$$X=-G\cos\varphi, \quad Y=-g-G\sin\varphi.$$

Wird für G sein Werth aus 2) eingesetzt, so findet sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=-bv^2\cos\varphi,\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=-g-bv^2\sin\varphi.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 7)$$

Nun ist $v=\frac{ds}{dt}$, $\cos\varphi=\frac{dx}{ds}$, $\sin\varphi=\frac{dy}{ds}$, wodurch die Gleichungen 7) übergehen in

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=-b\,\frac{ds\,dx}{dt^2},\\ \frac{d^2y}{dt^2}&=-g-b\,\frac{ds\,dy}{dt^2}.\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 8)$$

Die erste Gleichung 8) kann, wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{\frac{dx}{dt}}=-b\,ds.$$

Wird integrirt und bezeichnet l den natürlichen Logarithmen, so ist:

$$l\frac{dx}{dt}=lC-bs.le, \text{ oder } \frac{dx}{dt}=C.e^{-bs}.$$

Zur Bestimmung der Constanten C wird $\frac{dx}{dt} = V\cos\alpha$ für $s = 0$, daher $C = V\cos\alpha$.

$$\frac{dx}{dt} = V\cos\alpha . e^{-bs} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 9)$$

Nach den Gleichungen 8) hat man ferner:

$$b\frac{ds}{dt} = -\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{\frac{dx}{dt}}$$

und

$$g = -b\frac{ds}{dt}\cdot\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2y}{dt^2},$$

woraus man ableitet

$$g\,dt^2 + \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx} = 0.$$

Setzt man nun

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10)$$

so ist

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{dx^3},$$

$$g\,dt^2 + dp\,dx = 0. \quad \ldots\ldots\ldots \quad 11)$$

Aus 9) und 11) erhält man durch Elimination von dt:

$$dp + \frac{g}{V^2\cos^2\alpha}e^{2bs}dx = 0. \quad \ldots\ldots \quad 12)$$

Eliminirt man dx vermittelst der Gleichung:

$$ds = dx\sqrt{1+p^2},$$

so ist:

$$dp\sqrt{1+p^2} + \frac{g}{V^2\cos^2\alpha}e^{2bs}ds = 0.$$

Diese Gleichung integrirt und die willkührliche Constante gleich $\frac{1}{2}L$ gesetzt, so erhält man:

13)

$$p\sqrt{1+p^2} + l(p + \sqrt{1+p^2}) + \frac{g e^{2bs}}{b V^2\cos^2\alpha} = L.$$

Digitized by Google

Zur Abkürzung schreiben wir:

$$p\sqrt{1+p^2}+l(p+\sqrt{1+p^2})=\varLambda(p). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

Dadurch geht die Gleichung 13) über in:

$$\frac{ge^{2bs}}{bV^2\cos^2\alpha}=L-\varLambda(p). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15)$$

Zur Bestimmung von L hat man $p=\operatorname{tg}\alpha$, wenn $s=0$:

$$L=\frac{g}{bV^2\cos^2\alpha}+\varLambda(\operatorname{tg}\alpha). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16)$$

Aus 12) und 15) findet sich:

$$b\,dx=\frac{-dp}{L-\varLambda(p)}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17)$$

und mit Beachtung von 10):

$$b\,dy=\frac{-p\,dp}{L-\varLambda(p)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 18)$$

Aus den Gleichungen 11) und 17) lässt sich die folgende ableiten:

$$\sqrt{bg}.dt=\frac{-dp}{\sqrt{L-\varLambda(p)}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 19)$$

Das negative Zeichen wurde gewählt, weil p abnimmt, wenn t wächst.

Um auch die Geschwindigkeit zu bestimmen, hat man:

$$v=\frac{ds}{dt}=\frac{dx\sqrt{1+p^2}}{dt},$$

folglich nach 9):

$$v=V\cos\alpha.e^{-bs}\sqrt{1+p^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20)$$

oder wenn s vermittelst 15) eliminirt wird:

$$v=\sqrt{\frac{g}{b}}.\sqrt{\frac{1+p^2}{L-\varLambda(p)}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 21)$$

Die hier öfter auftretende Funktion $\varLambda(p)$ wollen wir die Lamdafunktion nennen. In Tafel I. sind die Werthe derselben berechnet, so dass man für jedes p das zugehörige $\varLambda(p)$ einfach daraus entnehmen kann.

§. 4.

Die Gleichungen 17), 18) und 19) lassen sich nicht integriren;

man muss desshalb, um die Coordinaten der Bahn, so wie die Flugzeit berechnen zu können, zu einer Näherungsmethode seine Zuflucht nehmen. Wir setzen voraus, die Gleichung der Bahn lasse sich in folgender Form darstellen:

$$y = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \quad \dots \quad 22)$$

Die successive Differentiation dieser Gleichung ergibt:

$$\frac{dx}{dy} = A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + 5Ex^4 \quad \dots \quad 23)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2B + 6Cx + 12Dx^2 + 20Ex^3 \quad \dots \dots \quad 24)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 6C + 24Dx + 60Ex^2 \quad \dots \dots \dots \quad 25)$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 24D + 120Ex \quad \dots \dots \dots \dots \quad 26)$$

etc.

Um die Werthe der Differentialquotienten abzuleiten, so folgt aus 10) und 17):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -b(L - \Delta(p)), \quad \dots \dots \quad 27)$$

$$\frac{d\,\frac{d^2y}{dx^2}}{dx} = 2b\sqrt{1+p^2}\cdot\frac{dp}{dx},$$

oder:

$$\frac{d^3y}{dx^3} = -2b^2(L - \Delta(p))\sqrt{1+p^2} \quad \dots \dots \quad 28)$$

In ähnlicher Weise erhält man:

29)

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2b^3(L - \Delta(p))^2\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} - 4b^3(L - \Delta(p))(1+p^2).$$

Aus 10) und 23) folgt $p = A + 2Bx + 3Cx^2 + \dots$. Setzt man $x = 0$, so wird $p = \operatorname{tg}\alpha$, daher $A = \operatorname{tg}\alpha$. Ebenso erhält man durch Gleichsetzung von 24) und 27), von 25) und 28) etc. die folgenden Coefficienten, nämlich:

$$B = -\frac{g}{2V^2\cos^2\alpha}, \quad C = -\frac{bg}{3V^2\cos^2\alpha}, \quad D = \frac{bg^2\sin\alpha}{12V^4\cos^4\alpha} - \frac{b^2g}{6V^2\cos^4\alpha}.$$

Daher ist jetzt die Gleichung der Flugbahn:

$$y = \operatorname{tg}\alpha . x - \frac{g}{2V^2\cos^2\alpha}x^2 - \frac{bg}{3V^2\cos^3\alpha}x^3 - \frac{bg}{6V^2\cos^4\alpha}\left(b - \frac{g\sin\alpha}{2V^2}\right)x^4 - .. \quad 30)$$

§. 5.

Mittelst der Gleichung 30) könnte man jetzt eine Reihe von Coordinaten der ballistischen Curve, namentlich auch die Wurfhöhe, Wurfweite u. s. w. näherungsweise berechnen. Doch wollen wir hier ein anderes Verfahren entwickeln, das uns in den Stand setzen wird, ohne Schwierigkeit jeden Grad von Annäherung zu erreichen.

Zu dem Zwecke betrachten wir (Taf. VIII. Fig. 2.) irgend ein Bogenstück BC, dessen Länge durch σ bezeichnet werden mag. Die Tangentenwinkel in den Punkten B und C seien gleich φ und ψ. Nach Gleichung 15) ist

$$2b . AB = l\left(\frac{bV^2\cos^2\alpha}{g}\right) + l(L - A\operatorname{tg}\varphi)$$

$$2b . AC = l\left(\frac{bV^2\cos^2\alpha}{g}\right) + l(L - A\operatorname{tg}\psi)$$

$$2b(AC - AB) = l(L - A\operatorname{tg}\psi) - l(L - A\operatorname{tg}\varphi)$$

$$\sigma = \frac{1}{2b}\, l\left(\frac{L - A\operatorname{tg}\psi}{L - A\operatorname{tg}\varphi}\right) . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 31)$$

Wir wollen nun versuchen, aus den 3 Grössen φ, ψ und σ die Coordinaten-Differenzen von B und C, nämlich $BP = m$ und $PC = n$ abzuleiten. Zu dem Zweck betrachten wir das Bogenstück BMC als Parabel und nehmen dafür die Gleichung:

$$\eta = A\xi + B\xi^2, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 32)$$

welche auf ein neues durch den Punkt B gelegtes und dem anderen paralleles Coordinatensystem bezogen ist. Man findet aus 32):

$$\frac{d\eta}{d\xi} = A + 2B\xi . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 33)$$

Für $\xi = 0$ ist $\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\varphi$ und für $\xi = m$ ist $\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\psi$. Dadurch finden sich die Werthe von A und B wie folgt:

$$\left.\begin{aligned} A &= \operatorname{tg}\varphi \\ B &= \frac{\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\varphi}{2m}. \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 34)$$

Digitized by Google

Daher heisst jetzt die Gleichung:

$$\eta = \operatorname{tg}\varphi . \xi - \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi}{2m} \xi^2. \qquad \ldots\ldots 35)$$

Für $\xi = m$ wird $\eta = n$, daher erhalten wir die Beziehung:

$$n = \frac{\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi}{2} m. \qquad \ldots\ldots\ldots 36)$$

Hiernach lässt sich n berechnen, sobald m bekannt ist. Wir bestimmen aber den Werth von m vermittelst der Bedingung, dass der durch B und C gelegte parabolische Bogen dem Bogen BMC der ballistischen Curve gleich wird. Um die Parabel zu rektificiren, ist

$$d\sigma = d\xi \sqrt{1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2} = d\xi \sqrt{1 + (A + 2B\xi)^2}.$$

Zur Abkürzung setzen wir $A + 2B\xi = z$, folglich:

$$d\xi = \frac{dz}{2B}, \quad d\sigma = \frac{dz}{2B} \sqrt{1 + z^2}.$$

Die Integration ergibt:

$$\sigma = \frac{1}{4B} (z\sqrt{1 + z^2} + l(z + \sqrt{1 + z^2})) + \text{const.}$$

und mit Beachtung von 14):

$$\sigma = \frac{1}{4B} \mathcal{A}(z) + \text{const.}$$

Für $\sigma = 0$ ist $\xi = 0$, $z = A$, also:

$$\text{const.} = -\frac{\mathcal{A}(A)}{4B}, \quad 4B\sigma = \mathcal{A}(z) - \mathcal{A}(A).$$

Um den ganzen Bogen BMC zu erhalten, ist zu setzen:

$$z = A + 2Bm = \operatorname{tg}\psi,$$

und weil nach 34):

$$4B = \frac{2}{m} (\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\varphi),$$

so findet sich:

$$\frac{2\sigma(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi)}{m} = \mathcal{A}(\operatorname{tg}\varphi) - \mathcal{A}(\operatorname{tg}\psi).$$

Wird in diesen Ausdruck der Werth von σ aus 31) gesetzt, so erhält man:

Digitized by Google

37)

$$m = \frac{1}{b}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi)\frac{l(L-A(\operatorname{tg}\psi))-l(L-A(\operatorname{tg}\varphi))}{A(\operatorname{tg}\varphi)-A(\operatorname{tg}\psi)}.$$

Werden die nach 36) und 37) erhaltenen Werthe von m und n zu den Coordinaten x, y des Punktes B addirt, so erhält man diejenigen von C. Um also nach dieser Methode die Coordinaten des höchsten Punktes der ballistischen Curve zu erhalten, wird man den Winkel α in irgend eine Anzahl gleicher Theile theilen, je 2 dieser aufeinanderfolgenden Werthe an die Stelle von φ und ψ in 37) und 36) einführen, wobei der letzte Winkel ψ gleich Null zu nehmen, indem die Tangente im obersten Punkte horizontal ist. Man erhält dadurch zunächst die Coordinatendifferenzen einer Reihe von Punkten und dann sehr einfach die Coordinaten selbst.

Diese Coordinaten wird man natürlich um so genauer erhalten, in je mehr Theile der Winkel α zerlegt wurde, weil sich die einzelnen Parabelbögen um so genauer an die ballistische Curve anschliessen, je kleiner sie sind.

§. 6.

Die nach der in §. 5. entwickelten Methode erhaltenen Coordinaten können der ballistischen Curve nicht genau entsprechen; denn es sind eigentlich die Coordinaten der Berührungspunkte einer Reihe von Parabeln, bei welchen die Eigenschaft stattfindet, dass ein solcher Parabelbogen dieselbe Länge hat, wie dasjenige Bogenstück jener Curve, dessen Anfang und Ende mit der Parabel gleiche Tangentenwinkel hat.

Man sieht aber leicht ein, dass die Methode ganz genau sein würde, wenn bei beiden Curven für jeden Werth des Tangentenwinkels die Krümmungshalbmesser gleich wären. Wir wollen daher deren Werthe miteinander vergleichen.

Wird der Krümmungshalbmesser der Parabel durch R (Taf. VIII. Fig. 2.) und der der ballistischen Curve durch ϱ bezeichnet, so ist für den Punkt M, für welchen der Tangentenwinkel gleich θ sein mag:

$$R = \frac{m \sec^3\theta}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 38)$$

$$\varrho = \frac{\sec^3\theta}{b(L-A\operatorname{tg}\theta)}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 39)$$

Für den Punkt B ist daher:

Digitized by Google

$$R_0 = \frac{m \sec^3\varphi}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi}, \quad \varrho_0 = \frac{\sec^3\varphi}{b(L - A\operatorname{tg}\varphi)}.$$

Für den Punkt C ist dagegen:

$$R_1 = \frac{m \sec^3\psi}{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi}, \quad \varrho_1 = \frac{\sec^3\psi}{b(L - A\operatorname{tg}\psi)}.$$

Dass diese Werthe von R und ϱ nicht übereinstimmen, geht schon daraus hervor, dass bei R nur im Zähler eine Veränderliche vorkommt, während bei ϱ auch der Nenner veränderlich ist.

Statt der Gleichung 32) legen wir jetzt die folgende zu Grunde:

$$\eta = A\xi + B\xi^2 + C\xi^3 + D\xi^4, \quad \ldots\ldots \quad 40)$$

und wollen die vier Coefficienten dadurch bestimmen, dass wir ausser den früheren Bedingungen auch noch die Krümmungen am Anfang und Ende des Bogens BC in Uebereinstimmung bringen.

Bezeichnet man den Krümmungshalbmesser der durch 40) dargestellten Curve durch R, so ist für den Punkt M:

$$R = \pm \frac{\sec^3\theta}{2B + 6C\xi + 12D\xi^2}. \quad \ldots\ldots \quad 41)$$

Von den beiden Zeichen behalten wir das untere bei, damit R positiv werde. Denn B ist jedenfalls negativ, da $\operatorname{tg}\theta = A + 2B\xi + 3C\xi^2 + 4D\xi^3$ und $A = \operatorname{tg}\varphi$, der Winkel θ aber kleiner als φ.

Zur Bestimmung von A, B, C, D haben wir folgende Gleichungen:

$$\operatorname{tg}\varphi = A,$$

$$\operatorname{tg}\psi = A + 2Bm + 3Cm^2 + 4Dm^3,$$

$$\frac{\sec^3\varphi}{b(L - A\operatorname{tg}\varphi)} = -\frac{\sec^3\varphi}{2B},$$

$$\frac{\sec^3\psi}{b(L - A\operatorname{tg}\psi)} = -\frac{\sec^3\psi}{2B + 6Cm + 12Dm^2}.$$

Die Werthe finden sich, wie folgt:

42)

$$A = \operatorname{tg}\varphi,$$

$$B = -\tfrac{1}{2} b(L - A\operatorname{tg}\varphi),$$

$$3m^2 C = 3(\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\varphi) - 4Bm + bm(L - A\operatorname{tg}\psi),$$

$$2m^3 D = \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi + Bm - \tfrac{1}{2} bm(L - A\operatorname{tg}\psi).$$

Werden diese Werthe in die folgende Gleichung eingesetzt:

$$n = Am + Bm^2 + Cm^3 + Dm^4, \quad \ldots\ldots \quad 43)$$

so erhält man schliesslich:

$$n = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi)m + {}^1/_{12}b(\varDelta\operatorname{tg}\varphi - \varDelta\operatorname{tg}\psi)m^2. \quad \ldots \quad 44)$$

Diese Gleichung lehrt, den Werth von n zu finden, sobald m bekannt ist.

Der Werth von m ist wieder aus der Bedingung abzuleiten, dass der Bogen BC der Curve 40) dieselbe Länge habe, wie der zwischen den gleichen Tangentenwinkeln φ und ψ liegende Bogen der ballistischen Curve. Dazu ist die Rektifikation jener Curve erforderlich; allein die betreffende Integration lässt sich nicht in geschlossener Form durchführen.

Wir können übrigens, um diese Schwierigkeit zu umgehen, einen von **Lambert** aufgestellten Satz zu Hülfe nehmen. In dem Bande II. der **Beiträge zum Gebrauch der Mathematik** zeigt dieser Geometer, dass wenn man an die Endpunkte A, B (Taf. VIII. Fig. 3.) des Bogens irgend einer krummen Linie die Tangenten AC, BC legt, man sehr nahe setzen kann:

$$s = \tfrac{1}{3}(AC + BC + 2\,\text{chorde}\,AB). \quad \ldots\ldots \quad 45)$$

Nun ist:

$$AC = \frac{AB\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{c\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \qquad BC = \frac{c\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},$$

folglich:

$$s = \frac{c}{3}\cdot\frac{\sin\beta + \sin\alpha + 2\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{c}{3}\left(2 + \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\right).$$

Da der Quotient der beiden Cosinus wenig von 1 verschieden, wenn α und β kleine Winkel sind, so schreiben wir jetzt:

$$s = \frac{c}{3}\left[3 - \left(1 - \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\right)\right] = \frac{c}{3}\left(3 + \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\right),$$

$$s = c\left(1 + \frac{2}{3}\,\frac{\sin\frac{1}{2}\alpha\sin\frac{1}{2}\beta}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\right). \quad \ldots\ldots\ldots \quad 46)$$

Um zu sehen, mit welcher Annäherung diese Formel die Länge eines Bogens gibt, wenden wir sie auf einen Kreisbogen an; Halbmesser sei gleich 1, Winkel am Mittelpunkt 10°, so ist, da hier $\alpha = \beta = 5^0$ und $c = 2\sin 5^0$, $s = 2\sin 5^0\left(1 + \frac{2}{3}\,\frac{\sin^2 2^0 30'}{\cos 5^0}\right)$:

$$\log \tfrac{2}{3} = 9.8239087$$
$$\log \sin^2 2^0 30' = 7.2793592$$
$$\text{Comp.} \log \cos 5^0 = \underline{9.9983442}$$
$$7.1016121$$

$$\log\left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{\sin^2 2^0 30'}{\cos 5^0}\right) = 0.0005526$$
$$\log 2 = 0.3010300$$
$$\log \sin 5^0 = \underline{8.9402960}$$
$$\log s = 9.2418786$$

danach $s =$ 0.1745 3341
Genauer ist $s =$ 0.1745 3293
Fehler $= -0.0000\,0048$

Der Fehler ist also bei einem Winkel am Mittelpunkt von 10^0 kleiner als $\frac{1}{2000000}$ des Halbmessers. Bei einem Winkel von 5^0 ist der Fehler 32mal kleiner.

Hieraus ersieht man, dass man mittelst 46) einen Bogen wird sehr genau bestimmen können, wenn α und β kleine Winkel sind. Zerlegen wir in 46) den Nenner, so erhalten wir:

$$s = c\left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta}{1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad 47)$$

Der Ausdruck in der Klammer ist nur vom Produkt der beiden Tangenten abhängig. Wir setzen jetzt:

$$1 + \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta}{1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta} = \mathfrak{S}(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta) \quad \ldots\ldots \quad 48)$$

und erhalten danach:

$$s = c\,.\,\mathfrak{S}(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta). \quad \ldots\ldots\ldots \quad 49)$$

Die Tafel II. enthält für $\log(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta)$ die zugehörigen Werthe von $\log \mathfrak{S}(\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta)$ auf 5 Decimalen.

(Taf. VIII. Fig. 4.) Bezeichnen wir jetzt wieder den Bogen *BMC* durch σ und $\angle CBP$ durch $\varkappa$, so ist nach 49):

$$\sigma = \frac{m}{\cos\varkappa}\,.\,\mathfrak{S}(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi - \varkappa)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varkappa - \psi)), \quad \ldots\ldots \quad 50)$$

und diesen Werth demjenigen der Gleichung 31) gleichgesetzt, erhält man:

$$m = \frac{1}{2b}\, l\left(\frac{L - A\operatorname{tg}\psi}{L - A\operatorname{tg}\varphi}\right)\cdot\frac{\cos\varkappa}{\mathfrak{S}(\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi - \varkappa)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varkappa - \psi))}. \quad 51)$$

Digitized by Google

Um aber hiernach m berechnen zu können, muss der Winkel $\varkappa$ bekannt sein. Nach der Figur ist $\operatorname{tg}\varkappa = \frac{n}{m}$, und für n seinen Werth aus 44) gesetzt:

$$\operatorname{tg}\varkappa = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi) + \tfrac{1}{12}b(\varLambda\operatorname{tg}\varphi - \varLambda\operatorname{tg}\psi)m.$$

Da hier m noch im letzten Gliede auftritt, so müsste dessen Werth bekannt sein. Beachten wir aber, dass dieses Glied gegen das erste sehr klein ist, indem b ein kleiner Bruch, so können wir für m seinen Näherungswerth nach 37) nehmen. Dadurch wird:

$$\operatorname{tg}\varkappa = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi) + \tfrac{1}{12}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi)\,l\left(\frac{L-\varLambda\operatorname{tg}\psi}{L-\varLambda\operatorname{tg}\varphi}\right). \quad 52)$$

Um die hier vorkommenden natürlichen Logarithmen in Briggsche zu verwandeln, dividiren wir durch $M = 0{,}4342945$ und haben endlich zur Bestimmung von m und n die Gleichungen:

53)

$$\operatorname{tg}\varkappa = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi) + \frac{1}{12M}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi)\log\left(\frac{L-\varLambda\operatorname{tg}\psi}{L-\varLambda\operatorname{tg}\varphi}\right),$$

$$m = \frac{1}{2Mb}\log\left(\frac{L-\varLambda\operatorname{tg}\psi}{L-\varLambda\operatorname{tg}\varphi}\right)\cdot\frac{\cos\varkappa}{\mathfrak{g}\,(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi-\varkappa)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varkappa-\psi))},$$

$$n = m\operatorname{tg}\varkappa.$$

§. 7.

Für den niedersteigenden Ast der ballistischen Curve sind die Tangentenwinkel grösser als 90°. Wir wollen daher untersuchen, wie sich die Lamdafunktion bei negativen Werthen von p verhält. Sei $p = -p'$, wo also p' positiv, so ist, weil

$$\varLambda(p) = p\sqrt{1+p^2} + l(p + \sqrt{1+p^2}),$$

wenn p' eingesetzt wird:

$$\varLambda(-p') = -p'\sqrt{1+p'^2} + l(\sqrt{1+p'^2} - p') = -p'\sqrt{1+p'^2} - l\frac{1}{\sqrt{1+p'^2}-p'},$$

$$\varLambda(-p') = -(p'\sqrt{1+p'^2} + l(p' + \sqrt{1+p'^2})) = -\varLambda(p').$$

Hiernach ist also allgemein:

$$\varLambda(-p) = -\varLambda(p). \quad \ldots\ldots\ldots \quad 54)$$

Statt der stumpfen Winkel φ, ψ und $\varkappa$ (Taf. VIII. Fig. 5.) wollen wir übrigens ihre Supplemente φ_1, ψ_1, $\varkappa_1$ einführen. Da nun

Digitized by Google

$\varkappa = 180 - \varkappa_1$, $\varphi = 180 - \varphi_1$ und $\psi = 180 - \psi_1$, so gehen die Gleichungen 53), wenn man sie auf den niedersteigenden Ast bezieht, in die folgenden über:

55)

$$\operatorname{tg} \varkappa_1 = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\psi_1 + \operatorname{tg}\varphi_1) - \frac{1}{12M}(\operatorname{tg}\psi_1 - \operatorname{tg}\varphi_1)\log\left(\frac{L + \varDelta\operatorname{tg}\psi_1}{L + \varDelta\operatorname{tg}\varphi_1}\right),$$

$$m_1 = \frac{1}{2Mb}\log\left(\frac{L + \varDelta\operatorname{tg}\psi_1}{L + \varDelta\operatorname{tg}\varphi_1}\right)\frac{\cos\varkappa_1}{\mathfrak{S}(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\psi_1 - \varkappa_1)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varkappa_1 - \varphi_1))},$$

$$n_1 = m_1 \operatorname{tg}\varkappa_1.$$

Man kann also auch für den niedersteigenden Ast die Lage einer Reihe von Punkten bestimmen. Derselbe schneidet den Horizont des Punktes A unter einem Winkel ε, welchen man den Einfallswinkel nennt. Dieser Winkel muss bestimmt werden, um die Wurfweite $AS = W$ berechnen zu können.

§. 8.

Um zuerst einen genäherten Werth für den Einfallswinkel ε zu erhalten, benützen wir die Gleichung 30), nehmen indess an, der Körper beginne seine Bewegung im Punkte D (Taf. VIII. Fig. 5.) in horizontaler Richtung mit der Geschwindigkeit V_1, so hat man nach 21), da hier $p = 0$:

$$V_1 = \sqrt{\frac{g}{bL}}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 56)$$

Die Abscissen zählen wir jetzt auf der Linie DE; ausserdem wollen wir für die Ordinaten die Richtung nach abwärts als positiv annehmen, so ist in 30) zu setzen: $-y$ statt y, $\alpha = 0$ und $V = V_1$; dadurch erhält man:

$$y = \frac{g}{2V_1^2}x^2 + \frac{bg}{3V_1^2}x^3 + \frac{b^2g}{6V_1^2}x^4 + \ldots; \quad \ldots\ldots 57)$$

man leitet daraus ab:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g}{V_1^2}(x + bx^2 + \tfrac{2}{3}b^2x^3 + \ldots).$$

Setzt man die Wurfhöhe $QD = H$ und $QS = w_1$, so findet sich:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = bL(w_1 + bw_1^2 + \tfrac{2}{3}b^2w_1^3 + \ldots).$$

Zur Berechnung von w_1 dient die Gleichung:

$$\frac{2H}{bL} = w_1^2 + \tfrac{2}{3}bw_1^3 + \frac{b^2}{3}w_1^4 + \ldots$$

Digitized by Google

Durch Umkehrung dieser Reihe erhält man:

$$w_1 = \sqrt{\frac{2H}{bL}} - \frac{2H}{3L} + \frac{2}{9}\frac{bH}{L}\sqrt{\frac{2H}{bL}} - \dots.$$

Diesen Werth in den Ausdruck für $\operatorname{tg}\varepsilon$ eingesetzt, findet sich:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = L\sqrt{\frac{2bH}{L}}\left(1 + \tfrac{1}{6}\sqrt{\frac{2bH}{L}}\right)^2. \quad \ldots\ldots 58)$$

Der nach dieser Formel erhaltene Werth von ε kann nicht ganz genau sein, da nur einige Glieder der Reihe benützt wurden. Wir wollen daher den nach 58) erhaltenen Werth durch ε' bezeichnen und annehmen, derselbe entspreche dem Punkte F anstatt S (Taf. VIII. Fig. 1.). Dann lassen sich mittelst der Gleichungen 55), wenn man ε' als letzten Tangentenwinkel nimmt, die Coordinaten von F, nämlich DE und EF bestimmen, und setze:

$$H - EF = \zeta. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 59)$$

Durch den Punkt F legen wir jetzt eine Parabel, deren Tangentenwinkel gleich ε' und deren Krümmungshalbmesser in F gleich ist $\frac{\sec^3\varepsilon'}{b(L + \Delta\operatorname{tg}\varepsilon')}$. Die Gleichung dieser Parabel ist:

$$\eta = A\xi + B\xi^2,$$

wenn nämlich FG die Abscissenaxe ist und die positive Richtung der Ordinaten nach abwärts geht. Werden A und B den gedachten Bedingungen gemäss bestimmt, so findet sich:

$$\eta = \operatorname{tg}\varepsilon' . \xi + \tfrac{1}{2}b(L + \Delta\operatorname{tg}\varepsilon')\xi^2. \quad \ldots\ldots 60)$$

Für $\xi = \omega$ wird $\eta = \zeta$, und daher:

$$\zeta = (\operatorname{tg}\varepsilon' + \tfrac{1}{2}b(L + \Delta\operatorname{tg}\varepsilon')\,\omega)\,\omega,$$

$$\omega = \frac{\zeta}{\operatorname{tg}\varepsilon' + \tfrac{1}{2}b(L + \Delta\operatorname{tg}\varepsilon')\,\omega}.$$

Ein Näherungswerth für ω ist $\frac{\zeta}{\operatorname{tg}\varepsilon'}$, da im zweiten Gliede des Nenners der kleine Faktor b vorkommt. Wir können daher setzen:

$$\omega = \frac{\zeta}{\operatorname{tg}\varepsilon' + \tfrac{1}{2}b(L + \Delta\operatorname{tg}\varepsilon')\frac{\zeta}{\operatorname{tg}\varepsilon'}}. \quad \ldots\ldots 61)$$

Aus der Gleichung 60) erhält man:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\varepsilon' + b(L + \Delta\operatorname{tg}\varepsilon')\xi.$$

Digitized by Google

Setzt man darin $\xi = \omega$, so wird $\frac{d\eta}{d\xi} = \operatorname{tg}\varepsilon$, daher:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}\varepsilon' + b(L + A\operatorname{tg}\varepsilon')\,\omega \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 62)$$

Endlich hat man noch:

$$w_1 = DE + \omega \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 63)$$

§. 9.

Bestimmung der Flugzeit.

Die Differentialgleichung 19), welche die Beziehung zwischen dt und dp angibt, kann nicht integrirt werden. Doch lässt sich leicht ein genäherter Werth für die Zeit τ aufstellen, welche verfliesst, wenn p sich um eine gewisse Grösse ändert. Denn setzt (Taf. VIII. Fig. 2.) man den Bogen $BC = \sigma$ und die Geschwindigkeit in $B = v_{,}$, in $C = v_{,,}$, so ist nach 31) und 21):

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{1}{2b}\, l\left(\frac{L - A\operatorname{tg}\psi}{L - A\operatorname{tg}\varphi}\right), \\ v_{,} &= \frac{\sqrt{\frac{g}{b}}}{\cos\varphi\sqrt{L - A\operatorname{tg}\varphi}}, \\ v_{,,} &= \frac{\sqrt{\frac{g}{b}}}{\cos\psi\sqrt{L - A\operatorname{tg}\psi}}. \end{aligned}\right\} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 64)$$

Nimmt man an, die Bewegung von B nach C sei eine gleichmässig verzögerte, was um so weniger von der Wahrheit abweichen wird, je kleiner der Bogen BC, so hat man $\sigma = \frac{v_{,} + v_{,,}}{2}\tau$, also

$$\tau = \frac{2\sigma}{v_{,} + v_{,,}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; 65)$$

Um für τ einen genaueren Werth abzuleiten, betrachten wir die Zeit t als Abscisse, die Geschwindigkeit v als Ordinate einer Curve, deren Gleichung daher durch $v = f(t)$ dargestellt wird.

Da allgemein $d\sigma = v dt$, also $\sigma = \int_{t'}^{t'+\tau} v dt$, so stellt σ die Fläche $BCED$ (Taf. VIII. Fig. 6.) dieser Curve vor. Es ist daher aus der bekannten Fläche σ und den begrenzenden Ordinaten $v_{,}$, $v_{,,}$ die Abscissendifferenz τ zu bestimmen.

Digitized by Google

Um einen bequemen Ausdruck für diese Fläche zu erhalten, verlegen wir nach DJ die Abscissenaxe eines Coordinatensystems und nehmen für das Curvenstück DE (Taf. VIII. Fig. 6.) folgende Gleichungen an:

$$\left.\begin{aligned} y &= Ax + Bx^2 + Cx^3, \\ \frac{dy}{dx} &= A + 2Bx + 3Cx^2, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 66)$$

Für $x=0$ wird $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\zeta$, für $x=\tau$ wird $y=\nu$, $\frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\theta$, daher haben wir zur Bestimmung von A, B, C folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\zeta &= A, \\ \operatorname{tg}\theta &= A + 2B\tau + 3C\tau^2, \\ \nu &= A\tau + B\tau^2 + C\tau^3. \end{aligned}$$

Hieraus findet sich:

$$\left.\begin{aligned} A &= \operatorname{tg}\zeta, \\ B\tau^2 &= 3\nu - \tau\operatorname{tg}\theta - 2\tau\operatorname{tg}\zeta, \\ C\tau^3 &= \tau(\operatorname{tg}\zeta + \operatorname{tg}\theta) - 2\nu, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots 67)$$

$$\text{Fläche } DJE = \int_0^\tau y\,dx = \int_0^\tau (Ax + Bx^2 + Cx^3)\,dx$$

$$= \frac{\tau}{12}(6A\tau + 4B\tau^2 + 3C\tau^3).$$

Werden die Werthe von A, B, C eingesetzt, so ergibt sich:

$$\text{Fläche } DJE = \tfrac{1}{2}\tau\nu + \tfrac{1}{12}\tau^2(\operatorname{tg}\zeta - \operatorname{tg}\theta) = \frac{v_{,} - v_{,,}}{2}\tau - \tfrac{1}{12}\tau^2(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\zeta),$$

$$\text{Fläche } BCED = BCJD - DJE = v_{,}\tau - \tfrac{1}{2}(v_{,} - v_{,,})\tau + \tfrac{1}{12}\tau^2(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\zeta),$$

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(v_{,} + v_{,,})\tau + \tfrac{1}{12}(\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\zeta)\tau^2. \quad \ldots\ldots 68)$$

Um die Winkel ζ und θ zu bestimmen, suchen wir den Werth des Differentialquotienten $\frac{dv}{dt}$. Nach 21) ist $v^2 = \frac{g}{b}\cdot\frac{1+p^2}{L - \Lambda p}$. Nimmt man beiderseits die Logarithmen und differentiirt, so findet man:

$$dv = v\left(\frac{p}{1+p^2} + \frac{\sqrt{1+p^2}}{L - \Lambda p}\right)dp$$

und erhält mit Zuziehung der Gleichung 19):

$$\frac{dv}{dt} = -g\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{1+p^2}{L - \Lambda p}\right). \quad \ldots\ldots 69)$$

Digitized by Google

Dieser Ausdruck ist die Tangente des Neigungswinkels der Berührenden mit der Abscissenaxe für die Curve $v = f(t)$. Das negative Zeichen sagt, dass dieser Winkel ein stumpfer ist. Die Winkel ζ und θ sind die Supplemente der stumpfen Winkel für diejenigen Punkte, wo $p = \operatorname{tg}\varphi$ und $p = \operatorname{tg}\psi$ ist. Wir haben daher:

$$\operatorname{tg}\zeta = g\left(\sin\varphi + \frac{\sec^2\varphi}{L - A\operatorname{tg}\varphi}\right) \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\theta = g\left(\sin\psi + \frac{\sec^2\psi}{L - A\operatorname{tg}\psi}\right).$$

Mit Beachtung der Gleichungen 64) erhält man:

$$\operatorname{tg}\zeta = g\sin\varphi + bv_{,}^2 \quad \text{und} \quad \operatorname{tg}\theta = g\sin\psi + bv_{,,}^2,$$

$$\operatorname{tg}\theta - \operatorname{tg}\zeta = g(\sin\psi - \sin\varphi) + b(v_{,,}^2 - v_{,}^2). \quad \ldots 70)$$

Wird dieser Werth in 68) eingesetzt, so erhält man zur Bestimmung von τ die Gleichung:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(v_{,} + v_{,,})\tau + \tfrac{1}{12}\tau^2[g(\sin\psi - \sin\varphi) + b(v_{,,}^2 - v_{,}^2)].$$

Im aufsteigenden Ast der ballistischen Curve ist $\varphi > \psi$ und $v_{,} > v_{,,}$, desshalb schreiben wir:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}(v_{,} + v_{,,})\tau - \tfrac{1}{12}\tau^2[g(\sin\varphi - \sin\psi) + b(v_{,}^2 - v_{,,}^2)],$$

$$\tau = \frac{2\sigma}{v_{,} + v_{,,}} + \frac{\tau^2}{6}\cdot\frac{g(\sin\varphi - \sin\psi) + b(v_{,}^2 - v_{,,}^2)}{v_{,} + v_{,,}}.$$

Da das zweite Glied, in welchem τ^2 vorkommt, eine ziemlich kleine Grösse ist, so können wir daselbst für τ den Näherungswerth 65) setzen und erhalten:

$$\tau = \frac{2\sigma}{v_{,} + v_{,,}} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\sigma}{v_{,} + v_{,,}}\right)^2 \cdot \left[b(v_{,} - v_{,,}) + g\frac{\sin\varphi - \sin\psi}{v_{,} + v_{,,}}\right]. \quad 71)$$

Uebersichtliche Zusammenstellung der Formeln zur Berechnung der Wurfhöhe, Wurfweite und Flugzeit.

§. 10.

Um die Formeln 53) für die Rechnung etwas bequemer einzurichten, führen wir die Hülfsgrösse u ein, und setzen:

$$\frac{1}{6M}\log\left(\frac{L - A\operatorname{tg}\psi}{L - A\operatorname{tg}\varphi}\right) = u,$$

dadurch wird:

$$\operatorname{tg}\varkappa = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\varphi + \operatorname{tg}\psi) + \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\psi)u$$

Digitized by Google

und

$$m = \frac{3u\cos\varkappa}{b.\mathfrak{F}[\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varphi-\varkappa)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varkappa-\psi)]}.$$

Ausserdem setzen wir überall statt b die Constante k des Luftwiderstandes, welche zu b in der Beziehung steht, dass $k=\frac{1}{2b}$. (Siehe §. 2.)

Je nach der Grösse des Elevationswinkels α unterscheiden wir mehrere Fälle.

Ist $\angle\alpha$ nicht grösser als 15°, so lässt sich die Wurfhöhe H schon durch eine einmalige Anwendung der Formeln 53) mit hinreichender Genauigkeit bestimmen; man setzt dann $\varphi=\alpha$ und $\psi=0$.

Man berechnet zunächst k, p und L wie folgt:

$$k = \frac{1}{\lambda\gamma}\cdot\frac{Q}{F},$$
$$p = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$L = \frac{2gk}{V^2\cos^2\alpha} + \Delta p.$$

Wenn Meter und Kilogramm zu Grunde gelegt werden, so ist:

$$\frac{1}{\lambda\gamma} = 3.3445, \quad g = 9.81.$$

Δp entnimmt man aus Tafel I.

A. Aufsteigender Ast. (Taf. VIII. Fig. 7.)

$$\log u = 9.58406 + \log(\log\frac{L}{L-\Delta p}),$$
$$\operatorname{tg}\varkappa = \tfrac{1}{3}p(1+u),$$
$$w = 6k\frac{u\cos\varkappa}{\mathfrak{F}[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varkappa\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\varkappa)]},$$
$$H = w\operatorname{tg}\varkappa.$$

Man geht mit $[\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varkappa + \log\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\varkappa)]$ in die mit A. bezeichnete Spalte der Tafel II. ein, so ist das zugehörige B. gleich $\log\mathfrak{F}[\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varkappa\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha-\varkappa)]$.

B. Niedersteigender Ast.

$$\log u_1 = 9.58406 + \log(\log\frac{L+\Delta p}{L}),$$

$$\operatorname{tg} \varkappa_1 = \tfrac{1}{2} p (1 - u_1),$$

$$a_1 = 6k \frac{u_1 \cos \varkappa_1}{\mathfrak{F}[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varkappa_1 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha - \varkappa_1)]},$$

$$h_1 = a_1 \operatorname{tg} \varkappa_1;$$

$$p_2 = \sqrt{\frac{HL}{k}} (1 + \frac{1}{3L} \sqrt{\frac{HL}{k}})^2,$$

$$\log u_2 = 9.58406 + \log (\log \frac{L + \varDelta p_2}{L + \varDelta p}),$$

$$\operatorname{tg} \varkappa_2 = \tfrac{1}{2}(p_2 + p) - \tfrac{1}{2}(p_2 - p) u_2,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = p_2,$$

$$a_2 = 6k . \frac{u_2 \cos \varkappa_2}{\mathfrak{F}[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \varkappa_2) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varkappa_2 - \alpha)]},$$

$$h_2 = a_2 \operatorname{tg} \varkappa_2,$$

$$\zeta = H - (h_1 + h_2),$$

$$J = \frac{L + \varDelta p_2}{4 k p_2},$$

$$\omega = \frac{\frac{\zeta}{p_2}}{1 + J . \frac{\zeta}{p_2}},$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = p_2 (1 + 2 J \omega),$$

$$w_1 = a_1 + a_2 + \omega,$$

$$W = w + w_1.$$

C. Flugzeit.

Zeit v. A bis $D = \tau$,	Bogen $AD = \sigma$,	Geschwindigk. in $D = V_1$.
„ „ D „ $E = \tau_1$,	„ $DE = \sigma_1$,	„ „ $E = V_2$.
„ „ E „ $C = \tau_2$,	„ $EC = \sigma_2$,	„ „ $C = V_3$.

$$\sigma = 6ku, \qquad V_1 = \sqrt{\frac{2gk}{L}},$$

$$\sigma_1 = 6ku_1, \qquad V_2 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos \alpha \sqrt{L + \varDelta p}},$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{M} k \log \left(\frac{L + \varDelta \operatorname{tg} \varepsilon}{L + \varDelta p} \right), \qquad V_3 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos \varepsilon \sqrt{L + \varDelta \operatorname{tg} \varepsilon}},$$

$$\log \frac{1}{M} = 0.36222,$$

$$\tau = \frac{2\sigma}{V+V_1} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\sigma}{V+V_1}\right)^2 \left[\frac{V-V_1}{2k} + \frac{g\sin\alpha}{V+V_1}\right],$$

$$\tau_1 = \frac{2\sigma_1}{V_1+V_2} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\sigma_1}{V_1+V_2}\right)^2 \left[\frac{V_1-V_2}{2k} + \frac{g\sin\alpha}{V_1+V_2}\right],$$

$$\tau_2 = \frac{2\sigma_2}{V_2+V_3} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\sigma_2}{V_2+V_3}\right)^2 \left[\frac{V_2-V_3}{2k} + \frac{g(\sin\varepsilon-\sin\alpha)}{V_2+V_3}\right].$$

§. 11.

Liegt $\angle\alpha$ zwischen 15° und 30°, so wende man folgende Formeln an (Taf. VIII. Fig. 8.):

$$k = \frac{1}{\lambda\gamma}\cdot\frac{Q}{F} = 3.3445\,\frac{Q}{F},$$

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$p = \operatorname{tg}\alpha,$$

$$p_1 = \operatorname{tg}\alpha_1,$$

$$L = \frac{2gk}{V^2\cos^2\alpha} + \Delta p.$$

A. Aufsteigender Ast.

$$\log u = 9.58406 + \log\left(\log\frac{L-\Delta p_1}{L-\Delta p}\right),$$

$$\operatorname{tg}\varkappa = \tfrac{1}{2}(p+p_1) + \tfrac{1}{2}(p-p_1)u,$$

$$a = 6k.\frac{u\cos\varkappa}{\mathfrak{S}[\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\varkappa)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varkappa-\alpha_1)]},$$

$$h = a\operatorname{tg}\varkappa;$$

$$\log u_1 = 9.58406 + \log\left(\log\frac{L}{L-\Delta p_1}\right),$$

$$\operatorname{tg}\varkappa_1 = \tfrac{1}{2}p_1(1+u_1),$$

$$a_1 = 6k.\frac{u_1\cos\varkappa_1}{\mathfrak{S}[\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\varkappa_1)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varkappa_1]},$$

$$h_1 = a_1\operatorname{tg}\varkappa_1,$$

$$w = a + a_1,$$

$$H = h + h_1.$$

B. Niedersteigender Ast.

$$\log u_2 = 9.58406 + \log\left(\log\frac{L+\Delta p_1}{L}\right),$$

$$\operatorname{tg}\varkappa_2 = \tfrac{1}{2}p_1(1-u_2),$$

Digitized by Google

$$a_2 = 6k \cdot \frac{u_2 \cos \varkappa_2}{\mathfrak{F}[\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha_1 - \varkappa_2)\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varkappa_2]},$$

$$h_2 = a_2 \operatorname{tg} \varkappa_2;$$

$$\log u_3 = 9.58406 + \log\left(\log \frac{L + \varDelta p}{L + \varDelta p_1}\right),$$

$$\operatorname{tg} \varkappa_3 = \tfrac{1}{2}(p + p_1) - \tfrac{1}{2}(p - p_1)u_3,$$

$$a_3 = 6k \cdot \frac{u_3 \cos \varkappa_3}{\mathfrak{F}[\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha - \varkappa_3)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varkappa_3 - \alpha_1)]},$$

$$h_3 = a_3 \operatorname{tg} \varkappa_3;$$

$$p_4 = \sqrt{\frac{HL}{k}}\,(1 + \frac{1}{3L}\sqrt{\frac{HL}{k}})^2,$$

$$\log u_4 = 9.58406 + \log(\log \frac{L + \varDelta p_4}{L + \varDelta p}),$$

$$\operatorname{tg} \varkappa_4 = \tfrac{1}{2}(p_4 + p) - \tfrac{1}{2}(p_4 - p)u_4,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_4 = p_4,$$

$$a_4 = 6k \cdot \frac{u_4 \cos \varkappa_4}{\mathfrak{F}[\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha_4 - \varkappa_4)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varkappa_4 - \alpha)},$$

$$h_4 = a_4 \operatorname{tg} \varkappa_4,$$

$$\zeta = H - (h_2 + h_3 + h_4),$$

$$J = \frac{L + \varDelta p_4}{4kp_4},$$

$$\omega = \frac{\frac{\zeta}{p_4}}{1 + J \cdot \frac{\zeta}{p_4}},$$

$$\operatorname{tg} \varepsilon = p_4(1 + 2J\omega),$$

$$w_1 = a_2 + a_3 + a_4 + \omega,$$

$$W = w + w_1.$$

C. Flugzeit.

Zeit v. A bis $D = \tau$,	Bogen $AD = \sigma$,	Geschwindigk. in	$D = v_1$.
„ „ D „ $E = \tau_1$,	„ $DE = \sigma_1$,	„	„ $E = V_1$.
„ „ E „ $F = \tau_2$,	„ $EF = \sigma_2$,	„	„ $F = v_2$.
„ „ F „ $G = \tau_3$,	„ $FG = \sigma_3$,	„	„ $G = v_3$.
„ „ G „ $C = \tau_4$,	„ $GC = \sigma_4$,	„	„ $C = V_2$.

$$\sigma = 6ku, \qquad v_1 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos\alpha_1\sqrt{L-\varDelta p_1}}, \quad v_3 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos\alpha\sqrt{L+\varDelta p}}.$$

$$\sigma_1 = 6ku_1,$$

$$\sigma_2 = 6ku_2, \qquad V_1 = \sqrt{\frac{2gk}{L}}, \qquad V_2 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos\varepsilon\sqrt{L+\varDelta \operatorname{tg}\varepsilon}}.$$

$$\sigma_3 = 6ku_3,$$

$$\sigma_4 = \frac{1}{M}k\log\left(\frac{L+\varDelta\operatorname{tg}\varepsilon}{L+\varDelta p}\right) \quad v_2 = \frac{\sqrt{2gk}}{\cos\alpha_1\sqrt{L+\varDelta p_1}},$$

$$\tau = \frac{2\sigma}{V+v_1} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\sigma}{V+v_1}\right)^2\left[\frac{V-v_1}{2k} + \frac{g(\sin\alpha - \sin\alpha_1)}{V+v_1}\right],$$

$$\tau_1 = \frac{2\sigma_1}{v_1+V_1} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\sigma_1}{v_1+V_1}\right)^2\left[\frac{v_1-V_1}{2k} + \frac{g\sin\alpha_1}{v_1+V_1}\right],$$

$$\tau_2 = \frac{2\sigma_2}{V_1+v_2} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\sigma_2}{V_1+v_2}\right)^2\left[\frac{V_1-v_2}{2k} + \frac{g\sin\alpha_1}{V_1+v_2}\right],$$

$$\tau_3 = \frac{2\sigma_3}{v_2+v_3} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\sigma_3}{v_2+v_3}\right)^2\left[\frac{v_2-v_3}{2k} + \frac{g(\sin\alpha - \sin\alpha_1)}{v_2+v_3}\right],$$

$$\tau_4 = \frac{2\sigma_4}{v_3+V_2} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\sigma_4}{v_3+V_2}\right)^2\left[\frac{v_3-V_2}{2k} + \frac{g(\sin\varepsilon - \sin\alpha)}{v_3+V_2}\right].$$

§. 12.

Beträgt (Taf. VIII. Fig. 9.) der Elevationswinkel α zwischen 30^0 und 45^0, so wird man ihn, um sichere Resultate zu erhalten, in drei gleiche Theile theilen, wo sich dann folgende Vorschriften für die Rechnung ergeben:

$$k = \frac{1}{\lambda\gamma}\cdot\frac{Q}{F} = 3.3445\,\frac{Q}{F},$$

$$\alpha_1 = \tfrac{2}{3}\alpha, \qquad \alpha_2 = \tfrac{1}{3}\alpha,$$

$$p = \operatorname{tg}\alpha, \quad p_1 = \operatorname{tg}\alpha_1, \quad p_2 = \operatorname{tg}\alpha_2,$$

$$L = \frac{2gk}{V^2\cos^2\alpha} + \varDelta p.$$

A. Aufsteigender Ast.

$$\log u = 9.58406 + \log\left(\log\frac{L-\varDelta p_1}{L-\varDelta p}\right),$$

$$\operatorname{tg}\varkappa = \tfrac{1}{2}(p+p_1) + \tfrac{1}{2}(p-p_1)u,$$

$$a = 6k\cdot\frac{u\cos\varkappa}{\mathfrak{F}[\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\varkappa)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varkappa-\alpha_1)]},$$

$$h = a \operatorname{tg} \varkappa;$$

$$\log u_1 = 9.58406 + \log(\log \frac{L - \Delta p_2}{L - \Delta p_1}),$$

$$\operatorname{tg} \varkappa_1 = \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2) + \tfrac{1}{2}(p_1 - p_2) u_1,$$

$$a_1 = 6k . \frac{u_1 \cos \varkappa_1}{\mathfrak{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_1 - \varkappa_1) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varkappa_1 - \alpha_2)]},$$

$$h_1 = a_1 \operatorname{tg} \varkappa_1;$$

$$\log u_2 = 9.58406 + \log(\log \frac{L}{L - \Delta p_2}),$$

$$\operatorname{tg} \varkappa_2 = \tfrac{1}{2} p_2 (1 + u_2),$$

$$a_2 = 6k . \frac{u_2 \cos \varkappa_2}{\mathfrak{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_2 - \varkappa_2) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varkappa_2)]},$$

$$h_2 = a_2 \operatorname{tg} \varkappa_2,$$

$$w = a + a_1 + a_2,$$

$$H = h + h_1 + h_2.$$

B. Niedersteigender Ast.

$$\log u_3 = 9.58406 + \log(\log \frac{L + \Delta p_2}{L}),$$

$$\operatorname{tg} \varkappa_3 = \tfrac{1}{2} p_2 (1 - u_3),$$

$$a_3 = 6k . \frac{u_3 \cos \varkappa_3}{\mathfrak{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_2 - \varkappa_3) \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varkappa_3]},$$

$$h_3 = a_3 \operatorname{tg} \varkappa_3;$$

$$\log u_4 = 9.58406 + \log(\log \frac{L + \Delta p_1}{L + \Delta p_2}),$$

$$\operatorname{tg} \varkappa_4 = \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2) - \tfrac{1}{2}(p_1 - p_2) u_4,$$

$$a_4 = 6k . \frac{u_4 \cos \varkappa_4}{\mathfrak{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha_1 - \varkappa_4) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varkappa_4 - \alpha_2)]},$$

$$h_4 = a_4 \operatorname{tg} \varkappa_4;$$

$$\log u_5 = 9.58406 + \log(\log \frac{L + \Delta p}{L + \Delta p_1}),$$

$$\operatorname{tg} \varkappa_5 = \tfrac{1}{2}(p + p_1) - \tfrac{1}{2}(p - p_1) u_5,$$

$$a_5 = 6k . \frac{u_5 \cos \varkappa_5}{\mathfrak{F}[\operatorname{tg} \frac{1}{2}(\alpha - \varkappa_5) \operatorname{tg} \frac{1}{2}(\varkappa_5 - \alpha_1)]},$$

$$h_5 = a_5 \operatorname{tg} \varkappa_5;$$

$$p_6 = \sqrt{\frac{HL}{k}} (1 + \frac{1}{3L} \sqrt{\frac{HL}{k}})^2,$$

$$\operatorname{tg} \alpha_6 = p_6 .$$

Digitized by Google

$$\log u_6 = 9.58406 + \log\left(\log\frac{L+\Delta p_6}{L+\Delta p}\right),$$

$$\operatorname{tg}\varkappa_6 = \tfrac{1}{2}(p_6+p) - \tfrac{1}{2}(p_6-p)u_6,$$

$$a_6 = 6k.\frac{u_6\cos\varkappa_6}{\sqrt{\left[\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha_6-\varkappa_6)\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\varkappa_6-\alpha)\right]}},$$

$$h_6 = a_6\operatorname{tg}\varkappa_6,$$

$$\zeta = H-(h_3+h_4+h_5+h_6),$$

$$J = \frac{L+\Delta p_6}{4kp_6},$$

$$\omega = \frac{\dfrac{\zeta}{p_6}}{1+J\dfrac{\zeta}{p_6}},$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon = p_6(1+2J\omega),$$

$$w_1 = a_3+a_4+a_5+a_6+\omega,$$

$$W = w+w_1.$$

C. Flugzeit. (Taf. VIII. Fig. 9.)

Zeit v. A bis $D=\tau$,	Bogen $AD=\sigma$,	Geschwindigk. in $D=v_1$.
„ „ D „ $E=\tau_1$,	„ $DE=\sigma_1$,	„ „ $E=v_2$.
„ „ E „ $F=\tau_2$,	„ $EF=\sigma_2$,	„ „ $F=V_1$.
„ „ F „ $G=\tau_3$,	„ $FG=\sigma_3$,	„ „ $G=v_3$.
„ „ G „ $H=\tau_4$,	„ $GH=\sigma_4$,	„ „ $H=v_4$.
„ „ H „ $J=\tau_5$,	„ $HJ=\sigma_5$,	„ „ $J=v_5$.
„ „ J „ $C=\tau_6$,	„ $JC=\sigma_6$,	„ „ $C=V_2$.

$\sigma=6ku$,

$\sigma_1=6ku_1$, $\quad v_1=\dfrac{\sqrt{2gk}}{\cos\alpha_1\sqrt{L-\Delta p_1}}$, $\quad v_4=\dfrac{\sqrt{2gk}}{\cos\alpha_1\sqrt{L+\Delta p_1}}$,

$\sigma_2=6ku_2$,

$\sigma_3=6ku_3$, $\quad v_2=\dfrac{\sqrt{2gk}}{\cos\alpha_2\sqrt{L-\Delta p_2}}$, $\quad v_5=\dfrac{\sqrt{2gk}}{\cos\alpha\sqrt{L+\Delta p}}$,

$\sigma_4=6ku_4$, $\quad V_1=\dfrac{\sqrt{2gk}}{\sqrt{L}}$, $\quad V_2=\dfrac{\sqrt{2gk}}{\cos\varepsilon\sqrt{L+\Delta\operatorname{tg}\varepsilon}}$

$\sigma_5=6ku_5$,

$\sigma_6=\dfrac{1}{M}k\log\left(\dfrac{L+\Delta\operatorname{tg}\varepsilon}{L+\Delta p}\right)$, $\quad v_3=\dfrac{\sqrt{2gk}}{\cos\alpha_2\sqrt{L+\Delta p_2}}$,

$$\tau = \frac{2\sigma}{V+v_1}+\tfrac{1}{6}\left(\frac{2\sigma}{V+v_1}\right)^2\left[\frac{V-v_1}{2k}+\frac{g(\sin\alpha-\sin\alpha_1)}{V+v_1}\right],$$

$$\tau_1 = \frac{2\sigma_1}{v_1+v_2}+\tfrac{1}{6}\left(\frac{2\sigma_1}{v_1+v_2}\right)^2\left[\frac{v_1-v_2}{2k}+\frac{g(\sin\alpha_1-\sin\alpha_2)}{v_1+v_2}\right].$$

Digitized by Google

$$\tau_2 = \frac{2\sigma_2}{v_2 + V_1} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\sigma_2}{v_2 + V_1}\right)^2 \left[\frac{v_2 - V_1}{2k} + \frac{g \sin\alpha_2}{v_2 + V_1}\right],$$

$$\tau_3 = \frac{2\sigma_3}{V_1 + v_3} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\sigma_3}{V_1 + v_3}\right)^2 \left[\frac{V_1 - v_3}{2k} + \frac{g \sin\alpha_2}{V_1 + v_3}\right],$$

$$\tau_4 = \frac{2\sigma_4}{v_3 + v_4} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\sigma_4}{v_3 + v_4}\right)^2 \left[\frac{v_3 - v_4}{2k} + \frac{g(\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)}{v_3 + v_4}\right],$$

$$\tau_5 = \frac{2\sigma_5}{v_4 + v_5} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\sigma_5}{v_4 + v_5}\right)^2 \left[\frac{v_4 - v_5}{2k} + \frac{g(\sin\alpha - \sin\alpha_1)}{v_4 + v_5}\right],$$

$$\tau_6 = \frac{2\sigma_6}{v_5 + V_2} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{2\sigma_6}{v_5 + V_2}\right)^2 \left[\frac{v_5 - V_2}{2k} + \frac{g(\sin\varepsilon - \sin\alpha)}{v_5 + V_2}\right].$$

§. 13.

Nach den in den vorhergehenden Paragraphen gegebenen Vorschriften sollen nun einige Beispiele gerechnet werden.

Ein Vierundzwanzigpfünder, dessen Gewicht 27 Kilogramm und Durchmesser 0,152 Meter beträgt, werde mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 300 Meter unter einem Elevationswinkel von 15 Grad abgeschossen; man soll die Wurfhöhe, Wurfweite und Flugzeit berechnen.

Hier können die Formeln des §. 10. angewandt werden. Die Rechnung führen wir mit fünfstelligen Logarithmen *) aus, da solche hinreichend genaue Resultate gewähren.

$$F = \tfrac{1}{4}\pi . 0^2.152, \quad Q = 27, \quad V = 300, \quad \alpha = 15^0, \quad g = 9.81.$$

$\log \frac{1}{4}\pi = 9.89509$	$\log 3.3445 = 0.52433$
$2 \log 0.152 = 8.36368$	$+ \log Q = 1.43136$
$\log F = 8.25877$	$+ \text{Compl.} \log F = 1.74123$
	$\log k = 3.69692.$

Eine Anschauung der Formeln zeigt, dass im Laufe der Rechnung die Logarithmen von $2k$, $4k$ und $6k$ nothwendig sind; wir wollen sie daher sogleich bestimmen:

*) Der Verfasser erlaubt sich hier auf seine bei Diehl in Darmstadt 1866 erschienene fünfstellige Logarithmentafel aufmerksam zu machen, welche für die Interpolationsrechnungen sehr bequem eingerichtet ist und auch die Logarithmen für Summe und Differenz enthält, ohne welche viele der hier vorkommenden Formeln nicht bequem berechnet werden könnten.

Digitized by Google

$$\log 2 = 0.30103 \qquad \log 4k = 4.29898$$
$$\log 4 = 0.60206 \qquad \log 6k = 4.47507$$
$$\log 6 = 0.77815$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 9.42805, \quad \text{daher} \quad p = 0.26795.$$

Mit diesem Werthe von p erhält man aus Tafel I. den Werth von Δp.

$$\log V = 2.47712$$
$$\log \cos \alpha = \underline{9.98494}$$
$$\log V \cos \alpha = 2.46206$$
$$\log V^2 \cos^2 \alpha = 4.92412$$

$$\log g = 0.99167$$
$$\log 2k = 3.99795$$
$$\text{Comp.}\log(V^2 \cos^2 \alpha) = \underline{5.07588}$$
$$\log 1.1628 = 0.06550$$

$$\Delta p = 0.5423$$
$$\frac{2kg}{V^2 \cos^2 \alpha} = \underline{1.1628}$$
$$L = 1.7051$$
$$L - \Delta p = 1.1628$$
$$L + \Delta p = 2.2474$$

$$\log L = 0.23175$$
$$\log(L - \Delta p) = 0.06550$$
$$\log(L + \Delta p) = 0.35168$$

$$\log \frac{L}{L - \Delta p} = 0.16625$$
$$\log 0.16625 = 9.22076$$
$$\underline{9.58406}$$
$$\log u = 8.80482$$
$$\log(1 + u) = 0.02686$$
$$\log p = 9.42805$$
$$\log \tfrac{1}{2} = \underline{9.69897}$$
$$\log \operatorname{tg} \varkappa = 9.15388$$
$$\varkappa = 8^0\ 6'\ 41''$$

$$\tfrac{1}{2}\varkappa = 4^0 3' 20''$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha = 7\ 30\ 0$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha - \varkappa) = 3\ 26\ 40$$
$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha - \varkappa) = 8.77952$$
$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varkappa = \underline{8.85066}$$
$$7.63018$$

$$\log 6k = 4.47507$$
$$\log u = 8.80482$$
$$\log \cos \varkappa = \underline{9.99564}$$
$$3.27553$$
$$\log S[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\alpha - \varkappa) \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\varkappa] = \underline{0.00124}$$
$$\log w = 3.27429$$
$$\log \operatorname{tg} \varkappa = \underline{9.15388}$$
$$\log H = 2.42817$$

Digitized by Google

Mit diesem Werthe in die durch A. bezeichnete Spalte der Tafel II. eingegangen erhält man $B = 0.00124$. Danach finden sich die Coordinaten des höchsten Punktes $w = 1880.56$, $H = 268.02$.

Niedersteigender Ast.

$$\log\frac{L+\Delta p}{L} = 0.11993$$
$$\log 0.11993 = 9.07893$$
$$9.58406$$
$$\log u_1 = 8.66299$$
$$\log\frac{1}{u_1} = 1.33701$$
$$\log\left(\frac{1}{u_1}-1\right) = 1.31655$$
$$\log(1-u_1) = 9.97954$$
$$\log \tfrac{1}{2}p = 9.12702$$
$$\log\operatorname{tg}\varkappa_1 = 9.10656$$
$$\varkappa_1 = 7^0\,17'\,0''$$

$$\tfrac{1}{2}\varkappa_1 = 3^0\,38'\,30''$$
$$\tfrac{1}{2}\alpha = 7\;30\;\;0$$
$$\tfrac{1}{2}(\alpha-\varkappa_1) = 3\;51\;30$$
$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\varkappa_1) = 8.82893$$
$$\log\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varkappa_1 = 8.80377$$
$$7.63270$$

$$\log 6k = 4.47507$$
$$\log u_1 = 8.66299$$
$$\log\cos\varkappa_1 = 9.99648$$
$$3.13454$$
$$\log \mathfrak{S} = 0.00125$$
$$\log a_1 = 3.13329$$
$$\log\operatorname{tg}\varkappa_1 = 9.10656 \qquad a_1 = 1359.23$$
$$\log h_1 = 2.23985 \qquad h_1 = 173.72$$

$$\log H = 2.42817$$
$$\log L = 0.23175$$
$$\log\frac{1}{k} = 6.30308$$
$$8.96300$$
$$\log\sqrt{\frac{HL}{k}} = 9.48150$$
$$0.05000$$
$$\log p_2 = 9.53150$$

$$\log 3 = 0.47712$$
$$\log L = 0.23175$$
$$\log 3L = 0.70887$$
$$9.48150$$
$$\log\frac{1}{3L}\sqrt{\frac{HL}{k}} = 8.77263$$
$$\log\left(1+\frac{1}{3L}\sqrt{\frac{HL}{k}}\right) = 0.02500$$
$$p_2 = 0.340018$$

$$\alpha_2 = 18^0\,46'\,44''$$
$$\Delta p_2 = 0.6929$$
$$L = 1.7051$$
$$L + \Delta p_2 = 2.3980$$

$$\log \ldots = \ldots \qquad \tfrac{1}{2}(p_2+p) = \ldots$$

$$9.58406$$

$$\log u_2 = 8.03385 \qquad \tfrac{1}{2}(p_2-p) = 0.036034$$

$$\log \tfrac{1}{2}(p_2-p) = 8.55671 \qquad \frac{\alpha_2}{2} = 9^0 23' 22''$$

$$6.59056 \qquad \frac{\alpha_2-\varkappa_2}{2} = 0^0 56' 44'' \qquad \log tg\, 8.218$$

$$\log \tfrac{1}{2}(p_2+p) = 9.48285 \qquad \frac{\varkappa_2}{2} = 8\ 26\ 38$$

$$2.89229 \qquad \frac{\varkappa_2-\alpha}{2} = 0\ 56\ 38 \qquad \log tg\, 8.217$$

$$2.89173 \qquad 6.435$$

$$\log tg\, \varkappa_2 = 9.48229 \qquad \frac{\alpha}{2} = 7\ 30\ 0$$

$$\varkappa_2 = 16^0 53' 16''$$

$$\log 6k = 4.47507 \qquad h_2 = 93.75 \qquad \log(L + \varDelta p_2) = 0.37985 \qquad \omega = 1.62$$

$$\log u_2 = 8.03385 \qquad h_1 = 173.72 \qquad \log \frac{1}{4k} = 5.70102 \qquad a_1 = 1359.23$$

$$\log \cos \varkappa_2 = 9.98086 \qquad h_1 + h_2 = 267.47 \qquad \log \frac{1}{p_2} = 0.46850 \qquad a_2 = 308.82$$

$$2.48978 \qquad H = 268.02 \qquad w_1 = 1669.67$$

$$\log \mathfrak{F} = 0.00008 \qquad \zeta = 0.55 \qquad \log J = 6.54937 \qquad w = 1880.56$$

$$\log a_2 = 2.48970 \qquad 0.20886 \qquad W = 3550.23$$

$$\log tg\, \varkappa_2 = 9.48229 \qquad \log \zeta = 9.74036 \qquad \log J \frac{\zeta}{p_2} = 6.75823$$

$$\log h_2 = 1.97199 \qquad \log \frac{1}{p_2} = 0.46850$$

$$\log \frac{\zeta}{p_2} = 0.20886 \qquad \log\left(1 + J\frac{\zeta}{p_2}\right) = 0.00025$$

$$\log \omega = 0.20861$$

$$\log 2J = 6.85040$$

$$\log 2J\omega = 7.05901$$

$$\log(1 + 2J\omega) = 0.00050$$

$$\log p_2 = 9.53150$$

$$\log tg\, \varepsilon = 9.53200$$

$$\varepsilon = 18^0 47' 57''$$

Berechnung der Flugzeit.

$\operatorname{tg}\varepsilon = 0.34041, \quad \Delta(\operatorname{tg}\varepsilon) = 0.6938, \quad L + \Delta\operatorname{tg}\varepsilon = 2.3989, \quad \log(L + \Delta\operatorname{tg}\varepsilon) = 0.38001.$

$\log 2k = 3.99795$	$\log\cos\alpha = 9.98494$	$\log\cos\varepsilon = 9.97620$
$\log g = 0.99167$	$\log\sqrt{L+\Delta p} = 0.17584$	$\log\sqrt{L+\Delta\operatorname{tg}\varepsilon} = 0.19000$
4.98962	0.16078	0.16620
$\log\sqrt{2kg} = 2.49481$	$\log\sqrt{2kg} = 2.49481$	2.49481
$\log\sqrt{L} = 0.11588$	$\log V_2 = 2.33403$	$\log V_3 = 2.32861$
$\log V_1 = 2.37893$		

$V = 300.00$		
$V_1 = 239.30$	$V + V_1 = 539.30$	$V - V_1 = 60.70$
$V_2 = 215.79$	$V_1 + V_2 = 455.09$	$V_1 - V_2 = 23.51$
$V_3 = 213.11$	$V_2 + V_3 = 428.90$	$V_2 - V_3 = 2.68$

$\log 6k = 4.47507$	$\log 6k = 4.47507$		$\log(L + \Delta\operatorname{tg}\varepsilon) = 0.38001$
$\log u = 8.80482$	$\log u_1 = 8.66299$		$\log(L + \Delta p) = 0.35168$
$\log\sigma = 3.27989$	$\log\sigma_1 = 3.13806$		$\log 0.02833 = 8.45225$
$\log 2\sigma = 3.58092$	$\log 2\sigma_1 = 3.43909$	$\log 2\sigma_2 = 2.81242$	$\log k = 3.69692$
$\log(V + V_1) = 2.73183$	$\log(V_1 + V_2) = 2.65810$	$\log(V_2 + V_3) = 2.63236$	$\text{Comp.}\log M = 0.36222$
0.84909	0.78099	0.18006	$\log\sigma_2 = 2.51139$

$$\frac{2\sigma}{V + V_1} = 7.0646 \qquad \frac{2\sigma_1}{V_1 + V_2} = 6.0393 \qquad \frac{2\sigma_2}{V_2 + V_3} = 1.5138$$

$$\text{Compl.}\log 2k = 6.00205$$
$$\log(V - V_1) = 1.78319$$
$$\log(V_1 - V_2) = 1.37125$$
$$\log(V_2 - V_3) = 0.42813$$
$$\log g \sin\alpha = 0.40467$$
$$\log(V + V_1) = 2.73183$$
$$\log(V_1 + V_2) = 2.65810$$

$$\log\frac{V - V_1}{2k} = 7.78524$$
$$\log\frac{V_1 - V_2}{2k} = 7.37330$$
$$\log\frac{V_2 - V_3}{2k} = 6.43018$$
$$\log\frac{g\sin\alpha}{V + V_1} = 7.67284$$
$$\begin{aligned}\log\frac{V - V_1}{2k} &= \underline{7.78524}\\ &\ 9.88760\\ &\ \underline{0.24845}\\ &\ 8.03369\\ \log\tfrac{1}{6} &= 9.22185\\ &\ \underline{1.69818}\\ \log 0.0899 &= 8.95372\end{aligned}$$

$$\log g = 0.99167$$
$$\log\sin\alpha = 9.41300$$
$$\log\sin\varepsilon = 9.50819$$
$$\begin{aligned}\log\frac{g\sin\alpha}{V_1 + V_2} &= 7.74657\\ &\ \underline{7.37330}\\ &\ 0.37327\\ &\ \underline{0.52659}\\ &\ 7.89989\\ \log\tfrac{1}{6} &= 9.22185\\ &\ \underline{1.56198}\\ \log 0.0483 &= 8.68372\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log g\sin\alpha &= 0.40467\\ \log g\sin\varepsilon &= \underline{0.49986}\\ &\ 0.09519\\ &\ \underline{9.38925}\\ \log g(\sin\varepsilon - \sin\alpha) &= 9.79392\\ \log(V_2 + V_3) &= \underline{2.63236}\\ &\ 7.16156\\ \log\frac{V_2 - V_3}{2k} &= \underline{6.43018}\\ &\ 0.73138\\ &\ \underline{0.80532}\\ &\ 7.23550\\ \log\tfrac{1}{6} &= 9.22185\\ &\ \underline{0.36012}\\ \log 0.000657 &= 6.81747\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\ 7.0646 && \ 6.0393 && \ 1.5138\\ &\ \underline{0.0899} && \ \underline{0.0483} && \ \underline{0.0007}\\ \tau &= 7.1545 \qquad & \tau_1 &= 6.0876 \qquad & \tau_2 &= 1.5145\end{aligned}$$

Hiernach findet sich die ganze Flugzeit gleich 14.7566 Sekunden.

§. 14.

In §. 13. erhielten wir für einen unter einem Elevationswinkel von 15 Grad mit der Geschwindigkeit von 300 Meter abgeschossenen Vierundzwanzigpfünder folgende Resultate:

Abscisse des höchsten Punktes	1880.56	Meter.
Ordinate „ „ „ (Wurfhöhe)	268.02	„
Wurfweite	3550.23	„
Länge des aufsteigenden Zweiges der Flugbahn	1905.00	„
„ „ niedersteigenden „ „ „	1698.86	„
Zeit zum Zurücklegen des ersteren	7.1545	Sekund.
„ „ „ „ letzteren	7.6021	„
Einfallwinkel	18° 47′ 57″.	

Um die Genauigkeit dieser Resultate beurtheilen zu können, wollen wir die Wurfhöhe und Wurfweite auch nach den Vorschriften des §. 11. berechnen.

Hier haben natürlich α, p, k und L die gleichen Werthe wie früher:

$$\alpha_1 = 7^\circ 30', \quad \log \operatorname{tg} \alpha_1 = 9.11943, \quad p_1 = 0.13165, \quad \Delta p_1 = 0.2640.$$

Für den aufsteigenden Ast ist:

$$L - \Delta p_1 = 1.4411, \quad \varkappa = 11^\circ 26' 0'', \quad \varkappa_1 = 3^\circ 52' 17'',$$

$$\begin{array}{rlrl} a = & 1045.87 & h = & 211.520 \\ a_1 = & 834.56 & h_1 = & 56.484 \\ \hline w = & 1880.53 & H = & 268.004 \end{array}$$

Diese Werthe unterscheiden sich von den obigen nur um einige Centimeter.

Für den niedersteigenden Ast hat man:

$$L + \Delta p_1 = 1.9691, \quad \varkappa_2 = 3^\circ 40' 34'', \quad \varkappa_3 = 11^\circ 13' 0''$$

und findet ferner:

$$\begin{array}{rlrl} a_2 = & 714.40 & h_2 = & 45.898 \\ a_3 = & 644.80 & h_3 = & 127.869 \\ \hline a_2 + a_3 = & 1359.20 & h_2 + h_3 = & 173.767 \end{array}$$

$$\log p_4 = 9.53148, \quad p_4 = 0.34000, \quad \alpha_4 = 18^\circ 46' 42'', \quad \Delta p_4 = 0.6929,$$

$$L + \Delta p_4 = 2.3980, \quad \varkappa_4 = 16^\circ 53' 15'', \quad a_4 = 308.82, \quad h_4 = 93.752,$$

$h_2+h_3+h_4=267.519$, $\zeta=0.485$, $\omega=1.43$, $a_2+a_3+a_4=1668.02$,
$w_1=1669.45$, $W=3549.98$, $\varepsilon=18^0 47' 44''$.

Hier zeigt sich eine stärkere Differenz; denn die Wurfweite fand sich nach der früheren Rechnung einen Viertelsmeter grösser. Würde daher eine sehr grosse Genauigkeit verlangt, so müssten bei einem Elevationswinkel, der nicht beträchtlich kleiner ist als 15⁰, wenigstens für den niedersteigenden Ast die etwas umständlicheren Formeln des §. 11. angewandt werden.

§. 15.

Zur Anwendung der Formeln des §. 12. wollen wir die Flugbahn des Vierundzwanzigpfünders bei der gleichen Geschwindigkeit von 300 Meter und dem Elevationswinkel von 45 Grad bestimmen.

Hier ist:

$$\alpha=45^0,\quad p=1.00000,\quad \Delta p=2.2956,$$
$$\alpha_1=30,\quad p_1=0.57735,\quad \Delta p_1=1.2160,$$
$$\alpha_2=15,\quad p_2=0.26795,\quad \Delta p_2=0.5423,$$
$$g=9.81,\quad \log k=3.69692,\quad L=4.4653.$$

Man erhält die folgenden Werthe:

1. Aufsteigender Ast.

$\log u=8.82807$	$\varkappa=38^0 45' 40''$	$a=1562.74$	$h=1254.73$
$\log u_1=8.49697$	$\varkappa_1=23\ \ 8\ \ 48$	$a_1=859.70$	$h_1=367.53$
$\log u_2=8.33403$	$\varkappa_2=7\ \ 47\ \ 35$	$a_2=636.53$	$h_2=87.12$
		$w=3058.97$	$H=1709.38$

2. Niedersteigender Ast.

$\log u_3=8.28111$	$\varkappa_3=7^0 29' 12''$	$a_3=563.93$	$h_3=74.11$
$\log u_4=8.32300$	$\varkappa_4=22\ \ 45\ \ 10$	$a_4=577.61$	$h_4=242.25$
$\log u_5=8.46229$	$\varkappa_5=31\ \ 2\ \ 42$	$a_5=679.82$	$h_5=531.99$
		$a_3+a_4+a_5=1821.36$	$h_3+h_4+h_5=848.35$

$p_6=1.47807$ $\alpha_6=55^0 55' 8''$ $\Delta p_6=3.8202$
$\log u_6=8.53012$ $\varkappa_6=50^0 54' 38''$ $a_6=637.16$ $h_6=784.32$

$a_3+a_4+a_5+a_6=2458.52$ $h_3+h_4+h_5+h_6=1632.67$ $\zeta=76.71$

$\log J=6.44965$ $\omega=51.15$ $w_1=2509.67$ $W=5568.64$ $\varepsilon=56^0 40' 13''$.

Sollten diese Resultate geprüft werden, so könnte man den Winkel α in vier gleiche Theile theilen und $\alpha_1=\frac{3}{4}\alpha$, $\alpha_2=\frac{1}{2}\alpha$,

$\alpha_3 = \frac{1}{4}\alpha$ machen. Die zu dieser Rechnung nothwendigen Formeln lassen sich ganz analog denen des §. 12. anschreiben.

§. 16.

Vermittelst der in den letzten Paragraphen erhaltenen Zahlenwerthe lassen sich die entsprechenden ballistischen Curven leicht graphisch darstellen. Denn man kennt von mehreren Punkten die Coordinaten, den Tangentenwinkel und kann ausserdem den Krümmungshalbmesser für diese Punkte nach der Formel $\varrho = \frac{2k \sec^3\theta}{L - \Lambda \operatorname{tg}\theta}$ um so leichter berechnen, als der Logarithmus des Nenners schon im Laufe der Rechnung vorgekommen ist. Man setzt der Reihe nach $\theta = \alpha, \alpha_1, \alpha_2$, also $\operatorname{tg}\theta = p.\ p_1, p_2$.

Im höchsten Punkte ist $\theta = 0$, also $\varrho = \frac{2k}{L}$. Beim niedersteigenden Ast erhält man, wenn die Tangentenwinkel wie in §. 7. genommen werden: $\varrho = \frac{2k \sec^3\theta}{L + \Lambda \operatorname{tg}\theta}$.

Für die Curve mit dem Elevationswinkel von 15° ist nach §. 14.:

Abscisse.	Ordinate.	Tangentenwinkel.	Krümmungshalbmesser.	
0.00	0.00	15° 0′ 0″	9498 Meter	Aufsteigender Ast.
1045.87	211.52	7 30 0	7087 „	
1880.53	268.00	0 0 0	5837 „	Höchst. Punkt.
2594.93	222.11	7 30 0	5186 „	Niedersteigender Ast.
3239.73	94.24	15 0 0	4914 „	
3548.55	0 49	18 46 42	4890 „	
3549.98	0.00	18 47 44	4897 „	

Für die andere Curve mit dem Elevationswinkel von 45° ist nach §. 15.:

Abscisse.	Ordinate.	Tangentenwinkel.	Krümmungshalbmesser.	
0.00	0.00	45° 0′ 0″	12974 Meter	Aufsteigender Ast.
1562.74	1254.73	30 0 0	4716 „	
2422.44	1622.26	15 0 0	2815 „	
3058.98	1709.38	0 0 0	2229 „	Höchst. Punkt.
3622.90	1635.27	15 0 0	2205 „	Niedersteigender Ast.
4200.51	1393.02	30 0 0	2697 „	
4880.33	861.03	45 0 0	4164 „	
5517.49	76.71	55 55 8	6827 „	
5568.64	0.00	56 40 13	7110 „	

Digitized by Google

Aus den Werthen der Krümmungshalbmesser ist ersichtlich, dass die stärkste Krümmung nicht im höchsten Punkte, sondern an einer anderen Stelle im niedersteigenden Aste stattfindet. In der analytischen Geometrie nennt man in der Regel denjenigen Punkt einer Curve, für welchen der Krümmungshalbmesser den kleinsten Werth hat, den Scheitel derselben. Um den Ort dieses Scheitels zu bestimmen, wollen wir zunächst den Tangentenwinkel für diese Stelle suchen. Dazu dient, wie sich durch eine leichte Rechnung findet, die folgende Gleichung:

$$\frac{4\sec\theta}{3\sin 2\theta} - \Delta\,\mathrm{tg}\,\theta = L.$$

Da diese transcendente Gleichung keine direkte Auflösung zulässt, so kann man für θ einen Näherungswerth θ' aus dem hier folgenden Täfelchen entnehmen und den genaueren Werth von θ mittelst der folgenden Formel berechnen:

$$\theta = \theta' + \frac{\sin 2\theta'}{2\sin 1''}\left[1 - \tfrac{3}{4}\cos\theta'\sin 2\theta'(L + \Delta\,\mathrm{tg}\,\theta')\right],$$

$$\log\frac{1}{2\sin 1''} = 5.01340, \quad \log\tfrac{3}{4} = 9.87506.$$

Die Correktion ist dann in Sekunden ausgedrückt.

Für die erste Curve war L=1.7051; dafür $\theta' = 18^0 11'$ u. $\theta = 18^0\ 8'\ 2''$;
„ „ zweite „ „ L=4.4653; „ $\theta' =$ 8 13 „ $\theta =$ 8 13 42.

Da man jetzt den Tangentenwinkel kennt, so lassen sich nach dem Früheren auch leicht die Coordinaten des Scheitels berechnen.

Täfelchen zur Bestimmung des Scheitels der ballistischen Curve.

θ	L	Diff. 1'	θ	L	Diff. 1'
5° 0'	7.53	2.40	10°	3.60	0.62
20	7.05	2.15	11	3.23	0.52
40	6.62	1.90	12	2.92	0.43
6 0	6.24	1.70	13	2.66	0.40
20	5.90	1.55	14	2.42	0.33
40	5.59	1.40	15	2.22	0.30
7 0	5.31	1.30	16	2.04	0.28
20	5.05	1.65	17	1.87	0 23
40	4.82	1.10	18	1.73	0.23
8 0	4.60	1.00	19	1.59	0.22
20	4.40	0.90	20	1.46	0.18
40	4.22	0.85	21	1.35	0.18
9 0	4.05	0.80	22	1.24	0.17
20	3.89	0.75	23	1.14	0.17
40	3.74	0.70	24	1.04	0.13
10 0	3.60		25	0.96	

Digitized by Google

Anhang.

§. 17.

Die dieser Abhandlung beigegebene Tafel I. kann noch auf andere Weise gebraucht werden. Sie gibt nämlich für jeden Werth der Zahl p den zugehörigen Werth von $\varDelta(p)$, welches die folgende Funktion von p ist:

$$\varDelta(p) = p\sqrt{1+p^2} + \log\text{nat}\,(p+\sqrt{1+p^2}).$$

Nun ist:

$$\int dx\sqrt{1+x^2} = \text{Const.} + \tfrac{1}{2}[x\sqrt{1+x^2} + l(x+\sqrt{1+x^2})] = \text{Const.} + \tfrac{1}{2}\varDelta(x),$$

folglich:

$$\int_{x'}^{x''} dx\sqrt{1+x^2} = \tfrac{1}{2}[\varDelta(x'') - \varDelta(x')].$$

Durch die Tafel I. kann man daher sehr leicht den Werth dieses bestimmten Integrals finden.

§. 18.

Durch die Tafel I. lässt sich ferner die Parabel sehr leicht rektificiren. Sei der Abstand des Brennpunkts B (Taf. VIII. Fig. 10.) vom Scheitel A gleich q, so heisst die Gleichung dieser Curve:

$$y^2 = 4qx,$$

$$ds = dy\sqrt{1+\frac{y^2}{4q^2}}; \quad s = \tfrac{1}{2}y\sqrt{1+\frac{y^2}{4q^2}} + ql\left(\frac{y}{2q} + \sqrt{1+\frac{y^2}{4q^2}}\right).$$

Die Constante ist gleich 0, wenn die Bögen vom Scheitel aus gezählt werden.

$$\frac{s}{q} = \frac{y}{2q}\sqrt{1+\left(\frac{y}{2q}\right)^2} + l\left(\frac{y}{2q} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{2q}\right)^2}\right) = \varDelta\left(\frac{y}{2q}\right) = \varDelta\left(\sqrt{\frac{x}{q}}\right),$$

$$s = q.\varDelta\left(\sqrt{\frac{x}{q}}\right).$$

Setzt man den Leitstrahl $BC = r$, den Winkel $ABC = v$, so ist:

$$r = \frac{2q}{1+\cos v}, \quad x = q + r\cos(180^0 - v) = q - \frac{2q\cos v}{1+\cos v},$$

Digitized by Google

$$\frac{x}{q}=1-\frac{2\cos v}{1+\cos v}=\frac{1-\cos v}{1+\cos v}=\operatorname{tg}^2\frac{v}{2},$$

daher:

$$s=q\,.\,\varDelta(\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v).$$

§. 19.

Die Tafel I. kann endlich auch noch dazu benutzt werden, um eine Curve, deren Gleichung $y=f(x)$ gegeben ist, näherungsweise zu rektificiren.

Sei OMN (Taf. VIII. Fig. 11.) irgend ein kleinerer Theil derselben, so legen wir durch O zwei neue Coordinatenaxen, parallel den vorigen, und berechnen den Bogen so, als gehörte er einer Parabel an, welche durch die drei Punkte O, M, N geht, und deren Gleichung $\eta=a\xi+b\xi^2$ sei. Die Constanten a, b werden so bestimmt, dass die Parabel durch die Punkte $M(\delta,\mu)$ und $N(2\delta,\nu)$ geht; diess gibt $a=\frac{4\mu-\nu}{2\delta}$ und $b=\frac{\nu-2\mu}{2\delta^2}$.

Zur Rektifikation des Parabelbogens dient die Gleichung:

$$ds=d\xi\sqrt{1+(a+2b\xi)^2}.$$

Setzt man $a+2b\xi=z$, also $d\xi=\frac{dz}{2b}$, so wird:

$$ds=\frac{dz}{2b}\sqrt{1+z^2},$$

$$s=\text{Const.}+\frac{z\sqrt{1+z^2}}{4b}+\frac{1}{4b}\,l(z+\sqrt{1+z^2})=\text{Const.}+\frac{1}{4b}\,\varDelta(z).$$

Für $\xi=0$ ist $z=a$ und für $\xi=2\delta$ ist $z=a+4b\delta$; wird das Integral innerhalb dieser Grenzen genommen, so findet sich:

$$4bs=\varDelta(a+4b\delta)-\varDelta(a).$$

Nun ist:

$$a=\frac{4\mu-\nu}{2\delta},\quad 4b=\frac{2\nu-4\mu}{\delta^2},\quad a+4b\delta=\frac{3\nu-4\mu}{2\delta},$$

$$s=\frac{\delta^2}{2\nu-4\mu}\left[\varDelta\left(\frac{3\nu-4\mu}{2\delta}\right)-\varDelta\left(\frac{4\mu-\nu}{2\delta}\right)\right].$$

Soll nun eine Curve $ABCDE\ldots.XYZ$ (Taf. VIII. Fig. 12.), deren begrenzende Abscissen x_0 und x_n sind, rektificirt werden, so setze man $\frac{x_n-x_0}{n}=\delta$, wo n eine gerade Zahl sein muss,

Digitized by Google

dann ist $x_1 = x_0 + \delta$, $x_2 = x_1 + \delta, \ldots\ldots x_n = x_{n-1} + \delta$. Man berechnet jetzt für diese sämmtlichen Abscissen die zugehörigen Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots y_n$ mittelst der Gleichung der Curve und bilde die ersten und zweiten Differenzen nach dem folgenden Schema:

$$\begin{array}{cccc}
x_0 & y_0 & & \\
 & & \Delta y_0 & \\
x_1 & y_1 & & \Delta' y_0 \\
 & & \Delta y_1 & \\
x_2 & y_2 & & \Delta' y_1 \\
 & & \Delta y_2 & \\
x_3 & y_3 & & \Delta' y_2 \\
 & & \Delta y_3 & \\
x_4 & y_4 & & \Delta' y_3 \\
 & & \Delta y_4 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
x_{n-2} & y_{n-2} & & \\
 & & \Delta y_{n-2} & \\
x_{n-1} & y_{n-1} & & \Delta' y_{n-2} \\
 & & \Delta y_{n-1} & \\
x_n & y_n & &
\end{array}$$

Beim Bogen ABC ist

$$\mu = y_1 - y_0 = \Delta y_0 \quad \text{und} \quad \nu = y_2 - y_0 = \Delta y_0 + \Delta y_1,$$
$$\nu - 2\mu = \Delta' y_0, \quad 3\nu - 4\mu = 2\Delta y_1 - \Delta' y_0, \quad 4\mu - \nu = 2\Delta y_0 - \Delta' y_0.$$

Analog findet man diese Werthe beim Bogen CDE, indem man jeden Index um 2 vergrössert. Setzt man $ABC = s_2$, $CDE = s_4, \ldots\ldots XYZ = s_n$, so ist:

$$s_2 = \frac{\delta^2}{2\Delta' y_0}\left\{ A\left(\frac{\Delta y_1 + \frac{1}{2}\Delta' y_0}{\delta}\right) - A\left(\frac{\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta' y_0}{\delta}\right)\right\},$$

$$s_4 = \frac{\delta^2}{2\Delta' y_2}\left\{ A\left(\frac{\Delta y_3 + \frac{1}{2}\Delta' y_2}{\delta}\right) - A\left(\frac{\Delta y_2 - \frac{1}{2}\Delta' y_2}{\delta}\right)\right\},$$

. . . .

$$s_n = \frac{\delta^2}{2\Delta' y_{n-2}}\left\{ A\left(\frac{\Delta y_{n-1} + \frac{1}{2}\Delta' y_{n-2}}{\delta}\right) - A\left(\frac{\Delta y_{n-2} - \Delta' y_{n-2}}{\delta}\right)\right\},$$

$$\text{arc}\, ABCDE \ldots\ldots XYZ = s_2 + s_4 + \ldots\ldots + s_n.$$

§. 20.

Zur Anwendung des Vorhergehenden wollen wir einen elliptischen Quadranten rektificiren.

Digitized by Google

Sind die Halbaxen der Ellipse (Taf. VIII. Fig. 13.) gleich 10 und 5, so heisst ihre auf den Scheitel bezogene Gleichung:

$$y^2 = \tfrac{1}{4}(20x - x^2).$$

Anstatt jedoch diese Gleichung anzuwenden, wollen wir zuerst auf Etwas aufmerksam machen, wodurch gleich eine grössere Genauigkeit erzielt werden kann.

Die Krümmung der Ellipse ist im Punkte A am stärksten und nimmt gegen B ab, während die Krümmungen der zu Grunde liegenden Parabelbögen mit wachsenden Abscissen zunehmen. Denn der Krümmungshalbmesser der Parabel hat zum Ausdruck $C\sec^3\theta$, wo C eine Constante und θ den Neigungswinkel der Tangente zur Abscissenaxe bedeutet.

Nun wird aber ein durch drei Punkte eines elliptischen Bogens gelegter Parabelbogen sich genauer an jenen anschliessen, wenn bei beiden Curven die Krümmungen gleichzeitig ab- oder gleichzeitig zunehmen, als wenn bei der einen eine Abnahme und bei der anderen eine Zunahme stattfindet.

Wir transformiren daher die Gleichung der Ellipse (Taf. VIII. Fig. 14.) in der Weise, dass wir die kleine Axe zur Abscissenaxe machen, wodurch wir erhalten:

$$y = 2\sqrt{x(10-x)}.$$

Was das Intervall δ betrifft, so wird man natürlich die gesuchte Bogenlänge um so genauer erhalten, je kleiner δ angenommen wird. Andererseits würde man aber, wenn man n sehr gross nehmen wollte, eine unverhältnissmässig langwierige Rechnung auszuführen haben.

Wir setzen $n = 10$; da nun $x_n = 5$, $x_0 = 0$, so wird $\delta = \frac{1}{2}$. Sodann erhalten wir die folgende Tabelle:

n	x	$10-x$	$x(10-x)$	y	Δy	$\Delta' y$	$\log \Delta' y$
0	0.0	10.0	0.00	0.00000	4.35890		
1	0.5	9.5	4.75	4.35890	1.64110	−2.71780	0.43422_n
2	1.0	9.0	9.00	6.00000	1.14143	−0.49967	
3	1.5	8.5	12.75	7.14143	0.85857	−0.28286	9.45157_n
4	2.0	8.0	16.00	8.00000	0.66025	−0.19832	
5	2.5	7.5	18.75	8.66025	0.50490	−0.15535	9.19131_n
6	3.0	7.0	21.00	9.16515	0.37424	−0.13066	
7	3.5	6.5	22.75	9.53939	0.25857	−0.11567	9.06323_n
8	4.0	6.0	24.00	9.79796	0.15191	−0.10666	
9	4.5	5.5	24.75	9.94987	0.05013	−0.10178	9.00766_n
10	5.0	5.0	25.00	10.00000			

Digitized by Google

$$\begin{array}{rl} \Delta y_1 = & 1.64110 \\ \tfrac{1}{2}\Delta' y_0 = & -1.35890 \\ \Delta y_0 = & 4.35890 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Delta y_1 + \tfrac{1}{2}\Delta' y_0 = 0.28220 \\ \Delta y_0 - \tfrac{1}{2}\Delta' y_0 = 5.71780 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} A(0.56440) = & 1.1862 \\ A(11.43560) = & 134.4037 \\ \hline & -133.2175 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log(\tfrac{1}{2}\delta^2) = & 9.09691 \\ \log(133.2175_n) = & 2.12455_n \\ C\log \Delta' y_0 = & 9.56578_n \\ \hline \log s_2 = & 0.78724 \end{array} \qquad s_2 = 6.12690$$

$$\begin{array}{rl} \Delta y_3 = & 0.85857 \\ \tfrac{1}{2}\Delta' y_2 = & -0.14143 \\ \Delta y_2 = & 1.14143 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Delta y_3 + \tfrac{1}{2}\Delta' y_2 = 0.71714 \\ \Delta y_2 - \tfrac{1}{2}\Delta' y_2 = 1.28286 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} A(1.43428) = & 3.6656 \\ A(2.56572) = & 8.7366 \\ \hline & -5.0710 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log(\tfrac{1}{2}\delta^2) = & 9.09691 \\ \log(5.0710_n) = & 0.70509_n \\ C\log \Delta' y_2 = & 0.54843_n \\ \hline \log s_4 = & 0.35043 \end{array} \qquad s_4 = 2.24095$$

$$\begin{array}{rl} \Delta y_5 = & 0.50490 \\ \tfrac{1}{2}\Delta' y_4 = & -0.07768 \\ \Delta y_4 = & 0.66025 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Delta y_5 + \tfrac{1}{2}\Delta' y_4 = 0.42722 \\ \Delta y_4 - \tfrac{1}{2}\Delta' y_4 = 0.73793 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} A(0.85444) = & 1.8985 \\ A(1.47586) = & 3.8124 \\ \hline & -1.9139 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log(\tfrac{1}{2}\delta^2) = & 9.09691 \\ \log(1.9139_n) = & 0.28192_n \\ C\log \Delta' y_4 = & 0.80869_n \\ \hline \log s_6 = & 0.18752 \end{array} \qquad s_6 = 1.54000$$

$$\begin{array}{rl} \Delta y_7 = & 0.25857 \\ \tfrac{1}{2}\Delta' y_6 = & -0.05784 \\ \Delta y_6 = & 0.37424 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Delta y_7 + \tfrac{1}{2}\Delta' y_6 = 0.20073 \\ \Delta y_6 - \tfrac{1}{2}\Delta' y_6 = 0.43208 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} A(0.40146) = & 0.8240 \\ A(0.86416) = & 1.9241 \\ \hline & -1.1001 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log(\tfrac{1}{2}\delta^2) = & 9.09691 \\ \log(1.1001_n) = & 0.04143_n \\ C\log \Delta' y_6 = & 0.93677_n \\ \hline \log s_8 = & 0.07511 \end{array} \qquad s_8 = 1.18878$$

$$\begin{array}{rl} \Delta y_9 = & 0.05013 \\ \tfrac{1}{2}\Delta' y_8 = & -0.05089 \\ \Delta y_8 = & 0.15191 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Delta y_9 + \tfrac{1}{2}\Delta' y_8 = -0.00076 \\ \Delta y_8 - \tfrac{1}{2}\Delta' y_8 = 0.20280 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} A(-0.00152) = & -0.0030 \\ A(0.40560) = & 0.8329 \\ \hline & -0.8359 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} \log(\tfrac{1}{2}\delta^2) = & 9.09691 \\ \log(0.8359_n) = & 9.92215_n \\ C\log \Delta' y_8 = & 0.99234_n \\ \hline \log s_{10} = & 0.01140 \end{array} \qquad s_{10} = 1.02660$$

$$s = 12.12323$$

Mit Hülfe elliptischer Integrale findet sich auf 5 Decimalen genau $s = 12.11056$

Fehler $= -0.01267$

Werden die einzelnen elliptischen Bögen $s_2, s_4, \ldots$ mittelst elliptischer Integrale berechnet, so findet sich:

	$s_2 = 6.11427$	$s_4 = 2.24091$	$s_6 = 1.53991$	$s_8 = 1.18879$	$s_{10} = 1.02668$
Fehler der obigen Rechnung:	-0.01273	-0.00004	-0.00009	$+0.00001$	$+0.00008$

Es hat also nur der Fehler von s_2 einen beträchtlichen Werth, was einestheils davon herrührt, dass dieser Bogen zu gross ist, als dass die Parabel sich sehr nahe an denselben anschliessen könnte; anderntheils aber davon, dass für $x=0$ der elliptische Bogen mit der Abscissenaxe einen rechten Winkel bildet, während die Parabel (deren Gleichung $y=ax+bx^2$) keine zur Abscissenaxe senkrechte Tangente haben kann.

Es lässt sich desshalb der Bogen s_2 durch die Parabel nicht so genau bestimmen wie die übrigen Bögen, und wollen wir diess nun auf einem anderen Wege versuchen.

§. 21.

Ein Mittel zu einer genaueren Berechnung des Bogens s_2 bietet uns der in §. 6. angeführte Satz und können wir die danach abgeleitete Gleichung 49) benützen. Doch wollen wir den Bogen in zwei Theile zerlegen, da er zu gross ist, um auf einmal mit genügender Genauigkeit erhalten zu werden. Damit übrigens die beiden Theile $AB=\sigma_1$ (Taf. VIII. Fig. 15.) und $BC=\sigma_2$ nicht zu ungleich ausfallen, setzen wir $x_1=\frac{1}{4}x_2$. Es ist daher:

$$x_1=0.25 \quad x_2-x_1=0.75 \quad y_1=\tfrac{1}{2}\sqrt{39}=3.1225 \quad y_2-y_1=2.8775$$
$$x_2=1.00 \qquad y_2=6.0$$

Bezeichnen wir die Tangentenwinkel in den Punkten A, B, C durch φ_0, φ_1, φ_2 und die Sehnenwinkel BAD durch $\varkappa_0$, CBF durch $\varkappa_1$, so ist:

$$\varphi_0=90^0,\quad \operatorname{tg}\varphi_1=\frac{4(5-x_1)}{y_1}=\frac{19}{y_1},\quad \operatorname{tg}\varphi_2=\frac{4(5-x_2)}{y_2}=\frac{8}{3},\quad \operatorname{tg}\varkappa_0=\frac{y_1}{x_1},$$
$$\operatorname{tg}\varkappa_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Setzt man Sehne $AB=c_1$, $BC=c_2$, so ist:

$$c_1=\frac{y_1}{\sin\varkappa_0},\quad c_2=\frac{y_2-y_1}{\sin\varkappa_1}.$$

Nach Formel 49) hat man:

$$\sigma_1=c_1\,.\,\mathfrak{S}[\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_0-\varkappa_0)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varkappa_0-\varphi_1)],\quad \sigma_2=c_2.\mathfrak{S}[\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1-\varkappa_1)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varkappa_1-\varphi_2)]$$

$\log 19=1.27875$	$\log y_1=0.49450$	$\log y_1=0.49450$
$\log y_1=0.49450$	$\log x_1=9.39794$	$\log\sin\varkappa_0=9.99861$
$\log\operatorname{tg}\varphi_1=0.78425$	$\log\operatorname{tg}\varkappa_0=1.09656$	$\log c_1=0.49589$
$\varphi_1=80^0\,40'\,2''$	$\varkappa_0=85^0\,25'\,21''$	

Digitized by Google

$$\log 8 = 0.90309 \qquad \log(y_2 - y_1) = 0.45901 \qquad \log(y_2 - y_1) = 0.45901$$
$$\log 3 = 0.47712 \qquad \log(x_2 - x_1) = 9.87506 \qquad \log\sin\varkappa_1 = 9.98571$$
$$\log\operatorname{tg}\varphi_2 = 0.42597 \qquad \log\operatorname{tg}\varkappa_1 = 0.58395 \qquad \log c_2 = 0.47329$$
$$\varphi_2 = 69^\circ\, 26'\, 38'' \qquad \varkappa_1 = 75^\circ\, 23'\, 28''$$

			log tang
$\tfrac{1}{2}\varphi_0 = 45^\circ\; 0'\; 0''$			
$\tfrac{1}{2}\varkappa_0 = 42\; 42\; 40$	$\tfrac{1}{2}(\varphi_0 - \varkappa_0) = 2^\circ\, 17'\, 20''$		8.60173
$\tfrac{1}{2}\varphi_1 = 40\; 20\; 1$	$\tfrac{1}{2}(\varkappa_0 - \varphi_1) = 2\; 22\; 39$		8.61825
$\tfrac{1}{2}\varkappa_1 = 37\; 41\; 44$	$\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varkappa_1) = 2\; 38\; 17$		8.66347
$\tfrac{1}{2}\varphi_2 = 34\; 43\; 19$	$\tfrac{1}{2}(\varkappa_1 - \varphi_2) = 2\; 58\; 25$		8.71554

$$\log[\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_0 - \varkappa_0)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varkappa_0 - \varphi_1)] = 7.21998$$
$$\log[\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varkappa_1)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varkappa_1 - \varphi_2)] = 7.37901$$

$$\log c_1 = 0.49589 \qquad \log c_2 = 0.47329 \qquad \sigma_1 = 3.13590$$
$$\log \mathfrak{F}_1 = 0.00048 \qquad \log \mathfrak{F}_2 = 0.00069 \qquad \sigma_2 = 2.97840$$
$$\log \sigma_1 = 0.49637 \qquad \log \sigma_2 = 0.47398 \qquad s_2 = 6.11430$$

Da der genauere Werth von $s_2 = 6.11427$, so ist der Fehler $= -0.00003$.

Bilden wir nun die Summe der einzelnen Bögen, so findet sich:

$$\begin{aligned} s_2 &= 6.11430 \\ s_4 &= 2.24095 \\ s_6 &= 1.54000 \\ s_8 &= 1\ 18878 \\ s_{10} &= 1.02660 \\ \hline s &= 12.11063 \end{aligned}$$

Der Fehler dieses Resultates ist gleich -0.00007.

Digitized by Google

Vo
Int
we
We

der
an

Digitized by Google

$$\log 8 = 0.90309 \qquad \log(y_2 - y_1) = 0.45901 \qquad \log(y_2 - y_1) = 0.45901$$
$$\log 3 = \underline{0.47712} \qquad \log(x_2 - x_1) = \underline{9.87506} \qquad \log\sin\varkappa_1 = \underline{9.98571}$$
$$\log\operatorname{tg}\varphi_2 = 0.42597 \qquad \log\operatorname{tg}\varkappa_1 = 0.58395 \qquad \log c_2 = 0.47329$$
$$\varphi_2 = 69^0\,26'\,38'' \qquad \varkappa_1 = 75^0\,23'\,28''$$

		log tang
$\frac{1}{2}\varphi_0 = 45^0\ 0'\ 0''$		
$\frac{1}{2}\varkappa_0 = 42\ 42\ 40$	$\frac{1}{2}(\varphi_0 - \varkappa_0) = 2^0\,17'\,20''$	8.60173
$\frac{1}{2}\varphi_1 = 40\ 20\ \ 1$	$\frac{1}{2}(\varkappa_0 - \varphi_1) = 2\ 22\ 39$	8.61825
$\frac{1}{2}\varkappa_1 = 37\ 41\ 44$	$\frac{1}{2}(\varphi_1 - \varkappa_1) = 2\ 38\ 17$	8.66347
$\frac{1}{2}\varphi_2 = 34\ 43\ 19$	$\frac{1}{2}(\varkappa_1 - \varphi_2) = 2\ 58\ 25$	8.71554

$$\log[\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_0 - \varkappa_0)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varkappa_0 - \varphi_1)] = 7.21998$$
$$\log[\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varphi_1 - \varkappa_1)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\varkappa_1 - \varphi_2)] = 7.37901$$

$$\log c_1 = 0.49589 \qquad \log c_2 = 0.47329 \qquad \sigma_1 = 3.13590$$
$$\log \mathfrak{S}_1 = \underline{0.00048} \qquad \log \mathfrak{S}_2 = \underline{0.00069} \qquad \sigma_2 = \underline{2.97840}$$
$$\log\sigma_1 = 0.49637 \qquad \log\sigma_2 = 0.47398 \qquad s_2 = 6.11430$$

Da der genauere Werth von $s_2 = 6.11427$, so ist der Fehler $= -0.00003$.

Bilden wir nun die Summe der einzelnen Bögen, so findet sich:

$$s_2 = 6.11430$$
$$s_4 = 2.24095$$
$$s_6 = 1.54000$$
$$s_8 = 1\ 18878$$
$$s_{10} = \underline{1.02660}$$
$$s = 12.11063$$

Der Fehler dieses Resultates ist gleich -0.00007.

Vo
Int
wer
We

der
an

Digitized by Google

p	Λ(p)
0.00	0.0000
0.01	0.0200
0.02	0.0400
0.03	0.0600
0.04	0.0800
0.05	0.1000
0.06	0.1201
0.07	0.1401
0.08	0.1602
0.09	0.1802
0.10	0.2003
0.11	0.2204
0.12	0.2406
0.13	0.2607
0.14	0.2809
0.15	0.3011
0.16	0.3214
0.17	0.3416
0.18	0.3619
0.19	0.3823
0.20	0.4027
0.21	0.4231
0.22	0.4435
0.23	0.4640
0.24	0.4846
0.25	0.5052
0.26	0.5258
0.27	0.5465
0.28	0.5672
0.29	0.5880
0.30	0.6089
0.31	0.6298
0.32	0.6508
0.33	0.6718
0.34	0.6929
0.35	0.7140
0.36	0.7353
0.37	0.7566
0.38	0.7779
0.39	0.7993
0.40	0.8208
0.41	0.8424
0.42	0.8641
0.43	0.8858
0.44	0.9076
0.45	0.9295
0.46	0.9515
0.47	0.9735
0.48	0.9957
0.49	1.0179
0.50	1.0402
p	Λ(p)

p	Λ(p)	Diff.	p	Λ(p)	Diff.	p
3.00	11.3053	633	3.50	14.7059	729	4.00
3.01	11.3686	636	3.51	14.7788	732	4.01
3.02	11.4322	637	3.52	14.8520	732	4.02
3.03	11.4959	639	3.53	14.9252	735	4.03
3.04	11.5598	641	3.54	14.9987	736	4.04
3.05	11.6239	643	3.55	15.0723	739	4.05
3.06	11.6882	645	3.56	15.1462	740	4.06
3.07	11.7527	646	3.57	15.2202	743	4.07
3.08	11.8173	649	3.58	15.2945	744	4.08
3.09	11.8822	650	3.59	15.3689	746	4.09
3.10	11.9472	653	3.60	15.4435	749	4.10
3.11	12.0125	654	3.61	15.5184	750	4.11
3.12	12.0779	656	3.62	15.5934	752	4.12
3.13	12.1435	658	3.63	15.6686	754	4.13
3.14	12.2093	660	3.64	15.7440	756	4.14
3.15	12.2753	662	3.65	15.8196	758	4.15
3.16	12.3415	664	3.66	15.8954	760	4.16
3.17	12.4079	666	3.67	15.9714	761	4.17
3.18	12.4745	668	3.68	16.0475	764	4.18
3.19	12.5413	669	3.69	16.1239	765	4.19
3.20	12.6082	672	3.70	16.2004	768	4.20
3.21	12.6754	673	3.71	16.2772	769	4.21
3.22	12.7427	675	3.72	16.3541	772	4.22
3.23	12.8102	678	3.73	16.4313	773	4.23
3.24	12.8780	679	3.74	16.5086	775	4.24
3.25	12.9459	681	3.75	16.5861	778	4.25
3.26	13.0140	683	3.76	16.6639	779	4.26
3.27	13.0823	684	3.77	16.7418	781	4.27
3.28	13.1507	687	3.78	16.8199	783	4.28
3.29	13.2194	689	3.79	16.8982	785	4.29
3.30	13.2883	691	3.80	16.9767	786	4.30
3.31	13.3574	692	3.81	17.0553	789	4.31
3.32	13.4266	694	3.82	17.1342	791	4.32
3.33	13.4960	697	3.83	17.2133	793	4.33
3.34	13.5657	698	3.84	17.2926	794	4.34
3.35	13.6355	700	3.85	17.3720	797	4.35
3.36	13.7055	702	3.86	17.4517	798	4.36
3.37	13.7757	704	3.87	17.5315	801	4.37
3.38	13.8461	706	3.88	17.6116	802	4.38
3.39	13.9167	708	3.89	17.6918	804	4.39
3.40	13.9875	710	3.90	17.7722	806	4.40
3.41	14.0585	712	3.91	17.8528	808	4.41
3.42	14.1297	713	3.92	17.9336	810	4.42
3.43	14.2010	716	3.93	18.0146	813	4.43
3.44	14.2726	717	3.94	18.0959	813	4.44
3.45	14.3443	720	3.95	18.1772	816	4.45
3.46	14.4163	721	3.96	18.2588	818	4.46
3.47	14.4884	723	3.97	18.3406	820	4.47
3.48	14.5607	725	3.98	18.4226	822	4.48
3.49	14.6332	727	3.99	18.5048	823	4.49
3.50	14.7059		4.00	18.5871		4.50
p	Λ(p)	Diff.	p	Λ(p)	Diff.	p

A(p)	Diff.	p	A(p)	Diff.	p	A(p)	r	p	A(p)	r
8.5871	826	4.50	22.9533	923	5.0	27.8075	10.1968	10.0	103.4970	20.0993
8.6697	827	4.51	23.0456	925	5.1	28.8371	10.3940	10.1	105.5169	20.2980
8.7524	830	4.52	23.1381	927	5.2	29.8864	10.5900	10.2	107.5567	20.4985
8.8354	831	4.53	23.2308	929	5.3	30.9553	10.7858	10.3	109.6165	20.6960
8.9185	834	4.54	23.3237	930	5.4	32.0838	10.9828	10.4	111.6961	20.8965
9.0019	835	4.55	23.4167	933	5.5	33.1520	11.1800	10.5	113.7957	21.0940
9.0854	837	4.56	23.5100	935	5.6	34.2799	11.3755	10.6	115.9151	21.2943
9.1691	839	4.57	23.6035	936	5.7	35.4274	11.5738	10.7	118.0545	21.4933
9.2530	842	4.58	23.6971	939	5.8	36.5947	11.7708	10.8	120.2138	21.6923
9.3372	843	4.59	23.7910	940	5.9	37.7817	11.9678	10.9	122.3930	21.8913
9.4215	845	4.60	23.8850	943	6.0	38.9884	12.1648	11.0	124.5921	22.0900
9.5060	847	4.61	23.9793	944	6.1	40.2148	12.3615	11.1	126.8111	22.2905
9.5907	848	4.62	24.0737	947	6.2	41.4609	12.5595	11.2	129.0501	22.4880
9.6755	851	4.63	24.1684	948	6.3	42.7268	12.7578	11.3	131.3089	22.6885
9.7606	853	4.64	24.2632	950	6.4	44.0125	12.9545	11.4	133.5877	22.8870
9.8459	855	4.65	24.3582	953	6.5	45.3179	13.1528	11.5	135.8864	23.0875
9.9314	857	4.66	24.4535	954	6.6	46.6431	13.3493	11.6	138.2051	23.2850
0.0171	858	4.67	24.5489	956	6.7	47.9880	13.5488	11.7	140.5436	23.4850
0.1029	861	4.68	24.6445	958	6.8	49.3528	13.7455	11.8	142.9021	23.6855
0.1890	862	4.69	24.7403	960	6.9	50.7373	13.9435	11.9	145.2806	23.8830
0.2752	865	4.70	24.8363	962	7.0	52.1416	14.1415	12.0	147.6789	24.0833
0.3617	866	4.71	24.9325	964	7.1	53.5657	14.3393	12.1	150.0972	24.2820
0.4483	868	4.72	25.0289	966	7.2	55.0096	14.5388	12.2	152.5354	24.4823
0.5351	871	4.73	25.1255	968	7.3	56.4734	14.7353	12.3	154.9936	24.6813
0.6222	872	4.74	25.2223	970	7.4	57.9569	14.9345	12.4	157.4717	24.8803
0.7094	874	4.75	25.3193	972	7.5	59.4603	15.1325	12.5	159.9697	25.0790
0.7968	876	4.76	25.4165	973	7.6	60.9835	15.3305	12.6	162.4876	25.2790
0.8844	878	4.77	25.5138	976	7.7	62.5265	15.5283	12.7	165.0255	25.4795
0.9722	880	4.78	25.6114	978	7.8	64.0893	15.7275	12.8	167.5834	25.6770
1.0602	882	4.79	25.7092	979	7.9	65.6720	15.9253	12.9	170.1611	25.8770
1.1484	884	4.80	25.8071	982	8.0	67.2745	16.1245	13.0	172.7588	26.0773
1.2368	886	4.81	25.9053	983	8.1	68.8969	16.3223	13.1	175.3765	26.2763
1.3254	888	4.82	26.0036	986	8.2	70.5391	16.5215	13.2	178.0141	26.4750
1.4142	890	4.83	26.1022	987	8.3	72.2012	16.7193	13.3	180.6716	26.6753
1.5032	891	4.84	26.2009	990	8.4	73.8831	16.9183	13.4	183.3491	26.8740
1.5923	894	4.85	26.2999	991	8.5	75.5849	17.1175	13.5	186.0465	27.0743
1.6817	896	4.86	26.3990	994	8.6	77.3066	17.3153	13.6	188.7639	27.2733
1.7713	897	4.87	26.4984	995	8.7	79.0481	17.5143	13.7	191.5012	27.4720
1.8610	900	4.88	26.5979	997	8.8	80.8095	17.7135	13.8	194.2585	27.6723
1.9510	901	4.89	26.6976	999	8.9	82.5908	17.9113	13.9	197.0357	27.8710
2.0411	904	4.90	26.7975	1002	9.0	84.3919	18.1103	14.0	199.8328	28.0710
2.1315	905	4.91	26.8977	1003	9.1	86.2129	18.3093	14.1	202.6499	28.2713
2.2220	907	4.92	26.9980	1005	9.2	88.0538	18.5083	14.2	205.4870	28.4700
2.3127	910	4.93	27.0985	1007	9.3	89.9146	18.7075	14.3	208.3440	28.6703
2.4037	911	4.94	27.1992	1009	9.4	91.7953	18.9050	14.4	211.2210	28.8690
2.4948	913	4.95	27.3001	1011	9.5	93.6958	19.1055	14.5	214.1179	29.0693
2.5861	915	4.96	27.4012	1013	9.6	95.6163	19.3033	14.6	217.0348	29.2683
2.6776	917	4.97	27.5025	1015	9.7	97.5566	19.5020	14.7	219.9716	29.4670
2.7693	919	4.98	27.6040	1017	9.8	99.5168	19.7025	14.8	222.9283	29.6683
2.8612	921	4.99	27.7057	1018	9.9	101.4970	19.9003	14.9	225.9051	29.8673
2.9533		5.00	27.8075		10.0	103.4970		15.0	228.9018	
A(p)	Diff.	p	A(p)	Diff.	p	A(p)	r	p	A(p)	r

Zwischen den Z

Setzt man daher:

so ist:

Die Tafel lässt
anliegenden Tangentenwi

Bezeichnet man

A	*B*
— ∞	0.000
5.538	0.000
5.839	0.000
6.015	0.000
6.140	0.000
6.237	0.000
6.316	0.000
6.383	0.000
6.441	0.000
6.492	0.000
6.538	0.0001
6.580	0.0001
6.617	0.0001
6.652	0.0001
6.684	0.0001
6.714	0.0001
6.742	0.0001
6.769	0.0001
6.793	0.0001
6.818	0.0001
6.839	0.000
6.860	0.000
6.881	0.000
6.900	0.000
6.918	0.000
6.936	0.000
6.953	0.000
6.969	0.000
6.985	0.000
7.000	0.000
7.015	0.000
7.029	0.000
7.043	0.000
7.056	0.000
7.069	0.000
7.082	0.000
7.094	0.000
7.106	0.000
7.118	0.000
7.129	0.000
7.140	0.000
7.151	0.000
7.161	0.000
7.171	0.000
7.181	0.000
7.191	0.000
7.201	0.000
7.210	0.000
7.219	0.000
7.228	0.000
7.237	0.000
A	*B*

Digitized by Google

A	B	A	B	A	B
7.2368	0.00050	7.5373	0.00100	7.7129	0.00150
7.2454	0.00051	7.5416	0.00101	7.7158	0.00151
7.2538	0.00052	7.5459	0.00102	7.7186	0.00152
7.2621	0.00053	7.5501	0.00103	7.7215	0.00153
7.2702	0.00054	7.5543	0.00104	7.7243	0.00154
7.2781	0.00055	7.5584	0.00105	7.7271	0.00155
7.2866	0.00056	7.5626	0.00106	7.7299	0.00156
7.2937	0.00057	7.5666	0.00107	7.7326	0.00157
7.3011	0.00058	7.5707	0.00108	7.7354	0.00158
7.3086	0.00059	7.5746	0.00109	7.7381	0.00159
7.3159	0.00060	7.5786	0.00110	7.7408	0.00160
7.3230	0.00061	7.5825	0.00111	7.7435	0.00161
7.3301	0.00062	7.5864	0.00112	7.7462	0.00162
7.3370	0.00063	7.5903	0.00113	7.7489	0.00163
7.3438	0.00064	7.5941	0.00114	7.7515	0.00164
7.3506	0.00065	7.5979	0.00115	7.7541	0.00165
7.3572	0.00066	7.6016	0.00116	7.7568	0.00166
7.3637	0.00067	7.6053	0.00117	7.7594	0.00167
7.3701	0.00068	7.6090	0.00118	7.7619	0.00168
7.3765	0.00069	7.6127	0.00119	7.7645	0.00169
7.3827	0.00070	7.6163	0.00120	7.7671	0.00170
7.3889	0.00071	7.6199	0.00121	7.7696	0.00171
7.3949	0.00072	7.6234	0.00122	7.7721	0.00172
7.4009	0.00073	7.6270	0.00123	7.7746	0.00173
7.4068	0.00074	7.6305	0.00124	7.7771	0.00174
7.4126	0.00075	7.6340	0.00125	7.7796	0.00175
7.4184	0.00076	7.6374	0.00126	7.7821	0.00176
7.4240	0.00077	7.6408	0.00127	7.7845	0.00177
7.4296	0.00078	7.6442	0.00128	7.7869	0.00178
7.4351	0.00079	7.6476	0.00129	7.7894	0.00179
7.4406	0.00080	7.6510	0.00130	7.7918	0.00180
7.4460	0.00081	7.6543	0.00131	7.7942	0.00181
7.4513	0.00082	7.6576	0.00132	7.7965	0.00182
7.4566	0.00083	7.6608	0.00133	7.7989	0.00183
7.4618	0.00084	7.6641	0.00134	7.8013	0.00184
7.4669	0.00085	7.6673	0.00135	7.8036	0.00185
7.4719	0.00086	7.6705	0.00136	7.8060	0.00186
7.4770	0.00087	7.6737	0.00137	7.8083	0.00187
7.4819	0.00088	7.6768	0.00138	7.8106	0.00188
7.4868	0.00089	7.6799	0.00139	7.8129	0.00189
7.4917	0.00090	7.6830	0.00140	7.8152	0.00190
7.4964	0.00091	7.6861	0.00141	7.8174	0.00191
7.5012	0.00092	7.6892	0.00142	7.8197	0.00192
7 5059	0.00093	7.6922	0.00143	7.8219	0.00193
7.5105	0.00094	7.6952	0.00144	7.8242	0.00194
.5151	0.00095	7.6982	0 00145	7.8264	0.00195
.5196	0.00096	7.7012	0.00146	7.8286	0.00196
.5241	0.00097	7.7047	0.00147	7.8308	0.00197
.5286	0.00098	7.7071	0.00148	7.8330	0.00198
.5330	0.00099	7.7100	0.00149	7.8352	0.00199
.5373	0.00100	7.7129	0.00150	7.8373	0 00200
A	B	A	B	A	B

Digitized by Google

15
15
15
15
15
15
15
15
15
15
16
16
16
16
16
16
16
16
16
16
17
17
17
17
17
17
17
17
17
17
18
18
18
18
18
18
18
18
18
18
19
19
19
19
19
19
19
19
19
19
20

Digitized by Google

90
91
92
93
94
95
96
97
98
99
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50

Digitized by Google

XXI.

Eine stereometrische Schulaufgabe, welche zu einer leichten Inhaltsbestimmung eines Ellipsoides führt.

Von

Herrn *Hermann Martus*,

Oberlehrer an der Königstädtischen Realschule in Berlin.

Es sei (Taf. IX. Fig. I.) $MPAA'P'$ ein Quadrant eines graden Kreiscylinders. Man lege durch PM in beliebiger Richtung den Schnitt PBM, trage in den Kreisquadranten PA eine Sehne CD ein, lege durch ihre Endpunkte, sowie durch ihren Halbirungspunkt L Ebenen parallel der Grundfläche MAB, so sind die entstehenden Durchschnittsdreiecke dem rechtwinkeligen Grunddreiecke MAB ähnlich, weshalb:

$$LO:LJ = AB:AM = s:r,$$

also:

$$LO = \frac{LJ}{r}.s.$$

Ebenso folgt:

$$CD:k = LM:LJ = \varrho:LJ,$$

mithin:

$$CD = \frac{\varrho}{LJ}.k;$$

und deshalb ist der Inhalt des bei C und D rechtwinkeligen Trapezes $CDFE$:

$$t = LO.CD = \frac{\varrho}{r}s.k.$$

Trägt man nun die Sehne CD mehrmals hinter einander in den Bogen PA ein, so ist die Summe aller solcher Trapeze:

Digitized by Google

$$\Sigma t = \frac{\varrho}{r} s . \Sigma k,$$

und wenn auf PM

$$\Sigma k = h$$

ist,

1) . . . . $\Sigma t = \frac{\varrho}{r} sh.$

Ganz ebenso ergiebt sich für die durch ihren Berührungspunkt halbirte Tangente $C'D'$, dass das äussere Trapez $C'D'F'E'$

$$T = s . k'$$

ist, dass also die Summe solcher berührenden Trapeze, deren Breite stets $= C'D'$ ist,

2) . . . . $\Sigma T = s\Sigma k' = sh$

wird.

Je schmaler die Trapeze werden, desto mehr gehen beide Summen über in einen Streifen des Cylindermantels:

3) . . . . $Z = sh,$

und dieser Ausdruck lehrt, dass alle Zonen von der Höhe h, mögen sie nahe bei P oder bei AB sein, immer von gleicher Grösse sind.

Summirt man alle Zonen, bis die Höhe h gleich $PM = r$ geworden, so findet man die dreieckige Figur PAB

4) . . . . $\Delta_c = sr,$

d. h. das cylindrisch gebogene Dreieck PAB ist doppelt so gross, als das Grunddreieck MAB.

Die Inhaltszahlen dieser von einem Ellipsen- und einem Kreisbogen begrenzten Flächenstücke sind frei von π.

Macht man sowohl die inneren als auch die äusseren Trapeze zu Grundflächen von Pyramiden mit der Spitze M, so haben erstere alle die Höhe ϱ, diese die Höhe r, und deshalb sind die Summen der Pyramiden:

$$\Sigma p = \tfrac{1}{3}\varrho . \frac{\varrho}{r} sh \quad \text{und} \quad \Sigma P = \tfrac{1}{3} r . sh,$$

welche, wenn man alle den Raum $PBMA$ ausfüllenden Pyramiden addirt, beide für die zwischen ihnen liegende Grösse des Cylinderstücks $PBMA$ liefern:

Digitized by Google

5) . . . . $P_c = \frac{1}{3}r . sr = \frac{1}{3}sr^2$,

d. h. das vierseitige Cylinderstück ist doppelt so gross, als ein Tetraeder von gleicher Grundfläche (*MAB*) und Höhe (*PM*).

Legt man durch *PM* einen zweiten Schnitt *PB'M* jenseit *PB*, so folgt aus Formel 4) durch Subtraction von *PAB'* und *PAB*, dass

$$PBB' = BB'.r = 2\triangle MBB';$$

und wenn man den Schnitt durch den über den Quadranten *PAM* erweiterten Cylinder diesseit *PA* führt, so hat man zwei solche Cylinderdreiecke zu addiren. Daher gilt auch von einem Cylinderdreieck, worin zwei Seiten Ellipsenquadranten sind, dass es das Doppelte des zugehörigen Grunddreicks ist, und dass der zwischen beiden liegende Körper das Doppelte eines Tetraeders von derselben Grundfläche und Höhe ist.

Beschreibt man nun um den Grundkreis einer Halbkugel (Taf. IX. Fig. II.) ein beliebiges Polygon *BB''B'*.... und legt durch seine Seiten Cylinderflächen, welche die Kugel in einem Meridianquadranten (*PA*, *PA'*,....) berühren, so entsteht eine Cylinderpyramide, deren Mantel doppelt so gross wie ihre Grundfläche ist; (nach Formel 4)):

6) . . . . $M = r\Sigma s = ru$.

wenn *u* den Umfang des Polygons bedeutet. Für jede Zone dieses Mantels gilt (nach Formel 3)):

7) . . . . $Z = h\Sigma s = hu$;

und somit haben alle diese Körper die Eigenschaft der Kugel, dass auf ihren Mänteln die Zonen von gleicher Höhe gleich sind.

Das Volumen der Cylinderpyramiden ist das Doppelte der Pyramide auf derselben Grundfläche und mit derselben Höhe. Eine Halbkugel gehört auch zu diesen Körpern.

Zieht man in der erweiterten Ebene des Aequators einer Kugel von beliebig gelegenen Punkten je zwei Tangenten an denselben, so dass eine sternförmige Figur entsteht, so ist auch diese (Taf. IX. Fig. III.) Grundfläche einer Cylinderpyramide, von welcher alles Gesagte auch gilt.

Da die Ecken (*A*, *C*, *E*, *G*,....) des Sternes eine ganz beliebige Lage haben, so kann man sie auf irgend einer Curve, z. B. auf einem Kreise oder einer Ellipse annehmen, die mit dem

Digitized by Google

Aequator der Kugel concentrisch sind. Dann entsteht (Taf. IX. Fig. IV.) als Cylinder-Doppelpyramide ein **gerипptes Ellipsoid**, dessen Oberfläche das Vierfache des zackigen Aequatorialschnittes ist.

Macht man die Construction für sehr viele Punkte jener Ellipse, und verlängert man jede Tangente über diese Ausgangspunkte bis zum Durchschnitt mit der nächsten, so entsteht ein zweiter Stern, der mit seinen Spitzen über die Ellipse hervorragt. Je mehr Zacken diese Sterne haben, desto kleiner wird der Unterschied ihrer Inhalte; wächst die Anzahl der Spitzen bis in's Unendliche, so nähern sich beide dem Inhalte der Ellipse und die Volumina der zugehörigen gerippten Ellipsoide, von denen das eine kleiner, das andere grösser ist als das Ellipsoid mit glatter Oberfläche, haben das Volumen des Ellipsoides zur Grenze, so dass sich für dieses, wenn die gegebene Kugel den Radius c, und die um sie gelegte Ellipse den Inhalt πab hat, ergiebt:

$$2.2.\tfrac{1}{3}\pi ab.c = \tfrac{4}{3}\pi abc.$$

XXII.

Ueber die Zerlegung einer ganzen rationalen Funktion in Faktoren.

Von

Herrn Professor *C. A. Bretschneider*

am Gymnasium zu Gotha.

Die im Archiv in diesem Theile S. 32. enthaltene Mittheilung des Herrn Franz Müller in Prag hat mir eine schon vor Jahren gemachte Bemerkung in das Gedächtniss zurückgerufen, welche auf elementarem Wege erkennen lässt, ob eine ganze rationale Funktion

Digitized by Google

$$Fx = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

einen Faktor von der Form

$$\varphi(x^p) = c_0 (x^p)^m + c_1 (x^p)^{m-1} + \dots + c_{m-1} x^p + c_m$$

besitzt oder nicht. Bildet man nämlich die Hülfsfunktionen:

$$f_1 x = a_0 x^n + a_p x^{n-p} + a_{2p} x^{n-2p} + \dots$$
$$f_2 x = a_1 x^{n-1} + a_{p+1} x^{n-p-1} + a_{2p+1} x^{n-2p-1} + \dots$$
$$f_3 x = a_2 x^{n-2} + a_{p+2} x^{n-p-2} + a_{2p+2} x^{n-2p-2} + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$f_n x = a_{p-1} x^{n-p+1} + a_{2p-1} x^{n-2p+1} + a_{3p-1} x^{n-3p+1} + \dots$$

und sucht den grössten gemeinschaftlichen Theiler dieser p Funktionen, so ist letzterer der gesuchte Faktor $\varphi(x^p)$. Der Beweis dieser Behauptung ist höchst einfach. Setzt man

$$Fx = \varphi(x^p) . \psi x,$$

wo ψ von der Form

$$\psi x = b_0 x^{n-pm} + b_1 x^{n-pm-1} + b_2 x^{n-pm-2} + \dots + b_{n-pm+1} . x + b_{n-pm}$$

ist, und entwickelt das Product $\varphi(x^p) . \psi x$, so erhält man jeden Coefficienten a ausgedrückt durch die Coefficienten b und c, und die Substitution dieser Werthe in die Ausdrücke für die Funktionen fx liefert sofort:

$$f_1 x = \varphi(x^p) . \psi_1 x,$$
$$f_2 x = \varphi(x^p) . \psi_2 x,$$
$$\dots\dots$$
$$f_p x = \varphi(x^p) . \psi_p x;$$

in welchen Ausdrücken die ψx ganze rationale Funktionen von der Form:

$$\psi_1 x = \alpha_1 x^{n-pm} + \beta_1 x^{n-p(m-1)} + \gamma_1 x^{n-p(m-2)} + \dots$$
$$\psi_2 x = \alpha_2 x^{n-pm-1} + \beta_2 x^{n-1-p(m-1)} + \gamma_2 x^{n-1-p(m-2)} + \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi_p x = \alpha_p x^{n-(p-1)-pm} + \beta_p x^{n-(p-1)-p(m-1)} + \gamma_p x^{n-(p-1)-p(m-2)} + \dots$$

und die Coefficienten $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$; $\beta_1, \beta_2, \dots \beta_p$; $\gamma_1, \gamma_2, \dots \gamma_p$; u. s. w. beziehungsweise mit den Coefficienten $b_0, b_1, \dots b_{p-1}, b_p, b_{p+1}, \dots b_{2p-1}$, $b_{2p}, b_{2p+1}, \dots b_{3p-1}$ u. s. w. identisch sind, daher denn selbstverständlich

Digitized by Google

$$\psi x = \psi_1 x + \psi_2 x + \psi_3 x + \dots + \psi_p x$$

sein muss. Ist also z. B. gegeben:

$$Fx = 3x^9 + 2x^8 - 10x^7 - 10x^6 + x^5 + 8x^4 - 2x^3 + 10x^2 - x + 2,$$

und man will untersuchen, ob Fx einen Faktor von der Form $c_0 + c_1 x^2 + c_2 x^4 + \dots$ besitzt, so bilde man die Hülfsfunktionen:

$$f_1 x = 3x^9 - 10x^7 + x^5 - 2x^3 - x,$$
$$f_2 x = 2x^8 - 10x^6 + 8x^4 + 10x^2 + 2,$$

und ermittele, ob sie einen gemeinschaftlichen Theiler besitzen. Die Division liefert für denselben den Werth $(x^4 - 3x^2 - 1)$, so dass man

$$Fx = (x^4 - 3x^2 - 1)(3x^5 + 2x^4 - x^3 - 4x^2 + x - 2)$$

erhält. Hätte man zu versuchen, ob die Funktion

$$Fx = 3x^{11} - 5x^{10} - 2x^9 - 8x^8 + 14x^7 - 12x^5 + 18x^4 + 24x^3 - 3x^2 + 3x + 18$$

einen Faktor der Form $c_0 + c_1 x^3 + c_2 x^6 + \dots$ besitze, so bilde man die drei Hülfsfunktionen:

$$f_1 x = 3x^{11} - 8x^8 - 12x^5 - 3x^2,$$
$$f_2 x = -5x^{10} + 14x^7 + 18x^4 + 3x,$$
$$f_3 x = -2x^9 + 0x^6 + 24x^3 + 18,$$

und ermittele, ob sie sämmtlich einen und denselben gemeinschaftlichen Faktor besitzen. Man findet den Werth $(x^6 - 3x^3 - 3)$ als Faktor, der sowohl $f_1 x$ und $f_2 x$, als auch $f_1 x$, und $f_3 x$ gemein ist, und erhält somit:

$$Fx = (x^6 - 3x^3 - 3)(3x^5 - 5x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 6).$$

Ebenso würde sich für

$$Fx = 2x^9 - 4x^8 - 8x^7 + 15x^6 - 10x^5 + 22x^4 + 3x^3 + 24x^2 - 15x - 45$$

durch successive Zerlegung in zwei und sodann in drei Hülfsfunktionen der Werth

$$Fx = (x^2 - 5)(2x^3 - 3)(x^4 - 2x^3 + x^2 - x - 3)$$

ergeben.

Ist es auch mit Hülfe der höheren Algebra immer möglich, zu ermitteln, ob eine Gleichung eine Wurzel von der Form $\sqrt[p]{m}$ besitzt, so dürfte doch das hier angegebene Verfahren bei seiner ganz elementaren Natur immerhin nicht ohne Werth und wenigstens beim Unterrichte in den Elementen der Algebra recht brauchbar sein.

Digitized by Google

XXIII.

Die Gleichungen der regulären Vielecke und Zerlegung derselben in Gleichungen niederer Grade.

Von
Herrn Professor *W. Schoenborn*
in Krotoschin.

C. A. Kletke hat in seiner Schrift: De polygonorum regularium aequationibus. Breslau 1833, so weit dem Verfasser bekannt, zuerst auf elementar geometrischem Wege die Gleichungen für die Seiten der regulären Vielecke entwickelt. Die Gleichungen für das reguläre 10-, 14-, 18-, ... 34-Eck werden a. a. O. p. 2—7 dadurch gefunden, dass man in dem Bestimmungs-Dreiecke des betreffenden Vieleckes den Basis-Winkel in eine gewisse Anzahl gleicher Theile theilt, deren jeder dem Winkel an der Spitze des Dreiecks gleich ist. Ein ähnliches Verfahren befolgte der Verfasser dieser Abhandlung in deren erstem Theile bis §. 9., indem er die Gleichungen suchte, die zwischen den Seiten eines Dreiecks statt haben, in welchem ein Winkel das $m$fache eines andern Winkels ist; dadurch gelangte er zu den Sätzen in §. 4., 5., aus ihnen folgen als besondere Fälle die Sätze über die Gleichungen, deren Wurzeln die Seite und Diagonalen der regulären Vielecke geben. — Der zweite Theil der Abhandlung von §. 10. ab betrifft die Zerlegung der gefundenen Gleichungen in Gleichungen niederer Grade. Der eine hierzu angewendete Satz, dass nämlich die Gleichung des regulären $2(4n+1)$-Ecks sich nicht ändert, wenn man statt der Seite x den Werth $\sqrt{x+2}$ einsetzt, lässt sich sehr leicht erweisen, wenn man auf die Gleichung $\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}=0$ zurückgeht; deswegen ist in §. 10., 11. auf diese Gleichung zurückgegangen worden. Beweist man den Satz auf eine andere Art direct, so bedarf es der Zuhilfenahme dieser Gleichung nicht.

Digitized by Google

§. 1.

Die Grössen

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\ \ldots.\ a_n,\ \ldots.$$
$$t_1,\quad t_2,\quad t_3,\ \ldots.\ t_n,\ \ldots.\ c$$

seien in der Art von einander abhängig, dass zwischen ihnen die Gleichungen

(1)

$$t_2=\frac{c.t_1}{a_1},\qquad t_3=\frac{c.t_2}{a_2},\qquad t_4=\frac{c.t_3}{a_3},\ \ldots.\ t_n=\frac{c.t_{n-1}}{a_{n-1}},$$

$$a_2=\frac{a_1{}^2-t_1{}^2}{a_1},\quad a_3=\frac{a_2{}^2-t_2{}^2}{a_2},\quad a_4=\frac{a_3{}^2-t_3{}^2}{a_3},\ldots.\ a_n=\frac{a_{n-1}{}^2-t_{n-1}{}^2}{a_{n-1}}$$

gelten; man kann dann jedes t, jedes a als bestimmt ansehen, so wie t_1, a_1, c gegeben sind. Ist ferner a_n, t_n oder eine Function beider Grössen durch a_1, t_1, c ausgedrückt, so wird man a_{n+1}, t_{n+1} oder die entsprechende Function beider Grössen erhalten, so wie in dem betreffenden Ausdrucke a_1, t_1 mit a_2, t_2 vertauscht wird. Bezeichnet man die Function t_n-a_n mit F_n, so ergeben die Gleichungen in (1):

$$F_1=t_1-a_1,$$
$$F_2=\frac{t_1{}^2-a_1{}^2}{a_1}+\frac{c^2.t_1}{a_1}\cdot\frac{1}{c},$$
$$F_3=\frac{t_1{}^2-a_1{}^2}{a_1}+\frac{c^2.t_1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_1-t_1},$$
$$F_4=\frac{t_1{}^2-a_1{}^2}{a_1}+\frac{c^2.t_1}{a_1}\cdot\frac{t_1+c}{a_1{}^2-t_1{}^2-c_1t_1},$$
$$F_5=\frac{t_1{}^2-a_1{}^2}{a_1}+\frac{c^2.t_1}{a_1}\cdot\frac{t_1(a_1-t_1)+c^2.1}{(a_1{}^2-t_1{}^2)(a_1-t_1)-c^2.t_1.1},$$
$$F_6=\frac{t_1{}^2-a_1{}^2}{a_1}+\frac{c^2.t_1}{a_1}\cdot\frac{t_1(a_1{}^2-t_1{}^2-c_1t_1)+c^2.(t_1+c)}{(a_1{}^2-t_1{}^2)(a_1{}^2-t_1{}^2-c_1t_1)-c^2.t_1(t_1+c)}.$$

Die Werthe F_5, F_6 zeigen ein Gesetz, das sich, wenn man

$$F_m=\frac{t_1{}^2-a_1{}^2}{a_1}+\frac{c^2.t_1}{a_1}\cdot\frac{Z_m}{N_m}$$

annimmt, wie folgt ausdrücken lässt:

$$F_n=\frac{t_1{}^2-a_1{}^2}{a_1}+\frac{c^2.t_1}{a_1}\cdot\frac{t_1.N_{n-2}+c^2.Z_{n-2}}{(a_1{}^2-t_1{}^2)N_{n-2}-c^2.t_1.Z_{n-2}}.\qquad(2)$$

Digitized by Google

Auch F_4 ist nach diesem Gesetze gebildet, da es ja auch

$$=\frac{t_1^2-a_1^2}{a_1}+\frac{c^2.t_1}{a_1}\cdot\frac{t_1.c+c^2.1}{(a_1^2-t_1^2)c-c^2.t_1.1}$$

ist.

Nimmt man an, die Gleichung (2) sei recht für alle Werthe von n, von $n=4$ bis $n=n$, und versteht unter $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{N}_n$ das, was aus Z_n, N_n wird, wenn man darin a_2, t_2 an die Stelle von a_1, t_1 setzt, so ist:

(3)

$$F_{n+1}=\frac{t_2^2-a_2^2}{a_2}+\frac{c^2.t_2}{a_2}\cdot\frac{t_2.\mathfrak{N}_{n-2}+c^2.\mathfrak{S}_{n-2}}{(a_2^2-t_2^2)\mathfrak{N}_{n-2}-c^2.t_2.\mathfrak{S}_{n-2}}=\frac{t_1^2-a_1^2}{a_1}$$

$$+\frac{c^2.t_1^2}{a_1(a_1^2-t_1^2)}+\frac{c^3.t_1}{a_1^2-t_1^2}\cdot\frac{c.t_1.\mathfrak{N}_{n-2}+c^2.a_1.\mathfrak{S}_{n-2}}{[(a_1^2-t_1^2)^2-c^2.t_1^2]\mathfrak{N}_{n-2}-c^3.t_1.a_1.\mathfrak{S}_{n-2}}.a_1$$

$$=\frac{t_1^2-a_1^2}{a_1}+\frac{c^2.t_1}{a_1}\cdot\frac{t_1(a_1^2-t_1^2)+c^2.t_1+c^3.a_1.\frac{\mathfrak{S}_{n-2}}{\mathfrak{N}_{n-2}}}{(a_1^2-t_1^2)^2-c^2.t_1^2-c^3.a_1.t_1.\frac{\mathfrak{S}_{n-2}}{\mathfrak{N}_{n-2}}}.$$

Nach der Annahme ist:

$$F_{n-1}=\frac{t_1^2-a_1^2}{a_1}+\frac{c^2.t_1}{a_1}\cdot\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}=\frac{t_2^2-a_2^2}{a_2}+\frac{c^2.t_2}{a_2}\cdot\frac{\mathfrak{S}_{n-2}}{\mathfrak{N}_{n-2}},$$

folglich:

$$\frac{\mathfrak{S}_{n-2}}{\mathfrak{N}_{n-2}}=\frac{a_1^2-t_1^2}{a_1.c}\cdot\frac{Z_{n-1}}{N_{n-1}}-\frac{t_1}{a_1.c};$$

setzt man diesen Werth in (3) ein, so ergiebt sich:

$$F_{n+1}=\frac{t_1^2-a_1^2}{a_1}+\frac{c^2.t_1}{a_1}\cdot\frac{t_1.N_{n-1}+c^2.Z_{n-1}}{(a_1^2-t_1^2)N_{n-1}-c^2.t_1.Z_{n-1}},$$

d. h. eine Gleichung, die sich aus (2) ergibt, wenn man darin $n+1$ statt n setzt. Die Gleichung (2) gilt also für alle Werthe von n, die $=$ oder >4 sind.

Führt man das Zeichen $\mathfrak{V}_n=\frac{Z_n}{N_n}$ ein, so kann man statt (2) auch setzen:

$$F_n=\frac{t_1^2-a_1^2}{a_1}+\frac{c^2.t_1}{a_1}\cdot\frac{t_1+c^2.\mathfrak{V}_{n-2}}{a_1^2-t_1^2-c^2.t_1\mathfrak{V}_{n-2}}$$

$$=\frac{t_1^2-a_1^2-c^2}{a_1}+\frac{c^2.a_1}{a_1^2-t_1^2-c^2.t_1.\mathfrak{V}_{n-2}};$$

Digitized by Google

da nun auch

$$F_{n-2} = \frac{t_1^2 - a_1^2}{a_1} + \frac{c^2 . t_1}{a_1} . V_{n-2}$$

ist, so ergiebt sich:

$$F_n = \frac{t_1^2 - a_1^2 - c^2}{a_1} - \frac{c^2}{F_{n-2}},$$

oder, wenn man das Zeichen $M = \frac{t_1^2 - a_1^2 - c^2}{a_1}$ einführt:

$$F_n = M - \frac{c^2}{F_{n-2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Durch wiederholte Anwendung der Gleichung (4) erhält man:

$$F_n = M - \cfrac{c^2}{M - \cfrac{c^2}{M - \cdots \cdots - \cfrac{c^2}{F_{n-2m}}}},$$

oder es lässt sich F_n als Kettenbruch darstellen, dessen einzelne Glieder subtractiv sonst aber $= \frac{c^2}{M}$ sind, dessen Endglied aber $\frac{c^2}{F_3}$ oder $\frac{c^2}{F_2}$ ist, je nachdem n eine ungerade oder gerade Zahl ist.

§. 2.

Versucht man F_n als Quotienten darzustellen, setzt $F_n = \frac{Z_n}{N_n}$ (wobei also Z_n, N_n eine andere Bedeutung haben als bisher), so ist wegen Gleichung (4):

$$F_n = \frac{(t_1^2 - a_1^2 - c^2) . Z_{n-2} - a_1 . c^2 . N_{n-2}}{a_1 . Z_{n-2}},$$

d. h. man findet:

$$N_n = a_1 . Z_{n-2}; \quad Z_n = (t_1^2 - a_1^2 - c^2) . Z_{n-2} - a_1 . c^2 . N_{n-2}. \quad (5)$$

Soll also F_n als Quotient gefunden werden, so braucht man nur den Dividendus desselben zu suchen, der Divisor ist gleich dem Produkte aus a_1 in den zu F_{n-2} gehörigen Dividendus. Aus den Gleichungen in (1) ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$Z_2 = t_1^2 - a_1^2 + t_1 c,$$
$$Z_4 = -t_1^4 + t_1^2(2a_1^2 + c^2) - a_1^4 + t_1 c . [-t_1^2 + (a_1^2 + c^2)],$$
$$Z_6 = -t_1^6 + t_1^4(3a_1^2 + 2c^2) - t_1^2(3a_1^4 + 2a_1^2c^2 + c^4) + a_1^6$$
$$+ t_1 c . [-t_1^4 + t_1^2(2a_1^2 + 2c^2) - (a_1^4 + a_1^2c^2 + c^4)],$$

Digitized by Google

$$Z_8 = -t_1^8 + t_1^6(4a_1^2 + 3c^2) - t_1^4(6a_1^4 + 6a_1^2c^2 + 3c^4)$$
$$+ t_1^2(4a_1^6 + 3a_1^4c^2 + 2a_1^2c^4 + c^6) - a_1^8$$
$$+ t_1 c . [- t_1^6 + t_1^4(3a_1^2 + 3c^2) - t_1^2(3a_1^4 + 4a_1^2c^2 + 3c^4)$$
$$+ (a_1^6 + a_1^4c^2 + a_1^2c^4 + c^6)],$$

$$Z_{10} = - t_1^{10} + t_1^8(5a_1^2 + 4c^2) - t_1^6(10a_1^4 + 12a_1^2c^2 + 6c^4)$$
$$+ t_1^4(10a_1^6 + 12a_1^4c^2 + 9a_1^2c^4 + 4c^6)$$
$$- t_1^2(5a_1^8 + 4a_1^6c^2 + 3a_1^4c^4 + 2a_1^2c^6 + c^8) + a_1^{10}$$
$$+ t_1 c [- t_1^8 + t_1^6(4a_1^2 + 4c^2) - t_1^4(6a_1^4 + 9a_1^2c^2 + 6c^4)$$
$$+ t_1^2(4a_1^6 + 6a_1^4c^2 + 6a_1^2c^4 + 4c^6) - (a_1^8 + a_1^6c^2 + a_1^4c^4 + a_1^2c^6 + c^8)],$$

Nach Analogie dieser Gleichung kann man bilden:

(6)

$$Z_{2n} = \sum_0^n {}^m (-1)^{m+1} . t_1^{2n-2m} [n_m . a_1^{2m} + (n-1)_{m-1} . (n-m)_1 . a_1^{2m-2} . c^2$$
$$+ (n-2)_{m-2} . (n-m+1)_2 . a_1^{2m-4} . c^4 + \ldots .$$
$$+ (n-s)_{m-s} . (n-m+s-1)_s . a_1^{2m-2s} . c^{2s}$$
$$+ (n-s-1)_{m-s-1} . (n-m+s)_{s+1} . a_1^{2m-2s-2} . c^{2s+2}$$
$$+ \ldots . + (n-1)_m . c^{2m}]$$

$$+ t_1 . c . \sum_1^n {}^m (-1)^m . t_1^{2n-2m} [(n-1)_{m-1} . a_1^{2m-2}$$
$$+ (n-2)_{m-2} \; (n-m+1)_1 . a_1^{2m-4} . c^2$$
$$+ (n-3)_{m-3} . (n-m+2)_2 . a_1^{2m-6} . c^4 + \ldots .$$
$$+ (n-s)_{m-s} . (n-m+s-1)_{s-1} . a_1^{2m-2s} . c^{2s-2}$$
$$+ (n-s-1)_{m-s-1} \; . \; (n-m+s)_s \; . \; a_1^{2m-2s-2} \; . \; c^{2s}$$
$$+ \ldots . + (n-1)_{m-1} . c^{2m-2}].$$

In dieser Gleichung bezeichnet n_s den Binomial-Coefficienten (n_0 ist $= 1$, $n_{-s} = 0$); das Zeichen $\sum_0^n {}^m$ bedeutet, man solle in dem folgenden Ausdrucke dem m der Reihe nach die Werthe $0, 1, 2, 3, \ldots n$ ertheilen und die so erhaltenen Grössen addiren. Man findet alsbald, dass die Gleichung (6) richtig sei für $n = 2$, 3, 4, 5. Vermöge der Gleichung (5) kann man aber Z_{2n+2} bestimmen, so wie Z_{2n} und Z_{2n-2} gegeben sind. Führt man die Rechnung aus, so erhält man für Z_{2n+2} einen Werth, der sich aus Gleichung (6) dadurch ergiebt, dass man darin $n+1$ statt n setzt. Die Rechnung ist ohne Schwierigkeit; durch wiederholte Anwendung der Gleichung $(n+g)_k + (n+g)_{k-1} = (n+g+1)_k$ lassen sich die Glieder, die in gleiche Potenzen von a_1, t_1, c multiplicirt sind, addiren. Man erhält z. B. als das Glied, welches in $t_1^{2n-2m} . a_1^{2m-2s+2} . c^{2s}$ multiplicirt ist, abgesehen vom Factor $(-1)^m$ die Grösse:

Digitized by Google

$$(n-s)_{m-s+1}.(n-m+s-2)_s+(n-s)_{m-s}.(n-m+s-1)_s$$

$$+(n-s+1)_{m-s+1}.(n-m+s-2)_{s-1}-(n-s)_{m-s}.(n-m+s-2)_{s-1}$$

$$=(n-s)_{m-s+1}.(n-m+s-2)_s+(n-s)_{m-s}.(n-m+s-1)_s$$

$$+(n-s)_{m-s+1}.(n-m+s-2)_{s-1}$$

$$=(n-s)_{m-s+1}.(n-m+s-1)_s+(n-s)_{m-s}.(n-m+s-1)_s$$

$$=(n-s+1)_{m-s+1}.(n-m+s-1)_s,$$

d. h. eine Grösse, die man aus dem entsprechenden Gliede in (6) erhält, wenn man in diesem $m+1$ und $n+1$ statt m und n setzt. Die Gleichung (6) lässt sich aber auch einfacher schreiben:

(7)

$$Z_{2n}=\sum_0^n m\{(-1)^{m+1}.t_1^{2n-2m}.\sum_0^m s\,[(n-s)_{m-s}.(n-m+s-1)_s.a_1^{2m-2s}.c^{2s}]\}$$

$$+c.t_1.\sum_1^n m\{(-1)^m.t_1^{2n-2m}.\sum_1^m s\,[(n-s)_{m-s}.(n-m+s-1)_{s-1}.a_1^{2m-2s}.c^{2s-2}]\}.$$

Entwickelt man die Werthe von Z, deren Zeiger eine ungerade Zahl ist, aus den Gleichungen in (1), so erhält man:

$$Z_3=-t_1^3+t_1(a_1^2+c^2)+a_1[t_1^2-a_1^2],$$

$$Z_5=-t_1^5+t_1^3(2a_1^2+2c^2)-t_1(a_1^4+a_1^2c^2+c^4)$$
$$+a_1[t_1^4-t_1^2(2a_1^2+c^2)+a_1^4],$$

$$Z_7=-t_1^7+t_1^5(3a_1^2+3c^2)-t_1^3(3a_1^4+4a_1^2c^2+3c^4)$$
$$+t_1(a_1^6+a_1^4c^2+a_1^2c^4+c^6)$$
$$+a_1[t_1^6-t_1^4(3a_1^2+2c^2)+t_1^2(3a_1^4+2a_1^2c^2+c^4)-a_1^6].$$

$$Z_9=-t_1^9+t_1^7(4a_1^2+4c^2)-t_1^5(6a_1^4+9a_1^2c^2+6c^4)$$
$$+t_1^3(4a_1^6+6a_1^4c^2+6a_1^2c^4+4c^6)-t_1(a_1^8+a_1^6c^2+a_1^4c^4+a_1^2c^6+c^8)$$
$$+a_1[t_1^8-t_1^6(4a_1^2+3c^2)+t_1^4(6a_1^4+6a_1^2c^2+3c^4)$$
$$-t_1^2(4a_1^6+3a_1^4c^2+2a_1^2c^4+c^6)+a_1^8].$$

Beachtet man, dass z. B. in Z_9 die ungeraden Potenzen von t_1 in dieselben Factoren multiplicirt sind wie in Z_{10}, wenn man im letztern Ausdrucke vom Factor c absieht, dass aber die geraden Potenzen von t_1, abgesehen vom Vorzeichen und dem Factor a_1, dieselben Factoren haben wie die geraden Potenzen von t_1 in Z_8, so ergibt sich als allgemein giltig die Gleichung:

Digitized by Google

(8)

$$Z_{2n+1} = \sum_0^n {}_m \{ (-1)^{m+1} . t_1^{2n-2m+1} . \sum_0^m {}_s [(n-s)_{m-s} . (n-m+s)_s . a_1^{2m-2s} . c^{2s}] \}$$

$$+ a_1 \sum_0^n {}_m \{ (-1)^m . t_1^{2n-2m} . \sum_0^m {}_s [(n-s)_{m-s} . (n-m+s-1)_s . a_1^{2m-2s} . c^{2s}] \}.$$

Uebrigens lässt sich die Richtigkeit der Gleichung (8) direct erweisen, wenn man den bei Gleichung (7) angedeuteten Beweis auch hier durchführt.

Hätte man die Werthe von Z_n nach Potenzen von a_1 geordnet, so würde man statt der Gleichungen (7), (8) erhalten:

(9)

$$Z_{2n} = (-1)^{n+1} . \sum_0^n {}_m \{ a_1^{2n-2m} . (\sum_0^m {}_s [(-1)^{m+s} . (m-1)_s . (n-s)_{n-m} . t_1^{2m-2s} . c^{2s}]$$

$$+ \sum_0^{m-1} {}_s [(-1)^{m+s} . (m-1)_s . (n-s-1)_{n-m} . t_1^{2m-2s-1} . c^{2s+1}]) \},$$

(10)

$$Z_{2n+1} = (-1)^n . \sum_0^n {}_m \{ a_1^{2n-2m+1} . \sum_0^{m-1} {}_s [(-1)^{m+s} . (m-1)_s . (n-s)_{n-m} . t_1^{2m-2s} . c^{2s}] \}$$

$$+ (-1)^{n+1} . \sum_0^n {}_m \{ a_1^{2n-2m} . \sum_0^m {}_s [(-1)^{m+s} . m_s . (n-s)_{n-m} . t_1^{2m-2s+1} . c^{2s}] \}.$$

Die Gleichungen (7) — (10) nehmen eine viel einfachere Form an, wenn zwei der Grössen t_1, a_1, c einander gleich werden. Sind p, q absolute ganze Zahlen, so ist:

$$(1+x)^{-p} = \sum_0^\infty {}_s [(-1)^s . (p+s-1)_s . x^s];$$

$$(1+x)^{-q} = \sum_0^\infty {}_\sigma [(-1)^\sigma . (q+\sigma-1)_\sigma . x^\sigma];$$

$$(1+x)^{-(p+q)} = \sum_0^\infty {}_m [(-1)^m . (p+q+m-1)_m . x^m],$$

folglich ist:

$$\sum_0^m {}_s [(p+s-1)_s . (q+m-s-1)_{m-s}] = (p+q+m-1)_m \quad \text{(A)}$$

Setzt man in dieser Gleichung $p=n-m$, $q=n-m+1$, so geht sie über in:

$$\sum_0^m {}_s [(n-m+s-1)_s . (n-s)_{m-s}] = (2n-m)_m. \quad \text{(B)}$$

Digitized by Google

Setzt man in (A) ein $p=q=n-m+1$, so ergibt sich:

$$\sum_0^m {}_s[(n-m+s)_s.(n-s)_{m-s}] = (2n-m+1)_m. \qquad \text{(C)}$$

Aus (A) folgt:

$$\sum_0^{m-1} {}_s[(p+s-1)_s.(q+m-s-2)_{m-s-1}] = (p+q+m-2)_{m-1}$$

oder

$$\sum_1^m {}_s[(p+s-2)_{s-1}.(q+m-s-1)_{m-s}] = (p+q+m-2)_{m-1},$$

und macht man hierin $p=q=n-m+1$, so folgt:

$$\sum_1^m {}_s[(n-m+s-1)_{s-1}.(n-s)_{m-s}] = (2n-m)_{m-1}. \qquad \text{(D)}$$

Wegen der Gleichungen (B), (C), (D) gehen die Gleichungen (7) und (8) in dem Falle, wo $a_1 = c$ ist, über in:

(11)

$$Z_{2n} = \sum_0^n {}_m[(-1)^{m+1}.(2n-m)_m.t_1^{2n-2m}.a_1^{2m}] + \sum_1^n {}_m[(-1)^m.(2n-m)_{m-1}.t_1^{2n-2m+1}.a_1^{2m-1}],$$

(12)

$$Z_{2n+1} = \sum_0^n {}_m[(-1)^{m+1}.(2n-m+1)_m.t_1^{2n-2m+1}.a_1^{2m}] + \sum_0^n {}_m[(-1)^m.(2n-m)_m.t_1^{2n-2m}.a_1^{2m+1}].$$

Sind p, q absolute ganze Zahlen, $q > p$, so ist:

$$(1-x)^p = \sum_0^p {}_s[(-1)^s.p_s.x^s]; \qquad (1-x)^{-q} = \sum_0^\infty {}_\sigma[(q+\sigma-1)_\sigma.x^\sigma];$$

$$(1-x)^{-(q-p)} = \sum_0^\infty {}_m[(q-p+m-1)_m.x^m],$$

folglich:

$$\sum_0^m {}_s[(-1)^s.p_s.(q+m-s-1)_{m-s}] = (q-p+m-1)_m. \qquad \text{(E)}$$

Für $p=m-1$, $q=n-m+1$ geht (E) über in:

$$\sum_0^m {}_s[(-1)^s.(m-1)_s.(n-s)_{m-s}] = (n-m+1)_m. \qquad \text{(F)}$$

Digitized by Google

Setzt man in (E) $p = m$, $q = n - m + p$ ein, so ergiebt sich:

$$\sum_0^m {}_s[(-1)^s . m_s . (n-s)_{m-s}] = (n-m)_m . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (G)$$

Aus (E) folgt:

$$\sum_0^{m-1} {}_s[(-1)^s . p_s . (q+m-s-2)_{m-s-1}] = (q-p+m-2)_{m-1},$$

und diese Gleichung geht für $p = m-1$, $q = n-m+p$ über in:

$$\sum_0^{m-1} {}_s[(-1)^s . (m-1)_s (n-s-1)_{m-s-1}] = (n-m)_{m-1}. \quad (H)$$

Da man in (9), (10) $(n-s)_{m-s}$ statt $(n-s)_{n-m}$, $(n-s-1)_{m-s-1}$ statt $(n-s-1)_{n-m}$ setzen kann, so gehen beide Gleichungen wegen (F), (G), (H) in dem Falle, dass $t_1 = c$ ist, über in:

(13)

$$Z_{2n} = (-1)^{n+1} . \sum_0^n {}_m\{(-1)^m [(n-m+1)_m + (n-m)_{m-1}] . a_1^{2n-2m} . t_1^{2m}\},$$

(14)

$$Z_{2n+1} = (-1)^n . \sum_0^n {}_m[(-1)^m . (n-m+1)_m . a_1^{2n-2m+1} . t_1^{2m}]$$

$$+ (-1)^{n+1} . \sum_0^n {}_m[(-1)^m . (n-m)_m . a_1^{2n-2m} . t_1^{2m+1}].$$

Beide Gleichungen nehmen, weil jetzt einzelne der Coefficienten 0 werden, eine noch einfachere Gestalt an, man vergleiche darüber §. 6.

Anmerkung. Zu ähnlichen Gleichungen wie in (7)—(10) gelangt man, wenn man statt von den Gleichungen in (1) von folgenden Gleichungen ausgeht:

$$a_2 = \frac{a_1 . c^2}{c^2 - t_1^2}, \quad a_3 = \frac{a_2 . c^2}{c^2 - t_2^2}, \ldots . \ a_n = \frac{a_{n-1} . c^2}{c^2 - t_{n-1}^2}, \ldots .$$

$$t_2 = \frac{a_1 . c . t_1}{c^2 - t_1^2}, \quad t_3 = \frac{a_2 . c . t_2}{c^2 - t_2^2}, \ldots . \ t_n = \frac{a_{n-1} . c . t_{n-1}}{c^2 - t_{n-1}^2}, \ldots .$$

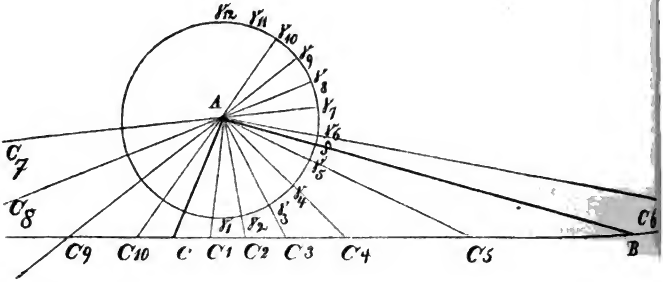
Für den Zweck dieser Abhandlung genügen die Gleichungen, die in §. 1. und §. 2. entwickelt sind. Sollen aus den in der Anmerkung erwähnten Gleichungen die folgenden Sätze über reguläre Vielecke hergeleitet werden, so kommt es darauf an, den Nenner von t_n durch a_1, t_1, c auszudrücken.

Digitized by Google

§. 3.

Im Dreiecke ABC, dessen Seite AB mit c bezeichnet wird, ziehe man durch A eine beliebige Transversale AC_1, lege an AC_1 in A den Winkel $ABC = C_1AC_2$ an, so dass C_1AC_2 und ABC auf derselben Seite von AC_1 liegen, an AC_2 lege man wieder denselben Winkel $= C_2AC_3$ an, an AC_3 wieder und so fort, mache also $ABC = C_1AC_2 = C_2AC_3 = C_3AC_4 = C_4AC_5 = \ldots$, bezeichne die Strecken der Transversalen von A bis zum Schnittpunkte in BC mit t und dem zugehörigen Zeiger, setze also $AC_1 = t_1$, $AC_2 = t_2$, $AC_3 = t_3$, $AC_4 = t_4 = \ldots$, bezeichne ferner BC_1 mit a_1, BC_2 mit a_2, BC_3 mit $a_3, \ldots$, so ist:

$$\Delta C_1AC_2 \sim \Delta C_1AB,\ \Delta C_2AC_3 \sim \Delta C_2AB,\ \Delta C_3AC_4 \sim \Delta C_3AB, \ldots$$



folglich:

$$\frac{t_1}{a_1} = \frac{t_2}{c} = \frac{a_1 - a_2}{t_1}; \quad \frac{t_2}{a_2} = \frac{t_3}{c} = \frac{a_2 - a_3}{t_2}; \quad \frac{t_3}{a_3} = \frac{t_4}{c} = \frac{a_3 - a_4}{t_3} \quad \text{u. s. w.,}$$

oder es ist:

$$t_2 = \frac{c \cdot t_1}{a_1}, \qquad t_3 = \frac{c \cdot t_2}{a_2}, \qquad t_4 = \frac{c \cdot t_3}{a_3}, \ldots$$

$$a_2 = \frac{a_1^2 - t_1^2}{a_1}, \quad a_3 = \frac{a_2^2 - t_2^2}{a_2}, \quad a_4 = \frac{a_3^2 - t_3^2}{a_3} \ldots$$

Dass die entsprechenden Gleichungen für t_5, a_5, t_6, $a_6, \ldots$ gelten, wenn AC_5, $AC_6, \ldots$ innerhalb des Winkels CAB liegen, bedarf keines Beweises; es frägt sich, in wie fern die Gleichungen noch gelten, wenn die Transversalen ausserhalb des Winkels liegen. Nach der Figur ist AC_6 die erste ausserhalb liegende

Digitized by Google

Transversale. Es ist $\Delta C_5AC_6 \backsim \Delta C_5AB$, folglich $\frac{t_5}{a_5}=\frac{t_6}{c}=\frac{c_5c_6}{t_5}$. Soll diese Gleichung den früheren entsprechen, so muss $C_5C_6 = a_5 - a_6$ sein; also muss $a_6 = BC_6$ als negativ aufgefasst werden. Dass a_6 negativ ist, folgt auch daraus, dass C_6 auf einer Seite von B liegt, die der Seite entgegengesetzt ist, auf der C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 liegen. Die nächste Transversale, die man erhält, wenn man an AC_6 den Winkel $C_6A\gamma_7 = ABC$ anlegt, muss über A verlängert werden, damit sie BC schneide. Es ist $\Delta C_6AC_7 \backsim \Delta C_6AB$, folglich $\frac{t_6}{a_6}=\frac{t_7}{c}=\frac{a_6-a_7}{t_6}$, mithin ist t_7 negativ, wie jede Transversale, die erst in der Verlängerung über A die BC schneidet; a_7 ist positiv, denn C_7 liegt mit C_1 auf derselben Seite von B. Legt man an $A\gamma_7$ den Winkel $\gamma_7A\gamma_8 = ABC$, so ist wieder $\Delta C_7AC_8 \backsim \Delta C_7AB$, und folgt ebenso, dass t_8 negativ sei. Durch Wiederholung dieser Schlüsse überzeugt man sich, dass jedes a, dessen Endpunkt mit dem Endpunkte von a_1 auf derselben Seite von B liegt, als positiv, jedes a dagegen, dessen Endpunkt auf der anderen Seite von B liegt, als negativ anzusehen ist; ebenso, dass jede Transversale, die erst in der Verlängerung über A die Seite BC schneidet, negativ zu nehmen sei. Somit erhält man folgenden Satz:

Zieht man in einem Dreiecke ABC durch eine Ecke A eine beliebige Transversale AC_1, legt an diese auf der Seite, wo der Winkel ABC liegt, in A einen Winkel an $= ABC$, an den neuen Schenkel wieder denselben Winkel und so fort, bezeichnet die Strecken dieser Geraden von A bis zu den Schnittpunkten mit BC der Reihe nach mit t_1, t_2, t_3, ... t_n, ..., welche Grössen als positiv oder negativ zu betrachten sind, je nachdem der zugehörige Schenkel selbst oder erst seine Verlängerung über A die Linie BC schneidet, bezeichnet die Entfernungen der Schnittpunkte der verschiedenen Transversalen mit BC von B respective mit a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... welche Grössen als positiv oder negativ zu betrachten sind, je nachdem die Schnittpunkte mit C_1 auf derselben oder auf verschiedenen Seiten von B liegen, versteht unter c die Seite AB, so finden zwischen diesen Grössen die folgenden Gleichungen statt:

(15)

$$t_2=\frac{c.t_1}{a_1},\quad t_3=\frac{c.t_2}{a_2},\quad t_4=\frac{c.t_3}{a_3},\ \ldots.\ t_n=\frac{c.t_{n-1}}{a_{n-1}},\ \ldots.$$

$$a_2=\frac{a_1^2-t_1^2}{a_1},\ a_3=\frac{a_2^2-t_2^2}{a_2},\ a_4=\frac{a_3^2-t_3^2}{a_3},\ldots a_n=\frac{a_{n-1}^2-t_{n-1}^2}{a_{n-1}}.\ldots$$

Digitized by Google

Statt den Winkel ABC an AC_1 selbst anzulegen, kann er auch an die Verlängerung von AC_1 über A und wiederholt weiter angelegt werden, natürlich in derselben Richtung wie vorher. (Also jetzt läge $\gamma_1 A \gamma_2$ und ABC auf verschiedenen Seiten von AC_1). In der Sache und den Gleichungen ändert sich Nichts weiter, als dass schon t_1 als negativ zu betrachten ist.

Anmerkung. Hätte man ABC auf der entgegengesetzten Seite von AC_1 wiederholt angelegt, so hätte man erhalten:

$$\Delta C_1 A C_2 \backsim \Delta C_2 AB, \quad \Delta C_2 A C_3 \backsim \Delta C_3 AB \text{ u. s. w.},$$

und wäre zu den Gleichungen:

$$t_2 = \frac{a_1 . t_1 . c}{c^2 - t_1^2}, \quad t_3 = \frac{a_2 . t_2 . c}{c^2 - t_2^2}, \ldots . \; t_n = \frac{a_{n-1} . t_{n-1} . c}{c^2 - t_{n-1}^2}, \ldots .$$

$$a_2 = \frac{a_1 . c^2}{c^2 - t_1^2}, \quad a_3 = \frac{a_2 . c^2}{c^2 - t_2^2}, \ldots . \; a_n = \frac{a_{n-1} . c^2}{c^2 - t_{n-1}^2}, \ldots .$$

gelangt.

§. 4.

Die Gleichungen in (15) stimmen mit den Gleichungen in (1) überein; es werden also auch für die Grössen in (15) alle die Gleichungen gelten, die wir in §. 1. 2. ermittelt, insbesondere die Gleichungen (7)—(14). — In den nun folgenden Anwendungen der vorhergehenden Sätze wird die erste Transversale nicht mehr beliebig gezogen, wir nehmen als erste Transversale entweder die Seite AC oder deren Verlängerung über A, so dass im Allgemeinen t_1 in b, a_1 in a übergehen wird. In dem Falle, wo die erste Transversale in der Verlängerung von AC liegt, ist nach dem vorher Gesagten t_1, d. h. b negativ zu nehmen. Ist in einem Dreiecke ABC der Winkel $BAC = n . ABC$, wobei n eine ganze Zahl ist, und man wendet auf diesen Winkel das Verfahren in §. 3. an, so wird $t_n = a_n$, d. h. $F_n = 0$. F_n aber wird $= 0$, so wie $Z_n = 0$ ist. Setzt man also in den Gleichungen (7)—(10) $Z_n = 0$, so drückt die dadurch erhaltene Gleichung aus, in welcher Abhängigkeit sich die Seiten eines Dreiecks von einander befinden, in dem der Gegenwinkel von a das $n$fache des Gegenwinkels von b ist. Allein dieselbe Gleichung gilt auch für die Seiten eines Dreiecks, in dem zwischen α, β den Gegenwinkeln von a, b die Gleichung

$$\alpha + 4m . R = n . \beta$$

gilt, wenn nur m, n absolute ganze Zahlen sind. Denn beschreibt

Digitized by Google

man in der vorigen Figur um A und B Kreise mit gleichem Radius, trägt von γ aus, dem Punkte, in dem die Peripherie AC trifft, einen Bogen $\gamma\gamma_1$, der den Winkel ABC misst, wiederholt auf, so kann man bei dem Auftragen des Bogens mehrmals die Kreisperipherie zurückgelegt haben, es ist, so wie $\gamma_n\delta$ (δ ist der Punkt, in dem AB die Peripherie trifft) $=\gamma\gamma_1$ wird, $\Delta\, AC_nB$ gleichschenklig; also $AC_n = C_nB$ und F_n wie $Z_n = 0$. Somit erhält man folgenden Satz:

> Sind α, β zwei Winkel eines Dreiecks, für welche die Gleichung $\alpha + 4m.R = n.\beta$ gilt, worin m, n absolute ganze Zahlen sind, m auch 0 sein kann, so drückt die Gleichung $Z_n=0$ [(7)—(10)] die Abhängigkeit aus, die zwischen den Seiten a, b, c dieses Dreiecks statt findet, wenn man in der Gleichung t_1 mit b, a_1 mit a vertauscht.

§. 5.

Den Winkel ABC kann man auch statt an AC an die Verlängerung von AC wiederholt anlegen; ist

$$\alpha + 2R = n.\beta, \text{ so wird } t_n = a_n, \text{ also } Z_n = 0.$$

Aber auch, wenn durch das $n$malige Anlegen des Winkels β oder durch das Auftragen des ihn messenden Bogens die um A construirte Kreisperipherie wiederholt durchlaufen ist, es wird, wenn

$$\alpha + 2R + 4mR = n.\beta \text{ ist, } t_n = a_n, \text{ also } Z_n = 0 \text{ sein.}$$

Demnach ergiebt sich noch folgender Satz:

> Sind α, β zwei Winkel eines Dreiecks, für welche die Gleichung $\alpha + 2(2m+1)R = n.\beta$ gilt, worin m, n absolute ganze Zahlen sind, m aber auch 0 sein kann, so drückt die Gleichung $Z_n = 0$ [(7) — (10)] die Abhängigkeit aus, die zwischen den Seiten a, b, c dieses Dreiecks statt findet, wenn man in der Gleichung t_1 mit $-b$, a_1 mit a vertauscht.

§. 6.

Zählt man die Seite eines regulären n-Ecks mit zu seinen Diagonalen, so hat das Vieleck, je nachdem n gerade oder ungerade ist, $\frac{1}{2}n$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ an Grösse verschiedene Diagonalen, deren kleinste die Seite selbst ist. Denkt man um das Vieleck einen Kreis beschrieben, so kann man die Diagonalen als Seh-

Digitized by Google

nen betrachten, die zu Bogen gehören $=\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots$ der Kreisperipherie; man bezeichne die Sehnen respective mit $x_1, x_2, x_3, \ldots$, so dass x_m die Sehne ist, deren kleinerer zu ihr gehöriger Bogen $=\frac{m}{n}$ der Kreisperipherie ist. Ist $m > \frac{n}{2}$, so ist statt x_m stets x_{n-m} zu setzen. Die $p$te Diagonale eines regulären n-Ecks ist also x_p; die Diagonalen sind gerade oder ungerade, je nachdem die Zeiger gerade oder ungerade sind.

Verbindet man drei Ecken eines regulären n-Ecks durch Gerade, und ist x_m eine Seite des dadurch entstandenen Dreiecks, so ist der Gegenwinkel der Seite $=\frac{2m}{n}R$ oder $=\frac{2(n-m)}{n}R$. Sind x_m, x_p, x_r die Seiten eines solchen Dreiecks, was nur geschehen kann, wenn entweder $m+p+r=n$ oder etwa $m=p+r$ ist, so lassen sich die Winkel des Dreiecks bestimmen; so wie zwischen zweien derselben eine der in den §§. 4., 5. erwähnten Gleichungen statt findet (offenbar hat man dabei nur unbestimmte Gleichungen ersten Grades zwischen m, p, r und μ, ν zu beachten, wenn man μ, ν statt der Grössen m, n in den §§. 4. und 5 setzt), so hat man in der Gleichung $Z_\nu=0$ eine Gleichung zwischen diesen drei Diagonalen des Vielecks. Die Untersuchung über solche Dreiecke lassen wir aber hier bei Seite und betrachten im Folgenden nur gleichschenklige Dreiecke, deren Basis eine der Diagonalen des Vielecks, deren gleiche Seiten Radien des um das Vieleck beschriebenen Kreises sind. Da aber in diesen Fällen nur die Gleichungen (11)—(14) zur Anwendung kommen, die besonders im Falle, dass $Z_n=0$ gesetzt wird, eine einfachere Gestalt annehmen, so wollen wir diese zuerst suchen.

Wird in (11) $Z_{2n}=0$ gesetzt, so lässt sich die Gleichung, wenn man b, a statt t_1, a_1 setzt, wie folgt schreiben:

(16)

$$Z_{2n} = \sum_0^n m[(-1)^m.(2n-m)_m.a^{2m}.b^{2n-2m}]$$
$$-\sum_1^n m[(-1)^m.(2n-m)_{m-1}.a^{2m-1}.b^{2n-2m+1}] = 0.$$

Statt (12) erhält man:

(17)

$$Z_{2n+1} = \sum_0^n m[(-1)^m.(2n-m+1)_m.a^{2m}.b^{2n-2m+1}]$$
$$-\sum_0^n m[(-1)^m.(2n-m)_m.a^{2m+1}.b^{2n-2m}] = 0.$$

Digitized by Google

Was die Gleichungen (13) und (14) betrifft, so lassen sich in ihnen die Grenzen, zwischen denen sich m bewegen kann, enger ziehen. Es wird $(n-m)_m = 0$, so wie $n < 2m$ wird; ist also $n = 2\nu$, so kann m in der Gleichung (13) nur die Werthe 0, 1, 2, 3, ... ν annehmen; ist $n = 2\nu + 1$, so ist $\nu + 1$ der Grenzwerth, den m nicht übersteigen kann. Beachtet man noch den allen Gliedern gemeinsamen Factor, mit dem man zu dividiren hat, weil der Ausdruck $=0$ ist, so geht (13), je nachdem n gerade oder ungerade ist, über in:

(18)

$$Z_{2\cdot 2n} = \sum_0^n m \{(-1)^m . [(2n-m+1)_m + (2n-m)_{m-1}] . a^{2n-2m} . b^{2m}\} = 0,$$

(19)

$$Z_{2(2n-1)} = \sum_0^n m \{(-1)^m . [(2n-m)_m + (2n-m-1)_{m-1}] . a^{2n-2m} . b^{2m}\} = 0.$$

Auf gleiche Weise erhält man aus (14) die Gleichung:

(20)

$$Z_{2n+1} = \sum_0^{\frac{1}{2}(n+1)} m [(-1)^m . (n+1-m)_m . a^{n-2m+1} . b^{2m}]$$

$$- \sum_0^{\frac{1}{2}(n+1)} m [(-1)^m . (n-m)_m . a^{n-2m} . b^{2n+1}] = 0.$$

§. 7.

Es sei B Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius r, in demselben sei x_p die $p$te Diagonale eines regulären n-Ecks $= AC$, man ziehe BA, BC, so entsteht ein Dreieck ABC, in dem $\beta = \frac{4p}{n} R$, $\alpha = \gamma = \frac{n-2p}{n} R$ ist; soll für dieses Dreieck der Satz in §. 4. Anwendung finden, so muss sich m, s ganzzahlig so bestimmen lassen, dass

$$4m + \frac{n-2p}{n} = \frac{4p.s}{n} \quad \text{oder} \quad 4m+1 = \frac{2p(2s+1)}{n}$$

ist. Dazu ist also erforderlich, dass n eine gerade Zahl $= 2\nu$ sei; ist dieses der Fall, so erhält man als Bedingungsgleichung:

$$(4m+1).\nu = p.(2s+1). \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (A)$$

Ist also ν eine ungerade Zahl, so ist die Gleichung (A) er-

Digitized by Google

füllt, wenn man $s = \frac{\nu - 1}{2}$, $p = 4m + 1$ (m kann jede ganze Zahl sein) setzt; $Z_{\frac{\nu-1}{2}} = 0$ wäre also die Gleichung, die zwischen x_p, d. h. einer $(4m+1)$ten Diagonale des regulären 2ν-Ecks und dem Radius des umschriebenen Kreises gilt. Ist ν eine Primzahl, so giebt es für s keinen kleinern Werth als den genannten, durch den die Gleichung (A) zu erfüllen wäre; ist ν ungerade, aber keine Primzahl, so wird es für einzelne Werthe von p (aber der Werth $p = 1$ gehört nie dazu) möglich sein, der Gleichung (A) auch durch kleinere Werthe von s zu genügen. — Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

> Setzt man in der Gleichung $Z_n = 0$ ((16), (17)) x, r an die Stelle von b, a, so giebt die so erhaltene Gleichung die Abhängigkeit an, die stattfindet zwischen jeder $(4m+1)$ten Diagonale (also auch der Seite) x des regulären $2(2n+1)$-Ecks und dem Radius r des umschriebenen Kreises.

Soll auf dasselbe Dreieck ABC der Satz in §. 5. angewendet werden, so ist zu untersuchen, ob sich m, s ganzzahlig so bestimmen lassen, dass durch diese Werthe der Gleichung

$$2(2m+1) + \frac{n-2p}{n} = \frac{4p.s}{n}$$

genügt wird. Damit dieses der Fall sei, muss n gerade $= 2\nu$ sein, dann erhält man die Gleichung:

$$(4m+3).\nu = p.(2s+1). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (B)$$

Ist also ν eine ungerade Zahl, so ist (B) erfüllt durch $s = \frac{\nu - 1}{2}$, $p = 4m + 3$ (m kann jede ganze Zahl sein). Beachtet man das über Gleichung (A) Gesagte und §. 5., so ergiebt sich folgender Satz:

> Vertauscht man in den Gleichungen (16), (17) b mit $-x$, a mit r, so giebt die so erhaltene Gleichung $Z_n = 0$ die Abhängigkeit an, die statt findet zwischen jeder $(4m+3)$ten Diagonale x des regulären $2(2n+1)$-Ecks und dem Radius r des umschriebenen Kreises.

Die beiden letzten Sätze lassen sich offenbar zu folgendem Satze vereinigen:

> Vertauscht man in den Gleichungen (16), (17) b mit x, a mit r, sucht die Wurzeln der so erhaltenen Gleichung

$Z_n = 0$, so finden sich unter den positiven Wurzeln die sämmtlichen $(4m+1)$ten Diagonalen des regulären $2(2n+1)$-Ecks, unter den negativen Wurzeln aber befinden sich, wenn man dieselben mit entgegengesetztem Vorzeichen versieht, sämmtliche $(4m+3)$te Diagonalen dieses Vielecks.

Ein reguläres $2(2n+1)$-Eck hat, wenn man vom Durchmesser des Kreises als Diagonale absieht (bei diesem als Basis erhält man kein Dreieck, kann also die Sätze aus §. 4. und §. 5. nicht anwenden), $2n$ an Grösse verschiedene Diagonalen, davon haben n gerade Zeiger, die andern n ungerade Zeiger. Die Gleichung $Z_n = 0$ [(16), (17)] ist in Bezug auf x vom Grade n; da sich unter den Wurzeln der Gleichung alle Diagonalen mit ungeradem Zeiger finden müssen, so sind alle Wurzeln der Gleichung reell. Hieraus ergiebt sich der Satz:

Sucht man die Wurzeln der Gleichungen:

(21)

$$Z_{2n} = 0 = V_{2(4n+1)} = \sum_0^n {}_m [(-1)^m . (2n-m)_m . r^{2m} . x^{2n-2m}]$$
$$- \sum_1^n {}_m [(-1)^m . (2n-m)_{m-1} . r^{2m-1} . x^{2n-2m+1}],$$

$$Z_{2n+1} = 0 = V_{2(4n+3)} = \sum_0^n {}_m [(-1)^m . (2n-m+1)_m . r^{2m} . x^{2n-2m+1}]$$
$$- \sum_0^n {}_m [(-1)^m . (2n-m)_m . r^{2m+1} . x^{2n-2m}],$$

so sind dieselben sämmtlich reell; ordnet man die positiven Wurzeln der absoluten Grösse nach, so erhält man dadurch die 1, 5, 9, ... $(4m+1)$te Diagonale des regulären $2(4n+1)$- [resp. $2(4n+3)$]-Ecks; giebt man den negativen Wurzeln das Vorzeichen $+$, ordnet sie dann ebenfalls der Grösse nach, so erhält man dadurch die Werthe für die 3, 7, 11, ... $(4m+3)$te Diagonale desselben Vielecks.

Gleichungen der regulären $2(2n+1)$-Ecke.

6-Eck: $x - r = 0$,

10-Eck: $x^2 + xr - r^2 = 0$,

14-Eck: $x^3 - x^2r - 2xr^2 + r^3 = 0$,

18-Eck: $x^4 + x^3r - 3x^2r^2 - 2xr^3 + r^4 = 0$,

22-Eck: $x^5 - x^4r - 4x^3r^2 + 3x^2r^3 + 3xr^4 - r^5 = 0$,

Digitized by Google

26-Eck: $x^6+x^5r-5x^4r^2-4x^3r^3+6x^2r^4+3xr^5-r^6=0,$

30-Eck: $x^7-x^6r-6x^5r^2+5x^4r^3+10x^3r^4-6x^2r^5-4xr^6+r^7=0,$

34-Eck: $x^8+x^7r-7x^6r^2-6x^5r^3+15x^4r^4$
$$+10x^3r^5-10x^2r^6-4xr^7+r^8=0,$$

38-Eck: $x^9-x^8r-8x^7r^2+7x^6r^3+21x^5r^4-15x^4r^5$
$$-20x^3r^6+10x^2r^7+5xr^8-r^9=0,$$

42-Eck: $x^{10}+x^9r-9x^8r^2-8x^7r^3+28x^6r^4$
$$+21x^5r^5-35x^4r^6-20x^3r^7+15x^2r^8+5xr^9-r^{10}=0.$$

u. s. w.

§. 8.

Die Frage, in welchen Fällen für einzelne Diagonalen eines regulären $2(2n+1)$-Ecks einfachere Gleichungen gelten als die in §. 7. gefundenen, tritt in dem Falle auf, wo $2n+1$ keine Primzahl ist. Ist $2n+1=m.s$, wo m wie s ungerade Zahlen sind, die zunächst keinen gemeinsamen Factor haben mögen, so werden sich sämmtliche Diagonalen des $2m$- wie des $2s$-Ecks als Diagonalen des $2(2n+1)$-Ecks, also auch die ungeraden Diagonalen der ersten Vielecke als ungerade Diagonalen des $2(2n+1)$-Ecks finden. In dem Falle nun, dass m, s beides Zahlen von der Form $4\mu+1$ sind, ist die $s$te Diagonale des $2(2n+1)$-Ecks die Seite, also erste Diagonale des $2m$-Ecks; ebenso ist jede $(4\nu\pm1).s$te Diagonale des $2(2n+1)$-Ecks die $(4\nu\pm1)$te Diagonale des $2m$-Ecks. Beachtet man, dass die Gleichung (21) alle ungeraden Diagonalen des betreffenden Vielecks als Wurzeln enthält, sonst keine andern, so ergiebt sich aus den vorstehenden Betrachtungen und ähnlichen für den Fall, dass entweder m oder s oder beide von der Form $4\mu+3$ sind, folgender Satz, zu dessen Verständniss noch zu beachten ist, dass unter umgewandelter Gleichung eines Vielecks die Gleichung verstanden wird, die man aus der Gleichung des Vielecks dadurch erhält, dass man darin $-x$ statt x setzt:

> Ist $2n+1=m.s$ (es haben m, s keinen Factor gemein) und es sind m und s beide von der Form $4\mu+1$, so enthält die Gleichung des regulären $2(2n+1)$-Ecks (21) als Factor sowohl die Gleichung des $2m$-, wie des $2s$-Ecks; sind m und s beide von der Form $4\mu+3$, so enthält die Gleichung des $2(2n+1)$-Ecks die umgewandelte Gleichung des $2m$-, wie des $2s$-Ecks als Factor; ist

m von der Form $4\mu+1$, s von der Form $4\mu+3$, so enthält die Gleichung des $2(2n+1)$-Ecks als Factor die Gleichung des $2s$-Ecks und die umgewandelte Gleichung des $2m$-Ecks.

Im Wesentlichen ändert sich die Sache nicht, wenn m und s einen Factor gemeinsam haben; ist z. B. $2n+1=\mu^2.m.s$, so ist immer noch jede $(4\nu\pm1)\mu.m$te Diagonale des $2(2n+1)$-Ecks die $(4\nu\pm1)$te Diagonale des $2\mu.s$-Ecks; es wird sich also in der Gleichung des $2(2n+1)$-Ecks entweder die wirkliche oder die umgewandelte Gleichung des $2\mu.s$-Ecks, wie die des $2\mu.m$-Ecks als Factor finden, nur darf man daraus nicht schliessen, dass das Produkt beider Gleichungen sich als Factor in der Gleichung des $2(2n+1)$-Ecks finden werde.

Beispiele. Wir setzen den Radius $=1$. In der Gleichung des 18-Ecks ist die umgewandelte des 6-Ecks enthalten, sie ist:

$$=(x+1)(x^3-3x+1)=0.$$

In der Gleichung des 30-Ecks findet sich die des 6- und die umgewandelte des 10-Ecks; sie ist:

$$=(x-1)(x^2-x-1)(x^4+x^3-4x^2-4x+1)=0.$$

In der Gleichung des 42-Ecks findet sich die umgewandelte des 6- und des 14-Ecks; sie ist:

$$=(x+1)(x^3+x^2-2x-1)(x^6-x^5-6x^4+6x^3+8x^2-8x-1)=0.$$

In der Gleichung des 50-Eck findet sich die des 10-Ecks; es ist:

$$x^{12}+x^{11}-11x^{10}-10x^9+45x^8+36x^7-84x^6-56x^5+70x^4+35x^3$$
$$-21x^2-6x+1=0$$
$$=(x^2+x-1).(x^{10}-10x^8+35x^6+x^5-50x^4-5x^3+25x^2+5x-1).$$

In der Gleichung des 70-Ecks ist die Gleichung des 14- und die umgewandelte des 10-Ecks enthalten; es ist:

$$x^{17}-x^{16}-16x^{15}+15x^{14}+105x^{13}-91x^{12}-364x^{11}+286x^{10}+715x^9$$
$$-495x^8-792x^7+462x^6+462x^5-210x^4-120x^3+36x^2+9x-1$$
$$=0=(x^2-x-1)(x^3-x^2-2x+1)$$
$$\times(x^{12}+x^{11}-12x^{10}-11x^9+54x^8+43x^7-113x^6-71x^5+110x^4$$
$$+46x^3-40x^2-8x+1).$$

In der Gleichung des 90-Ecks finden sich die Gleichungen des

Digitized by Google

10- und 18-Ecks, die umgewandelten des 6- und 30-Ecks; soll aber die Gleichung des 90-Ecks als Produkt dargestellt werden, so ergiebt sich:

$$x^{22}+x^{21}-21x^{20}-20x^{19}+190x^{18}+171x^{17}-969x^{16}-816x^{15}+3060x^{14}$$
$$+2380x^{13}-6188x^{12}-4368x^{11}+8008x^{10}+5005x^{9}-6435x^{8}-3432x^{7}$$
$$+3003x^{6}+1287x^{5}-715x^{4}-220x^{3}+66x^{2}+11x-1$$
$$=(x+1)(x^{2}+x-1)(x^{3}-3x+1)(x^{4}-x^{3}-4x^{2}+4x+1)$$
$$\times(x^{12}-12x^{10}-x^{9}+54x^{8}+9x^{7}-112x^{6}-27x^{5}+105x^{4}+31x^{3}$$
$$-36x^{2}-12x+1)=0,$$

u. s. w.

Ist in der Gleichung eines $2(4n+1)$-Ecks die Gleichung eines $2(4m+1)$-Ecks als Factor enthalten, so ist der Quotient, den man erhält, wenn man die erste Gleichung durch die zweite dividirt, nach den allgemeinen Gleichungen in (21):

$$x^{2(n-m)}-2(n-m).x^{2(n-m-1)}-\ldots.=0;$$

ist in der Gleichung eines $2(4n+1)$-Ecks die umgewandelte eines $2(4m+3)$-Ecks enthalten, so ist der Quotient:

$$x^{2(n-m)-1}-[2(n-m)-1].x^{2(n-m)-3}+\ldots.=0;$$

in beiden Fällen also ist der Coefficient des zweiten Gliedes, der gleich der negativen Summe aller Wurzeln der Gleichung ist, $=0$; mithin ist in solchen Vielecken stets die Summe einer Anzahl von ungeraden Diagonalen gleich der Summe einer andern Anzahl von Diagonalen. Die Sache verhält sich ebenso, wenn sich in der Gleichung eines $2(4n+3)$-Ecks die Gleichung eines $2(4m+3)$-Ecks oder die umgewandelte eines $2(4m+1)$-Ecks als Factor findet. Mithin ist im regulären 18-Eck: $x_1+x_5=x_7$; im regulären 30-Eck: $x_1+x_9+x_{13}=x_7+x_{11}$; u. s. w.

§. 9.

Es sei A Mittelpunkt eines Kreises, $BC=x_p$ sei in ihm die $p$te Diagonale eines regulären n-Ecks; zieht man AB, AC, so ist:

$$\alpha=\frac{4p}{n}R;\quad \beta=\gamma=\frac{n-2p}{n}R;$$

soll auf dieses Dreieck der Satz in §. 4. angewendet werden, so müssen sich m, s ganzzahlig so bestimmen lassen, dass

Digitized by Google

$$4m + \frac{4p}{n} = \frac{s(n-2p)}{n} \quad \ldots\ldots\ldots (A)$$

sei. Ist nun n zunächst eine ungerade Zahl, so ist (A) nur lösbar, wenn s durch 4 theilbar ist. Man setze also $s = 4\sigma$ und erhält:

$$p(2\sigma+1) = (\sigma - m).n, \quad \ldots\ldots\ldots (B)$$

eine Gleichung, die jedenfalls erfüllt ist, wenn man $\sigma = \frac{1}{2}(n-1)$, $p = \sigma - m$ setzt; somit kann p jede ganze Zahl $=$ oder $< \sigma$ sein. Die Gleichung $Z_{4\sigma} = 0$ (18) wäre also Gleichung für die Seite und Diagonalen des regulären $(2\sigma+1)$-Ecks; da die grösste Diagonale eines solchen Vielecks x_σ ist, so enthält $Z_{4\sigma} = 0$ unter seinen Wurzeln alle Diagonalen des regulären $(2\sigma+1)$-Ecks. Haben p und n einen gemeinsamen Factor, so wird sich für gewisse Werthe von p (aber der Werth $p = 1$ gehört nicht dazu) allerdings ein kleinerer Werth von s finden lassen, der der Gleichung (A) genügt. Somit erhält man den Satz:

Sucht man die Wurzeln der Gleichung:

$$Z_{4n} = V_{2n+1}$$
$$= \sum_0^n m \{(-1)^m[(2n-m+1)_m + (2n-m)_{m-1}].x^{2n-2m}.r^{2m}\} = 0,$$

so finden sich unter denselben die Werthe aller Diagonalen, also auch der Seite des regulären $(2n+1)$-Ecks.

Gleichungen der regulären $(2n+1)$-Ecke; Radius $=1$.

3-Eck: $x^2 - 3 = 0,$

5-Eck: $x^4 - 5x^2 + 5 = 0,$

7-Eck: $x^6 - 7x^4 + 14x^2 - 7 = 0,$

9-Eck: $x^8 - 9x^6 + 27x^4 - 30x^2 + 9 = 0,$

11-Eck: $x^{10} - 11x^8 + 44x^6 - 77x^4 + 55x^2 - 11 = 0,$

13-Eck: $x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 156x^6 + 182x^4 - 91x^2 + 13 = 0,$

15-Eck: $x^{14} - 15x^{12} + 90x^{10} - 275x^8 + 450x^6 - 378x^4 + 140x^2 - 15 = 0,$

17-Eck: $x^{16} - 17x^{14} + 119x^{12} - 442x^{10} + 935x^8 - 1122x^6 + 714x^4 - 204x^2 + 17 = 0,$

u. s. w.

Ist n in der obigen Gleichung (A) eine gerade Zahl, etwa $= 2\nu$, so geht (A) über in:

$$4m + \frac{2p}{\nu} = \frac{s(\nu - p)}{\nu}, \quad \ldots\ldots\ldots (C)$$

Digitized by Google

d. h. entweder ist s gerade oder ν und p sind ungerade. Bei der letztern Annahme gelangt man zu den Gleichungen in (21), bei der erstern, wo $s=2\sigma$ gesetzt wird, ist $p(\sigma+1)=\nu(\sigma-2m)$, und diese Gleichung ist erfüllt, wenn man $\nu=\sigma+1$, $p=\sigma-2m$ nimmt, d. h. man erhält den Satz:

Sucht man die Wurzeln der Gleichung

$$Z_{2(2n-1)} = V_{4n}$$
$$=\sum_0^n m\{(-1)^m[(2n-m)_m+(2n-m-1)_{m-1}].x^{2n-2m}.r^{2m}\}=0,$$

so befinden sich darunter die Werthe aller ungeraden Diagonalen des regulären $4n$-Ecks.

Gleichungen der regulären $4n$-Ecke; Radius $=1$.

4-Eck: $x^2-2=0$,
8-Eck: $x^4-4x^2+2=0$,
12-Eck: $x^6-6x^4+9x^2-2=0$,
16-Eck: $x^8-8x^6+20x^4-16x^2+2=0$,
20-Eck: $x^{10}-10x^8+35x^6-50x^4+20x^2-2=0$,
u. s. w.

Aus den Gleichungen in §. 7. und §. 9. lassen sich leicht Gleichungen finden, die zwischen bestimmten Diagonalen eines regulären Vielecks gelten, denn im regulären $2n$-Ecke ist das Dreieck, dessen Basis x_p, dessen gleiche Seiten Radien sind, ähnlich einem Dreiecke, dessen Basis x_{2p}, dessen gleiche Seiten x_{n-p} sind.

Im Folgenden beschäftigen wir uns nur mit den regulären $2(2n+1)$-Ecken; sind die Diagonalen eines solchen Vielecks gefunden, so sind auch die Diagonalen des $(2n+1)$-, $4(2n+1)$-, $8(2n+1)$-, ... Ecks bestimmt.

§. 10.

Zu den Gleichungen in (21) kann man noch auf eine andere Weise gelangen. Setzt man in der Gleichung

$$x^{2n}+x^{2n-1}+x^{2n-2}+....+x^2+x+1=0,$$

d. h. in
$$\frac{x^{2n+1}-1}{x-1}=0$$

den Werth $x+\frac{1}{x}=y$ ein, so ergiebt sich:

Digitized by Google

$$[y^n-(n-1)_1.y^{n-2}+(n-2)_2.y^{n-4}-(n-3)_3.y^{n-6}+(n-4)_4.y^{n-8}-....]$$
$$+[y^{n-1}-(n-2)_1.y^{n-3}+(n-3)_2.y^{n-5}-(n-4)_3.y^{n-7}+....]=0.$$

Der allgemeine Beweis für diese Umformung ist gewiss schon anderweit geführt, wenngleich dem Verfasser nur der Beweis für die ersten Glieder aus Eytelwein: „Anweisung zur Auflösung der höhern num. Gleichungen pp. 22. 23. bekannt ist; übrigens hat der allgemeine Beweis keine Schwierigkeit. Die umgeformte Gleichung lässt sich aber auch

$$\sum_0^{\frac{1}{2}n} m[(-1)^m.(n-m)_m.y^{n-2m}]+\sum_0^{\frac{1}{2}(n-1)} m[(-1)^m.(n-m-1)_m.y^{n-2m-1}]=0$$

schreiben; setzt man hierin $2n$ an die Stelle von n, so ergiebt sich:

$$\sum_0^{n} m[(-1)^m.(2n-m)_m.y^{2n-2m}]+\sum_0^{n-1} m[(-1)^m.(2n-m-1)_m.y^{2n-2m-1}]=0$$

oder:

(22)

$$\sum_0^{n} m[(-1)^m.(2n-m)_m.y^{2n-2m}]-\sum_1^{n} m[(-1)^m.(2n-m)_{m-1}.y^{2n-2m+1}]=0,$$

d. h. die erste Gleichung in (21), wenn man darin $r=1$ setzt.

Ebenso geht die Gleichung

$$x^{2n}-x^{2n-1}+x^{2n-2}-x^{2n-3}+....+x^2-x+1=0 \quad \text{oder} \quad \frac{x^{2n+1}+1}{x+1}=0$$

über in:

$$\sum_0^{\frac{1}{2}n} m[(-1)^m.(n-m)_m.y^{n-2m}]-\sum_0^{\frac{1}{2}(n-1)} m[(-1)^m.(n-m-1)_m.y^{n-2m-1}]=0,$$

und setzt man hierin $2n+1$ statt n, so erhält man:

(23)

$$\sum_0^{n} m[(-1)^m.(2n+1-m)_m.y^{2n+1-2m}]-\sum_0^{n} m[(-1)^m.(2n-m)_m.y^{2n-2m}]=0,$$

d. h. es ergiebt sich die zweite Gleichung in (21), wenn man darin $r=1$ setzt.

Wird also der Radius des Kreises $=1$ gesetzt, so erhält man die Gleichung des regulären $2(4n+1)$-Ecks aus der Gleichung $\frac{x^{4n+1}-1}{x-1}=0$, die Gleichung des regu-

Digitized by Google

2(4n + 3)-Ecks aus der Gleichung $\frac{x^{4n+3}+1}{x+1}=0$, wenn man in denselben $x+\frac{1}{x}=y$ setzt; d. h. ein beliebiger stets imaginärer Wurzelwerth dieser Gleichung plus dem umgekehrten Werthe dieses Wurzelwerthes giebt die Grösse einer ungeraden Diagonale des regulären 2(4n + 1)- resp. 2(4n + 3)-Ecks, entweder mit dem Vorzeichen + oder — versehen.

§. 11.

Die Gleichung

$$x^{4n}+x^{4n-1}+x^{4n-2}+x^{4n-3}+\ldots+x^2+x+1=0$$

bleibt unverändert, wenn man darin $x=\sqrt{z}$ einsetzt, d. h. die neue Gleichung hat dieselben Wurzeln als die gegebene. Ist also α irgend eine Wurzel der Gleichung, so ist auch α^2 eine Wurzel derselben. Nimmt man nun $\alpha+\frac{1}{\alpha}=y_1$, $\alpha^2+\frac{1}{\alpha^2}=y_2$ [y_1, y_2 sind alsdann Wurzeln der Gleichung (22)], so folgt aus beiden Gleichungen $y_1{}^2=2+y_2$, d. h. es sind die Wurzeln der Gleichung (22) von der Beschaffenheit, dass das Quadrat jeder Wurzel gleich ist 2 plus einer andern Wurzel, die Wurzel natürlich versehen mit dem zugehörigen Vorzeichen.

Wird in der Gleichung

$$x^{4n+2}-x^{4n+1}+x^{4n}-x^{4n-1}+\ldots+x^2-x+1=0$$

$\sqrt{z}$ an die Stelle von x gesetzt, so erhält man eine Gleichung, deren Wurzeln man aus den Wurzeln der gegebenen erhält, wenn man letztere mit —1 multiplicirt; ist also α eine Wurzel der Gleichung, so ist auch $-\alpha^2$ eine Wurzel derselben. Setzt man nun in dieser Gleichung $\alpha+\frac{1}{\alpha}=y_1$; $-\alpha^2-\frac{1}{\alpha^2}=y_2$ [y_1, y_2 sind alsdann Wurzeln der Gleichung (23)], so folgt aus beiden Gleichungen $y_1{}^2=2-y_2$, d. h. die Wurzeln der Gleichung (23) sind von der Beschaffenheit, dass das Quadrat jeder Wurzel gleich ist 2 minus einer andern Wurzel derselben Gleichung.

Beachtet man, dass die Wurzeln der Gleichung (22) die ungeraden Diagonalen des regulären 2(4n + 1)-Ecks, die der Gleichung (23) die ungeraden Diagonalen des 2(4n + 3)-Ecks sind, theils versehen mit dem Vorzeichen +, theils mit dem Vorzeichen —, so ergiebt sich folgender Satz:

Digitized by Google

Die ungeraden Diagonalen eines regulären $2(4n+1)$-Ecks haben die Eigenschaft, dass das Quadrat jeder derselben gleich ist 2 plus einer andern ungeraden Diagonale des Vielecks; bei den ungeraden Diagonalen eines regulären $2(4n+3)$-Ecks aber ist das Quadrat jeder derselben gleich 2 minus einer andern ungeraden Diagonale des Vielecks.

Natürlich ist hierbei der Radius des umschriebenen Kreises $=1$ gesetzt und jede Diagonale, deren Zeiger von der Form $4\mu+3$ ist, als negativ genommen.

§. 12.

Bezeichnet man mit x_1, x_3, x_5, x_7, ... x_{4n-1} die erste, dritte, fünfte, ... $(4n-1)$te Diagonale eines regulären $2(4n+1)$-Ecks, wobei also x_3, x_7, x_{11}, ... x_{4n-1} negativ sind, so ist x_1 der absolut kleinste Wurzelwerth der Gleichung (22), x_1^2 ist also der kleinste der Werthe, die man erhält, wenn man die Quadrate der ungeraden Diagonalen sucht; unter den negativen Diagonalen ist die absolute grösste x_{4n-1}, also muss nach §. 11. $x_1^2=2+x_{4n-1}$ sein; auf ähnliche Weise findet sich:

$$x_3^2=2+x_{4n-5}; \quad x_5^2=2+x_{4n-9}; \ \ldots.$$

allgemein:

$$x_{2m+1}^2=2+x_{4(n-m)-1},$$

eine Gleichung die richtig ist, so lange $n>m$ ist; wird $m=n-1$, so ist $x_{2n-1}^2=2+x_3$; folglich ist:

$$x_{2n+1}^2=2+x_1; \ x_{2n+3}^2=2+x_5; \ \ldots. \ x_{2n+2m+1}^2=2+x_{4m+1}.$$

Setzt man in der letzten Gleichung $m=\mu-n$, so ergiebt sich:

$$x_{2m+1}^2=2+x_{4(m-n)+1}.$$

Allgemein geben also die Gleichungen:

$$x_{2m+1}^2=2+x_{4(n-m)-1} \text{ und } x_{2m+1}^2=2+x_{4(m-n)+1},$$

erstere geltend, wenn $n>m$, letztere wenn $n=$ oder $<m$ ist, an welche Diagonale man zu 2 zu addiren habe um das Quadrat der Diagonale x_{2m+1} desselben Vielecks zu erhalten.

Sind x_1, x_3, x_5, ... x_{4n+1} die ungeraden Diagonalen eines regulären $2(4n+3)$-Ecks (x_3, x_7, ... x_{4m+3} also negativ) so zeigt sich auf gleiche Weise, dass

Digitized by Google

$$x_{2m+1}^2 = 2 - x_{4(n-m)+1}$$

(gilt wenn $n =$ oder $> m$) und

$$x_{2m+1}^2 = 2 - x_{4(m-n)-1}$$

(gilt wenn $n < m$ ist) die entsprechenden Gleichungen sind.

§. 13.

Bringt man die ungeraden Diagonalen eines regulären Vielecks in eine solche Reihenfolge, dass jedes Glied der Reihe in's Quadrat erhoben gleich ist 2 plus (respect. minus) dem folgenden Gliede, so heisst diese Reihe die Periode der ungeraden Diagonalen. — Man findet bald, dass die ungeraden Diagonalen einzelner Vielecke mehrere Perioden bilden. — Im folgenden sind die Perioden der ungeraden Diagonalen einer Anzahl von Vielecken verzeichnet; es sind dabei die Diagonalen nur mit ihren Zeigern bezeichnet.

Per. des reg. 10-Ecks: 1. 3. 1.

Per. des reg. 26-Ecks: 1. 11. 9. 5. 3. 7. 1.

Per. des reg. 34-Ecks. Per. I. 1. 15. 13. 9. 1. Per. II. 3. 11. 5. 7. 3.

Per. des reg. 82-Ecks. Per. I. 1. 39. 37. 33. 25. 9. 23. 5. 31. 21. 1. Per. II. 3. 35. 29. 17. 7. 27. 13. 15. 11. 19. 3.

Per. des reg. 146-Ecks. Per. I. 1. 71. 69. 65. 57. 41. 9. 55. 37. 1. Per. II. 3. 67. 61. 49. 25. 23. 27. 19. 35. 3. Per. III. 5. 63. 53. 33. 7. 59. 45. 17. 39. 5. Per. IV. 11. 51. 29. 15. 43. 13. 47. 21. 31. 11.

Per. des reg. 514-Ecks. Per. I. 1. 255. 253. 249. 241. 225. 193. 129. 1. Per. II. 9. 239. 221. 185. 113. 31. 195. 133. 9. Per. III. 11. 235. 213. 169. 81. 95. 67. 123. 11. Per. IV. 21. 215. 173. 89. 79. 99. 59. 139. 21. Per. V. 15. 227. 197. 137. 17. 223. 189. 121. 15. Per. VI. 13. 231. 205. 153. 49. 159. 61. 135. 13. Per. VII. 23. 211. 165. 73. 111. 35. 187. 117. 23. Per. VIII. 25. 207. 157. 57. 143. 29. 199. 141. 25. Per. IX. 3. 251. 245. 233. 209. 161. 65. 127. 3. Per. X. 27. 203. 149. 41. 175. 93. 71. 115. 27. Per. XI. 7. 243. 229. 201. 145. 33. 191. 125. 7. Per. XII. 5. 247. 237. 217. 177. 97. 63. 131. 5. Per. XIII. 45. 167. 77. 103. 51. 155. 53. 151. 45. Per. XIV. 37. 183. 109. 39. 179. 101. 55. 147. 37. Per. XV. 19. 219. 181. 105. 47. 163. 69. 119. 19. Per. XVI. 43. 171. 85. 87. 83. 91. 75. 107. 43.

Digitized by Google

Die Diagonalen des 58-, 74-, 106-, 122-Ecks bilden eine Periode; die des 178-Ecks 4 Perioden, die des 194-Ecks 2 Perioden; die des 226-Ecks 4 Perioden; die des 274-Ecks 2 Perioden; die des 386-Ecks 2 Perioden u. s. w.

In diesen Beispielen von $2(4n+1)$-Ecken ist $4n+1$ eine Primzahl. — Ist $4n+1$ keine Primzahl, so haben die Perioden nicht alle dieselbe Anzahl von Gliedern.

Per. des reg. 18-Ecks. Per. I. 3. Per. II. 1. 7. 5. 1.

Per. des reg. 42-Ecks. Per. I. 7. Per. II. 3. 15. 9. 3. Per. III. 1. 19. 17. 13. 5. 11. 1.

Per. des reg. 50-Ecks. Per. I. 5. 15. 5. Per. II. 1. 23. 21. 17. 9. 7. 11. 3. 19. 13. 1.

Per. des reg. 66-Ecks. Per. I. 11. Per. II. 1. 31. 29. 25. 17. 1. Per. III. 3. 27. 21. 9. 15. 3. Per. IV. 5. 23. 13. 7. 19. 5.

Von den Perioden, die die Diagonalen der regulären $2(4n+3)$-Ecke bilden, erwähne ich:

Per. des reg. 54-Ecks. Per. I. 9. Per. II. 3. 21. 15. 3. Per. III. 1. 25. 23. 19. 11. 5. 17. 7. 13. 1.

Per. des reg. 62 Ecks. Per. I. 1. 29. 27. 23. 15. 1. Per. II. 3. 25. 19. 7. 17. 3. Per. III. 5. 21. 11. 9. 13. 5.

Per. des reg. 86-Ecks. Per. I. 1. 41. 39. 35. 27. 11. 21. 1. Per. II. 3. 37. 31. 19. 5. 33. 23. 3. Per. III. 7. 29. 15. 13. 17. 9. 25. 7. u. s. w.

Bei einzelnen Vielecken lässt sich aus der Zahl der Seiten die Zahl der Glieder bestimmen, die in der Periode vorkommen müssen, in der sich die Seite oder Diagonale 1 befindet. Ist nämlich $n = 2^s$, das Vieleck also ein $2(4.2^s+1)$-Eck, so folgt in der Periode auf Diagonale 1 die Diagonale $2(2.2^s-1)+1$; darauf Diagonale $2(2.2^s-2)+1$; darauf Diagonale $2(2.2^s-4)+1$; u. s. w., als $g$tes Glied folgt der 1 offenbar Diagonale $2(2.2^s-2^{g-1})+1$ und ist diese Diagonale die erste, so wie $g=s+2$ wird. — Setzt man also s respective 1, 2, 3, ..., so findet man, die Periode des 18-Ecks besteht aus 3 Gliedern, die des 34-Ecks aus 4, die des 66-Ecks aus 5, die des 130-Ecks aus 6, die des 258-Ecks aus 7; die des 514-Ecks aus 8; die des 1026-Ecks aus 9, die des 131074-Ecks aus 16 Gliedern. —

Für das 130-Eck lautet die Per. 1. 63. 61. 57. 49. 33. 1.

„ „ 258-Eck: 1. 127. 125. 121. 113. 97. 65. 1.

Digitized by Google

Für das 1026-Eck: 1. 511. 509. 505. 497. 481. 449. 385. 257. 1.
„ „ 131074-Eck: 1. 65535. 65533. 65529. 65521. 65505. 65473. 65409. 65281. 65025. 64513. 63489. 61441. 57345. 49153. 32769. 1. u. s. w.

§. 14.

Die Frage über die Gliederzahl der Perioden lässt sich auf eine Frage aus der Zahlen Congruenz zurückführen. — Wir sahen §. 12., dass bei dem regulären $2(4n+1)$-Ecke auf eine Diagonale mit dem Zeiger $2m+1$ eine andere mit dem Zeiger $4(n-m)-1$ (wenn $n > m$), oder $4(m-n)+1$ (wenn $n \leqq m$) folgt; da aber $4(m-n)+1 = -[4(n-m)-1]$ ist, so kann man sagen: auf den Zeiger $2m+1$ folgt stets der Zeiger $4(m-n)+1$, wenn man nur letztere Grösse ihrem absolutem Werthe nach nimmt. — Es ist ferner:

$$2(2m+1) \equiv 4(m-n)+1 \quad (\text{Mod. } 4n+1);$$

multiplicirt man also den Zeiger eines Gliedes der Periode mit 2, so ist das Produkt für den Modulus $4n+1$ congruent dem entweder positiv oder negativ genommenen Zeiger des folgenden Gliedes; ist $2m+1$ der Zeiger eines Gliedes der Periode, so ist der Zeiger des folgenden Gliedes positiv zu nehmen, wenn $m >$ oder $= n$ ist, negativ wenn $m < n$ ist.

Die Periode, in der die Seite des Vielecks vorkommt, in der sich also der Zeiger 1 findet, heisse Haupt-Periode dieses Vieleckes. Die Zeiger der auf einander folgenden Glieder der Haupt-Periode eines regulären $2(4n+1)$-Ecks seien:

$$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots.\ a_m,\ 1;$$

diese Zahlen sind sämmtlich positiv, ungerade und $< 4n$; nach dem Vorhergehenden müssen zwischen ihnen für den Modulus $4n+1$ die folgenden Congruenzen gelten:

$$2.1 \equiv -a_1;\ 2a_1 \equiv \pm a_2;\ 2a_2 \equiv \pm a_3;\ \ldots.\ 2.a_{m-1} \equiv \pm a_m;\ 2a_m \equiv \pm 1.$$

Das Zeichen $\pm$ deutet an, dass die Congruenz statt habe bei der Anwendung des einen oder des andern Vorzeichens. Aus diesen Congruenzen folgt aber auch:

$$2^2 \equiv \pm a_2;\ 2^3 \equiv \pm a_3;\ 2^4 \equiv \pm a_4;\ \ldots.\ 2^m \equiv \pm a_m;\ 2^{m+1} \equiv \pm 1$$
$$(\text{Mod. } 4n+1).$$

Es lässt sich jetzt zeigen, dass es keine niedrigere Potenz von 2 als die $(m+1)$te geben könne, die $\equiv \pm 1\,(\text{Mod. } 4n+1)$

Digitized by Google

wäre. Nimmt man an, es wäre $2^\mu \equiv \pm 1$ (Mod. $4n+1$) und $\mu < m+1$, so muss es in der obigen Reihe der Zeiger eine Zahl a_μ gegeben haben, für welche $2^\mu \equiv \pm a_\mu$ (Mod. $4n+1$) wäre, folglich müsste $a_\mu \equiv \pm 1$ (Mod. $4n+1$) sein. Nun ist a_μ ungerade und $< 4n$, es kann also $a_\mu \mp 1$ nur dann durch $4n+1$ ohne Rest getheilt werden, wenn $a_\mu = \pm 1$ ist, in dem Falle aber schloss die obige Periode nicht mit dem Zeiger a_m, sondern schon mit einem frühern Gliede. Somit ergiebt sich folgender Satz:

> Löst man die Congruenzen $2^x \equiv +1$; $2^x \equiv -1$ (Mod. $4n+1$) und man findet, dass mit Ausschluss des Werthes $x=0$ der kleinste der Exponenten, der einer dieser Congruenzen genügt $x = m$ ist, so hat die Hauptperiode der ungeraden Diagonalen des regulären $2(4n+1)$-Ecks m Glieder.

Dass nicht für jeden Modulus beide Congruenzen lösbar sind, dass in dem Falle, wo beide lösbar, die Congruenz $2^x \equiv -1$ den kleinern Werth für x geben wird, ist aus der Theorie der Zahlen bekannt.

Ist $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_\mu, \alpha_1$ die Reihe der Zeiger in einer andern Periode des regulären Vielecks, so ist:

$$2\alpha_1 \equiv \pm \alpha_2;\ 2\alpha_2 \equiv \pm \alpha_3;\ 2\alpha_3 \equiv \pm \alpha_4;\ \ldots\ 2\alpha_\mu \equiv \pm \alpha_1 \text{ (Mod. } 4n+1);$$

die Periode ist zu Ende, wenn $2^\mu . \alpha_1 \equiv \pm \alpha_1$ (Mod. $4n+1$) ist; sind also α_1 und $4n+1$ relative Primzahlen, so ist die Congruenz gleichbedeutend mit $2^\mu \equiv \pm 1$ (Mod. $4n+1$). Hieraus ergiebt sich der Satz:

> Ist der Zeiger einer ungeraden Diagonale relative Primzahl zu der Seitenzahl des Vielecks, so hat die Periode, zu der diese Diagonale gehört, entweder ebenso viele Glieder als die Hauptperiode, oder die Diagonale ist selbst ein Glied der Hauptperiode.

Ferner folgt hieraus:

> Ist $(4n+1)$ eine Primzahl, und die ungeraden Diagonalen des $(4n+1)$-Ecks bilden mehrere Perioden, so haben alle diese Perioden gleiche Gliederzahl.

Es gelten ganz gleiche Sätze auch für die Perioden, welche die ungeraden Diagonalen der regulären $2(4n+3)$-Ecke bilden, nur ist in dem Falle $4n+3$ Modulus. — Die vorher gefundenen Sätze werden theilweise in §. 20. ohne zu Hülfe-Nahme der Congruenzen erwiesen.

Digitized by Google

Sollen alle ungeraden Diagonalen eines regulären $2(2n+1)$-Ecks nur eine Periode bilden, so ist der kleinste Werth von x ($x=0$ ausgeschlossen), der der Congruenz $2^x \equiv \pm 1 (\text{Mod. } 2n+1)$ genügt, der Werth $x = n$.

Da $2^n \equiv \pm 1 (\text{Mod. } 2^n \mp 1)$ ist, so bilden die ungeraden Diagonalen der regulären $2(2^n \mp 1)$-Ecke Hauptperioden von n Gliedern; bei den Vielecken deren halbe Seitenzahl ein Theiler von $2^n \mp 1$ ist, wird die Hauptperiode entweder aus n Gliedern, oder aus einer Zahl von Gliedern bestehen, die ein Theiler von n ist.

Wegen $2^1 = 2$ hat also das reguläre 2.3-Eck eine Periode 1 Gliede.

Wegen $2^2 = 4$ hat das 2.5-Eck eine Periode von 2 Gliedern.

Wegen $2^3 = 8$ hat das 2.9- und 2.7-Eck eine Periode von 3 Gliedern.

Wegen $2^4 = 16$ haben das 2.17- und 2.15-Eck Perioden von 4 Gliedern.

Wegen $2^5 = 32$ haben das 2.33- und 2.31-Eck, aber auch das 2.11-Eck Perioden von 5 Gliedern.

Wegen $2^6 = 64$ haben das 2.65- und 2.63-Eck, aber auch das 2.13- und 2.21-Eck Perioden von 6 Gliedern.

Wegen $2^7 = 128$ haben das 2.129- und 2.127-Eck, aber auch das 2.43-Eck Perioden von 7 Gliedern.

Wegen $2^8 = 256$ haben das 2.257- und 2.255-Eck, aber auch das 2.51-, 2.85-Eck Perioden von 8 Gliedern.

Wegen $2^9 = 512$ haben das 2.513- und 2.511-Eck, aber auch das 2.19-, 2.27-, 2.57-, 2.171-, 2.73-Eck Perioden von 9 Gliedern u. s. w.

§. 15.

Der Gedanke, die Gleichung eines Vielecks, dessen Diagonalen mehrere Perioden bilden, in Gleichungen niederer Grade zu zerlegen und zwar der Art, dass jede der neuen Gleichungen die Glieder einer Periode zu Wurzeln habe, liegt gewiss nahe. Versuchen wir zuerst zu ermitteln, ob nicht das allgemeine Gesetz, das zwischen den Wurzeln der zu suchenden Gleichung als Gliedern einer Periode stattfinden muss, Schlüsse gestatte auf die Coefficienten der zu suchenden Gleichung.

Die Gleichung

Digitized by Google

$$x^n + A_1 . x^{n-1} + A_2 . x^{n-2} + \dots + A_{n-1} . x + A_n = 0, \quad (24)$$

enthalte als Wurzeln die Grössen $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$; man wisse, dass zwischen diesen Grössen die Gleichungen gelten:

(25)

$$x_1^2 = 2 + x_2;\ x_2^2 = 2 + x_3;\ x_3^2 = 2 + x_4;\ \dots x_{n-1}^2 = 2 + x_n;\ x_n^2 = 2 + x_1.$$

Aus (25) folgt $x_1^2 - 2 = x_2$, folglich:

$$x_1^4 - 4x_1^2 = x_2^2 - 4;\ x_2^4 - 4x_2^2 = x_3^2 - 4;\ x_3^4 - 4x_3^2 = x_4^2 - 4;\ \dots$$
$$x_n^4 - 4x_n^2 = x_1^2 - 4,$$

folglich:

(26)

$$x_1^2 . x_2^2 . x_3^2 \dots x_{n-1}^2 . x_n^2 = 1 \text{ oder } x_1 . x_2 . x_3 \dots x_{n-1} . x_n = \pm 1 = A_n.$$

Das Produkt derjenigen ungeraden Diagonalen eines regulären $2(4n+1)$-Ecks, die eine Periode bilden, ist $= +1$, wenn alle Diagonalen nach ihrem absoluten Werthe genommen werden.

Da man aus den Zeigern der Diagonalen sehen kann, welche als positiv, welche als negativ erscheinen, so lässt sich stets sagen, ob das Produkt der Diagonalen, die eine Periode bilden, $= +1$ oder $= -1$ sei.

Die Gleichungen in (25) lassen sich auch schreiben:

$$x_1^2 - 1 = 1 + x_2;\ x_2^2 - 1 = 1 + x_3;\ \dots x_n^2 - 1 = 1 + x_1;$$

folglich ist:

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1)(x_3 - 1) \dots (x_n - 1) = 1. \quad . \quad . \quad . \quad (27)$$

Versteht man unter $C_1, C_2, C_3, \dots C_n$ die Summe der ersten, zweiten, dritten, ... $n$ten Combinationsklasse ohne Widerholungen aus den Elementen $x_1, x_2, x_3, \dots x_n$, so kann man statt (27) auch

$$C_n - C_{n-1} + C_{n-2} - C_{n-3} + \dots + (-1)^n . C_2 - (-1)^n . C_1 + (-1)^n = 1$$

setzen, und da nach bekannten Sätzen:

$$A_1 = -C_1,\ A_2 = +C_2,\ A_3 = -C_3,\ \dots A_n = (-1)^n . C_n,\ \dots$$

ist, so geht die letzte Gleichung, im Falle n eine gerade Zahl ist, über in:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

wenn n eine ungerade Zahl ist in:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = 2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Aus (25) erhält man in Verbindung mit (26):

$$(2 + x_1)(2 + x_2)(2 + x_3) \dots (2 + x_n) = 1,$$

oder:

(30)

$$2^n - 2^{n-1}.A_1 + 2^{n-2}.A_2 - 2^{n-3}.A_3 + \dots \mp 2A_{n-1} \pm A_n = 1;$$

die obern Vorzeichen gelten, wenn n eine gerade, die untern, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Bezeichnet man mit S_1, S_2, S_3, ... die Summe der ersten, zweiten, dritten, ... Potenzen der Wurzeln der Gleichung (24), so hat man nach dem Newton'schen Satze:

$$S_1 = -A_1, \quad S_2 = -2A_2 - A_1 S_1, \quad S_3 = -3A_3 - A_2 S_1 - A_1 S_2,$$
$$S_4 = -4A_4 - A_3 S_1 - A_2 S_2 - A_1 S_3; \text{ u. s. w.}; \; . \; . \; . \quad (31)$$

Aus (25) folgt sogleich $S_2 = 2n + S_1$, folglich ist:

$$A_2 = \frac{A_1^2 + A_1 - 2n}{2}. \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32)$$

Aus (25) ergiebt sich ferner:

$$S_4 = 4n + 4S_1 + S_2, \quad S_6 = 8n + 12S_1 + 6S_2 + S_3,$$
$$S_8 = 16n + 32S_1 + 24S_2 + 8S_3 + S_4; \text{ u. s. w.}; \; . \; . \; . \quad (33)$$

Kann man also S_3, S_5, S_7, ... auf irgend eine Weise durch S_1 bestimmen (im §. 19., §. 21., §. 23. werden Mittel dazu angegeben werden), so sind durch die Gleichungen (31), (33) auch A_3, A_4, A_5, ... zu finden.

Gelten statt der Gleichungen in (25) die Gleichungen

$$x_1^2 = 2 - x_2, \quad x_2^2 = 2 - x_3, \quad x_3^2 = 2 - x_4, \dots x_n^2 = 2 - x_1$$

(sie finden bei den Diagonalen statt, die die Periode eines regulären $2(4n+3)$-Ecks bilden), so übersieht man sogleich, dass auch hier

$$x_1 . x_2 . x_3 \dots x_n = \pm 1 = A_n; \quad (x_1 + 1)(x_2 + 1)(x_3 + 1) \dots (x_n + 1) = (-1)^n$$

oder

$$(-1)^n.A_n + (-1)^{n-1}.A_{n-1} + (-1)^{n-2}.A_{n-2} + \dots - A_3 + A_2 - A_1 + 1 = (-1)^n;$$

$$2^n + 2^{n-1}.A_1 + 2^{n-2}.A_2 + 2^{n-3}.A_3 + \dots + 2A_{n-1} + A_n = 1;$$

Digitized by Google

$$A_2 = \frac{A_1^2 - A_1 - 2n}{2}; \quad S_2 = 2n - S_1; \quad S_4 = 4n - 4S_1 + S_2;$$

u. s. w.

sein werde.

§. 16.

Die Gleichungen von §. 15. genügen, um die Gleichung des regulären 34-Ecks in zwei Gleichungen vierten Grades zu zerlegen. — Aus §. 13. und §. 14. weiss man, dass die ungeraden Diagonalen des regulären 34-Ecks zwei Perioden zu 4 Gliedern bilden. Es sei

$$x^4 + A_1 . x^3 + A_2 . x^2 + A_3 . x + A_4 = 0$$

die Gleichung, welche die Diagonalen 1. 15. 13. 9 als Wurzeln enthält; da nur die Diagonale 15 negativ ist, so ist A_4 nach (26) $= -1$; die Gleichungen (28), (30), (32) geben also jetzt:

$$A_1 + A_2 + A_3 = +1; \quad 8 - 4A_1 + 2A_2 - A_3 = 1; \quad A_2 = \frac{A_1^2 + A_1 - 8}{2}.$$

Aus den ersten beiden Gleichungen folgt:

$$A_2 = A_1 - 2, \text{ folglich } A_1 - 2 = \frac{A_1^2 + A_1 - 8}{2} \text{ oder } A_1^2 - A_1 - 4 = 0,$$

d. h.:

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{17});$$

da nun $x_1 + x_{13} + x_9 > x_{15}$ ist, so ist A_1 negativ, folglich:

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17}); \quad A_2 = \tfrac{1}{2}(-3 - \sqrt{17}); \quad A_3 = 2 + \sqrt{17}; \quad A_4 = -1.$$

Man hätte genau dieselben drei Bedingungsgleichungen erhalten, hätte die obige Gleichung als Wurzeln enthalten sollen die Diagonalen 3. 11. 5. 7; da hier drei negative Wurzeln vorhanden sind und $x_3 + x_{11} + x_7$ dem absoluten Werthe nach grösser ist als x_5, so ist jetzt für A_1 der positive Werth zu nehmen; man erhielte für diesen Fall:

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{17}); \quad A_2 = \tfrac{1}{2}(-3 + \sqrt{17}); \quad A_3 = 2 - \sqrt{17}; \quad A_4 = -1;$$

oder

die Gleichung:

$$x^4 + \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17})x^3 - \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{17})x^2 + (2 + \sqrt{17})x - 1 = 0$$

hat zu Wurzeln die Diagonalen 1. 9. 13. 15,

die Gleichung:

$$x^4 + \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{17})x^3 - \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{17})x^2 + (2 - \sqrt{17})x - 1 = 0$$

hat zu Wurzeln die Diagonalen 3. 5. 7. 11 des regulären 34-Ecks. (34)

Digitized by Google

§. 17.

Ist n in der Gleichung (24) keine Primzahl, so geben die Gleichungen in §. 15. Mittel an die Hand, durch welche die Zerlegung der Gleichung (24) in Gleichungen niederer Grade erleichtert wird. Es sei zunächst $n = 2\nu$. Man versuche es, (24) der Art zu zerlegen, dass sich in der einen Gleichung die Wurzeln $x_1, x_3, x_5, \ldots x_{n-1}$, in der andern die Wurzeln $x_2, x_4, x_6, \ldots x_n$ finden. Zwischen den Wurzeln gelten entweder die Gleichungen:

(35)

$$x_1^2 = 2 + x_2,\; x_2^2 = 2 + x_3,\; x_3^2 = 2 + x_4, \ldots x_{n-1}^2 = 2 + x_n,\; x_n^2 = 2 + x_1,$$

oder:

$$x_1^2 = 2 - x_2,\; x_2^2 = 2 - x_3,\; x_3^2 = 2 - x_4, \ldots x_{n-1}^2 = 2 - x_n.\; x_n^2 = 2 - x_1.$$

Die zu bildenden Gleichungen seien:

$$x^\nu + a_1 . x^{\nu-1} + a_2 . x^{\nu-2} + \ldots + a_{\nu-1} . x + a_\nu = 0,$$

und:

$$x^\nu + b_1 . x^{\nu-1} + b_2 . x^{\nu-2} + \ldots + b_{\nu-1} . x + b_\nu = 0.$$

Bezeichnet man die Summe der ersten, zweiten, dritten, vierten, ... Potenzen der Wurzeln $x_1, x_3, x_5, x_7, \ldots$ mit $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$, die entsprechenden Summen bei den Wurzeln $x_2, x_4, x_6, x_8, \ldots$ mit $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_4, \ldots$, so ergiebt sich aus (35):

$$S_2 = 2\nu \pm \mathfrak{S}_1;\quad \mathfrak{S}_2 = 2\nu \pm S_1;\quad S_4 = 4\nu \pm 4\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2;\quad \mathfrak{S}_4 = 4\nu \pm 4S_1 + S_2;$$

$$S_6 = 8\nu \pm 12\mathfrak{S}_1 + 6\mathfrak{S}_2 \pm \mathfrak{S}_3;\quad \mathfrak{S}_6 = 8\nu \pm 12S_1 + 6S_2 \pm S_3;$$

u. s. w.

$S_3, S_5, \ldots \mathfrak{S}_3, \mathfrak{S}_5, \ldots$ kann man nach §. 19. bestimmen, kann man also nur $S_1, \mathfrak{S}_1$ finden, so sind die Coefficienten der beiden obigen Gleichungen bestimmt. Der Gleichung (32) entsprechen in diesem Falle die Gleichungen:

$$a_2 = \frac{a_1^2 \pm b_1 - 2\nu}{2},\quad b_2 = \frac{b_1^2 \pm a_1 - 2\nu}{2}.$$

Ist die Gleichung (24) vom Grade $3m$ und man will sie zerlegen in die drei Gleichungen:

$x^m + a_1 . x^{m-1} + a_2 . x^{m-2} + \ldots + a_m = 0$ mit den Wurz. $x_1, x_4, x_7, \ldots x_{3m-2}$,
$x^m + b_1 . x^{m-1} + b_2 . x^{m-2} + \ldots + b_m = 0$ „ „ „ $x_2, x_5, x_8, \ldots x_{3m-1}$,
$x^m + c_1 . x^{m-1} + c_2 . x^{m-2} + \ldots + c_m = 0$ „ „ „ $x_3, x_6, x_9, \ldots x_{3m}$,

Digitized by Google

so folgt aus (35):

$$x_1^2 + x_4^2 + x_7^2 + \dots + x_{3m-2}^2 = 2m \pm (x_2 + x_5 + x_8 + \dots + x_{3m-1}),$$
$$x_2^2 + x_5^2 + x_8^2 + \dots + x_{3m-1}^2 = 2m \pm (x_3 + x_6 + x_9 + \dots + x_{3m}),$$
$$x_3^2 + x_6^2 + x_9^2 + \dots + x_{3m}^2 = 2m \pm (x_1 + x_4 + x_7 + \dots + x_{3m-2}),$$

ebenso wie andere, den vorher gegebenen ähnliche Gleichungen für die Summen der 4ten, 6ten, ... Potenzen der Wurzeln dieser Gleichung. Es ist in diesem Falle:

$$a_2 = \frac{a_1^2 \pm b_1 - 2m}{2}, \quad b_2 = \frac{b_1^2 \pm c_1 - 2m}{2}, \quad c_2 = \frac{c_1^2 \pm a_1 - 2m}{2}.$$

Die Sache verhält sich ganz ebenso, wenn n in der Gleichung (24) eine durch 5, 7, ... theilbare Zahl ist, und man soll die Gleichung in 5, 7, ... Gleichungen zerlegen.

§. 18.

Man kann jetzt jede der beiden Gleichungen in (34) in zwei Gleichungen zweiten Grades zerlegen. Es enthalte die Gleichung $x^2+a_1.x+a_2=0$ die Wurzeln x_1, x_{13} und Gleichung $x^2+b_1.x+b_2=0$ die Wurzeln x_{15}, x_9.

Nach §. 17. muss

$$a_2 = \tfrac{1}{2}(a_1^2 + b_1 - 4), \quad b_2 = \tfrac{1}{2}(b_1^2 + a_1 - 4)$$

sein; wir wissen ferner, dass

$$a_1 + b_1 = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17}), \quad a_1.b_2 + a_2.b_1 = 2 + \sqrt{17}$$

ist; setzen wir in letztere Gleichung die Werthe für a_2, b_2 ein, so ergiebt sich:

$$\tfrac{1}{2}[a_1.b_1(a_1 + b_1) + (a_1^2 + b_1^2) - 4(a_1 + b_1)] = 2 + \sqrt{17}$$

oder

$$a_1.b_1.\tfrac{1}{2}(-3 - \sqrt{17}) = \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{17}), \text{ d. h. } a_1.b_1 = -1,$$

folglich:

$$a_1 - b_1 = \pm \tfrac{1}{2}(\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}).$$

Da der Annahme nach $a_1 = -(x_1 + x_{13})$ negativ, $b_1 = -(x_9 + x_{13})$ positiv ist, so folgt:

$$a_1 = \tfrac{1}{4}(1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}), \quad b_1 = \tfrac{1}{4}(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}).$$

Digitized by Google

Hätte man die zweite Gleichung in (34) auf gleiche Weise zerlegt, so würde man

$$-(x_3+x_5)=\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{17}-\sqrt{34+2\sqrt{17}}),$$
$$-(x_7+x_{11})=\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}})$$

gefunden haben.

In §. 25. wird die Zerlegung auf andere noch einfachere Weise vorgenommen werden.

§. 19.

Ist x_m eine ungerade Diagonale eines regulären $2(2n+1)$-Ecks, und m ist von der Form $4\mu+1$, ist ferner 2α der zur Diagonale zugehörige Centriwinkel, so ist der zu den Diagonalen x_{3m}, x_{5m}, x_{7m}, ... zugehörige Centriwinkel resp. $=3.2\alpha$, 5.2α, 7.2α,....; wird dabei der Radius des Kreises $=1$ gesetzt, so ist:

$$x_m=2\sin\alpha,\quad -x_{3m}=2\sin 3\alpha,\quad x_{5m}=2\sin 5\alpha,\quad -x_{7m}=2\sin 7\alpha,\ldots$$

(da x_{3m}, x_{7m},.... negativ erscheinen in den Gleichungen des Vielecks, so sind $-x_{3m}$, $-x_{7m}$,.... positiv). Nun ist bekanntlich:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\quad \sin 5\alpha=5\sin\alpha-20\sin^3\alpha+16\sin^5\alpha,$$
$$\sin 7\alpha=7\sin\alpha-56\sin^3\alpha+112\sin^5\alpha-64\sin^7\alpha,$$
$$\sin 9\alpha=9\sin\alpha-120\sin^3\alpha+432\sin^5\alpha-576\sin^7\alpha+256\sin^9\alpha,\ldots$$

Setzt man in diese Gleichungen statt $\sin\alpha$, $\sin 3\alpha$, $\sin 5\alpha$,.... die Werthe aus den obigen Gleichungen, so ergiebt sich:

(36)

$$x_{3m}=-3x_m+x_m^3,\quad x_{5m}=5x_m-5x_m^3+x_m^5,$$
$$x_{7m}=-7x_m+14x_m^3-7x_m^5+x_m^7,$$
$$x_{9m}=9x_m-30x_m^3+27x_m^5-9x_m^7+x_m^9.\ldots$$

War m von der Form $4\mu+3$, so hat man $-x_m=2\sin\alpha$, $x_{3m}=2\sin 3\alpha$, $-x_{5m}=2\sin 5\alpha$, u. s. w. zu setzen; in den Gleichungen (36) ändert sich dadurch Nichts. —

Sind zwei Gleichungen desselben Grades, etwa:

$$\left.\begin{aligned} x^m+A_1.x^{m-1}+A_2.x^{m-2}+\ldots+A_{m-1}.x+A_m&=0,\\ \mathfrak{x}^m+B_1.\mathfrak{x}^{m-1}+B_2.\mathfrak{x}^{m-2}+\ldots+B_{m-1}.\mathfrak{x}+B_m&=0,\end{aligned}\right\}\ (37)$$

gegeben, deren Wurzeln x_1, x_2, x_3, ... x_m und $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{x}_2$, $\mathfrak{x}_3$,....$\mathfrak{x}_m$ dem durch Gleichung (25) ausgesprochenen Gesetze genügen, und

Digitized by Google

die wir jede als Gleichung zwischen m ungeraden Diagonalen eines regulären $2(4n+1)$-Ecks, die eine Periode bilden, auffassen wollen (die Zeiger geben hier nur die Stelle an, die jede der Diagonalen in der Periode einnimmt), und es gilt ausserdem noch die Gleichung

$$\mathfrak{r}_1 = x_1^3 - 3x_1,$$

so lässt sich zeigen, dass $\mathfrak{r}_2 = x_2^3 - 3x_2$, $\mathfrak{r}_3 = x_3^3 - 3x_3$ u. s. w. sei. Denn es ist:

$$\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_1^2 - 2 = (x_1^3 - 3x_1)^2 - 2 = x_1^6 - 6x_1^4 + 9x_1^2 - 2$$
$$= (x_2+2)^3 - 6(x_2+2)^2 + 9(x_2+2) - 2 = x_2^3 - 3x_2.$$

Ebenso zeigt sich:

$$\mathfrak{r}_3 = x_3^3 - 3x_3, \quad \mathfrak{r}_4 = x_4^3 - 3x_4 \text{ u. s. w.}$$

Mithin ist auch:

$$\mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3 + \ldots + \mathfrak{r}_m = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + \ldots + x_m^3 - 3(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m).$$

Bezeichnet man nun mit S_1, S_2, S_3, ... S_n die Summe der 1., 2., 3., ... $n$ten Potenzen der Wurzeln der ersten Gleichung in (37) und versteht unter $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, ... $\mathfrak{S}_n$ die entsprechenden Summen der Wurzeln der zweiten Gleichung in (37), so lässt sich die letzte Gleichung auch

$$S_3 = \mathfrak{S}_1 + 3S_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

schreiben. Die Gleichung (38) ergiebt sich auch, wenn statt der Gleichungen in (25) die Gleichungen

$$x_1^2 = 2 - x_2,\ x_2^2 = 2 - x_3, \ldots\ x_m^2 = 2 - x_1;\quad \mathfrak{r}_1^2 = 2 - \mathfrak{r}_2, \ldots\ \mathfrak{r}_m^2 = 2 - \mathfrak{r}_1$$

zwischen den Wurzeln der Gleichungen (37) gelten. Bilden also die ungeraden Diagonalen eines regulären $2(2n+1)$-Ecks mehrere Perioden jede von m Gliedern, und es ist ein Zeiger eines Gliedes der einen Periode das Dreifache von einem Zeiger eines Gliedes einer andern Periode, so ist die Summe der dritten Potenzen der Glieder dieser Periode gleich der dreifachen Summe der Glieder dieser Periode plus der Summe der Glieder der andern Periode. Ist also in den Gleichungen (37) A_1, A_2, B_1 bekannt, so lässt sich auch A_3 finden. cf. §. 15.

Der Beweis verlangt durchaus nicht, dass die beiden Gleichungen in (37) verschieden seien; sind beide dieselbe Gleichung, findet sich also unter den Zeigern einer Periode einer, der das Dreifache ist von einem andern Zeiger derselben Periode, so ist:

$$S_3 = 4S_1.$$

Digitized by Google

Findet zwischen den Wurzeln der Gleichungen in (37) ausser den Gleichungen (35) auch die Gleichung

$$\mathfrak{r}_1 = x_1{}^5 - 5x_1{}^3 + 5x_1$$

statt (es wird dies der Fall sein, wenn ein Zeiger der Diagonalen, die Wurzeln der zweiten Gleichung sind, das Fünffache ist von einem Zeiger der Diagonalen, die zur ersten Gleichung gehören), so folgt ganz ebenso wie vorher:

$$S_5 = \mathfrak{S}_1 - 5S_1 + 5S_3. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

Ganz ebenso wird gezeigt, dass auch die Gleichung

$$S_7 = \mathfrak{S}_1 + 7S_1 - 14S_3 + 7S_5 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (40)$$

zwischen den Wurzeln der Gleichungen (37) statt habe, wenn für dieselben ausser den Gleichungen in (35) noch

$$\mathfrak{r}_1 = x_1{}^7 - 7x_1{}^5 + 14x_1{}^3 - 7x_1$$

gilt.

Es ist einleuchtend, dass man auf gleiche Weise S_9, S_{11},...., desgl. $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{S}_9$,.... finden könne, und ebenso ersichtlich, dass auch in diesen Fällen die beiden Gleichungen in (37) ein und dieselbe sein können.

Nachdem in §. 15. gezeigt wurde, wie man die Summen der geraden Potenzen der ungeraden Diagonalen einer Periode finden kann, wenn die Summe derselben bekannt ist, im Vorhergehenden aber die Summen der ungeraden Potenzen aus derselben Summe hergeleitet wurden, so ist als erwiesen anzusehen, dass man jede Gleichung eines regulären $2(2n+1)$-Ecks, dessen ungerade Diagonalen in mehrere Perioden von gleicher Gliederzahl zerfallen, in eben so viele Gleichungen, als Perioden vorhanden sind, zerfällen kann, so wie nur die Summen der Glieder in jeder Periode gefunden sind.

Ebenso wie wir in §. 18. gesehen, dass die Glieder einer Periode, wenn sich ihre Zahl durch 2, 3,.... theilen lässt, sich in 2, 3, ... Abtheilungen bringen lassen, für welche man die Summen der graden Potenzen der Glieder jeder Abtheilung finden kann, wenn man nur die Summe der Glieder jeder Abtheilung kennt, so lässt sich jetzt dasselbe auch von den Summen der ungeraden Potenzen jeder Abtheilung zeigen. Ist etwa m in den Gleichungen (37) eine durch 2 theilbare Zahl, $2p = m$, so bilde man aus den Wurzeln der beiden Gleichungen folgende Abtheilungen. Zu der einen gehören: x_1, x_3, x_5, ... x_{2p-1}, zu der zweiten x_2, x_4, x_6, ... x_{2p}, zu der folgenden $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_5$, ... $\mathfrak{r}_{2p-1}$, zu der letzten $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_4$, $\mathfrak{r}_6$, ... x_{2p}. Besteht nun zwischen diesen Grössen noch die Gleichung:

Digitized by Google

$$\mathfrak{r}_1 = x_1^3 - 3x_1,$$

so ist klar, dass dann auch

$$x_1^3 + x_3^3 + x_5^3 + \ldots + x_{2p-1}^3 = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_3 + \mathfrak{r}_5 + \ldots + \mathfrak{r}_{2p-1} + 3(x_1 + x_3 + \ldots + x_{2p-1}),$$

$$x_2^3 + x_4^3 + x_6^3 + \ldots + x_{2p}^3 = \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_4 + \mathfrak{r}_6 + \ldots + \mathfrak{r}_{2p} + 3(x_2 + x_4 + \ldots + x_{2p})$$

sei Oder wenn die Gleichung $\mathfrak{r}_1 = x_1^5 - 5x_1^3 + 5x_1$ giltig ist, so muss:

$$x_1^5 + x_3^5 + x_5^5 + \ldots + x_{2p-1}^5$$
$$= \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_3 + \mathfrak{r}_5 + \ldots + \mathfrak{r}_{2p-1} + 5(x_1^3 + x_3^3 + x_5^3 + \ldots + x_{2p-1}^3)$$
$$- 5(x_1 + x_3 + x_5 + \ldots + x_{2p-1}),$$

$$x_2^5 + x_4^5 + x_6^5 + \ldots + x_{2p}^5$$
$$= \mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_4 + \mathfrak{r}_6 + \ldots + \mathfrak{r}_{2p} + 5(x_2^3 + x_4^3 + x_6^3 + \ldots + x_{2p}^3)$$
$$- 5(x_2 + x_4 + x_6 + \ldots + x_{2p})$$

sein. Bestehen nun die auf diese Weise erhaltenen Abtheilungen aus einer Zahl von Gliedern, die keine Primzahl ist, so lassen sich dieselben wieder in neue Abtheilungen zerlegen. Wäre z. B. im vorher erwähnten Falle $p = 5\pi$, so hätte man aus den Gliedern $x_1, x_3, x_5, x_7, \ldots x_{10\pi-1}$ folgende Abtheilungen zu machen Es gehören zusammen $x_1, x_{11}, x_{21}, \ldots x_{10\pi-9}$, ferner $x_3, x_{13}, x_{23}, \ldots x_{10\pi-7}$, desgleichen $x_5, x_{15}, x_{25}, \ldots x_{10\pi-5}$, desgleichen $x_7, x_{17}, x_{27}, \ldots x_{10\pi-3}$, endlich $x_9, x_{19}, x_{29}, \ldots x_{10\pi-1}$; auf ähnliche Weise sind die andern Abtheilungen zu zerlegen, und es ist einleuchtend, dass wenn noch $\mathfrak{r}_1 = x_1^3 - 3x_1$ ist, dann

$$x_1^3 + x_{11}^3 + x_{21}^3 + \ldots + x_{10\pi-9}^3$$
$$= \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_{11} + \mathfrak{r}_{21} + \ldots + \mathfrak{r}_{10\pi-9} + 3(x_1 + x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{10\pi-9}),$$

$$x_3^3 + x_{13}^3 + x_{23}^3 + \ldots + x_{10\pi-7}^3$$
$$= \mathfrak{r}_3 + \mathfrak{r}_{13} + \mathfrak{r}_{23} + \ldots + \mathfrak{r}_{10\pi-7} + 3(x_3 + x_{13} + x_{23} + \ldots + x_{10\pi-7})$$

u. s. w.

ist, so dass man auch in diesem Falle, wie in allen ähnlichen, die Summen der geraden und der ungeraden Potenzen der Glieder jeder Abtheilung finden wird, so wie man die Summe der Glieder jeder Abtheilung kennt.

Fasst man das im Vorhergehenden Erwiesene zusammen, so dürfte es genügen, um als Resultat der bisherigen Untersuchung Folgendes aufzustellen Bilden die ungeraden Diagonalen eines regulären $2(2n+1)$-Ecks eine oder mehrere Perioden, die im

Digitized by Google

letztern Falle zunächst gleiche Gliederzahl haben mögen, so kann man die Coefficienten der Gleichungen, deren Wurzeln die sämmtlichen Glieder einer Periode sind, finden, so wie man die Summe der Glieder jeder Periode kennt. Enthält jede der auf diese Weise für ein bestimmtes Vieleck erhaltenen Gleichungen $a.b$ Wurzeln, so kann man jede derselben wieder entweder in a Gleichungen vom Grade b oder in b Gleichungen vom Grade a zerlegen, und die Coefficienten der Gleichungen bestimmen, so wie man für jede der zu suchenden Gleichungen die Summe ihrer Wurzeln kennt, wenn man nur im ersten Falle jedesmal b, im zweiten Falle jedesmal a bestimmte Diagonalen als Wurzeln jeder der Gleichungen nimmt. Welche Diagonalen als Wurzeln einer Gleichung zu nehmen, ergiebt sich mit Bestimmtheit aus der bekannten Reihenfolge derselben in der Periode. Ist b (oder a) selbst wieder eine durch c theilbare Zahl, also $b=c.d$, so kann man wieder jede der b Gleichungen, sei es in c Gleichungen vom Grade d oder in d Gleichungen vom Grade c zerlegen und deren Coefficienten aus den bekannten Summen der Wurzeln jeder Gleichung finden, so wie man nur wieder d resp. c ganz bestimmte Diagonalen als Wurzeln der zu suchenden Gleichungen nimmt. Ist d oder c wieder theilbar, so kann man mit dem Zerlegen auf gleiche Weise und zwar so lange fortfahren, bis man Gleichungen erhält, deren Grad eine Primzahl ist.

§. 20.

Fälle, wie sie im Vorhergehenden behandelt wurden, treten ein, so wie die Perioden, welche die ungeraden Diagonalen eines regulären $2(2n+1)$-Ecks bilden, sämmtlich von gleicher Gliederzahl sind. Allein aus §. 13. ist bekannt, dass bei einzelnen dieser Vielecke die Diagonalen mehrere Perioden bilden, die nicht alle dieselbe Zahl von Gliedern haben. Es seien $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ auf einander folgende Glieder einer Periode, $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4, \ldots \mathfrak{x}_m$ die Glieder einer andern Periode desselben Vielecks (die Zeiger geben mithin an, das wievielste Glied der Periode eine Diagonale sei), und sei $n<m$. Wenn nun zwischen x_1 und $\mathfrak{x}_1$ etwa eine der Gleichungen

$$\mathfrak{x}_1 = x_1{}^3 - 3x_1, \quad \mathfrak{x}_1 = x_1{}^5 - 5x_1{}^3 + 5x_1, \text{ u. s. w.}$$

statt findet, so gilt dieselbe Gleichung auch zwischen $\mathfrak{x}_2$ und x_2, $\mathfrak{x}_3$ und x_3 u. s. w., also auch zwischen $\mathfrak{x}_n$ und x_n; da $\mathfrak{x}_{n+1}$ auf $\mathfrak{x}_n$ und x_1 auf x_n folgt, so müsste dieselbe Gleichung auch zwischen $\mathfrak{x}_{n+1}$ und x_1 gelten, d. h. man erhie te aus demselben Werthe von

x_1 durch dieselbe Rechnung zwei von einander verschiedene Werthe $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_{n+1}$, was unmöglich ist. Somit ergiebt sich der Satz:

> Ist x_m irgend eine ungerade Diagonale eines regulären $2(2n+1)$-Ecks und findet sich x_{3m} oder x_{5m} oder x_{7m}.... nicht in derselben Periode, in der sich x_m findet, so kann die Periode, zu der x_{3m}, x_{5m}, x_{7m} gehört, nie aus mehr Gliedern bestehen, als die Periode, zu der x_m gehört.

Ferner folgt:

> Bilden die ungeraden Diagonalen eines regulären $2(2n+1)$-Ecks mehrere Perioden, so kann keine derselben aus mehr Gliedern bestehen, als die Hauptperiode dieses Vielecks, d. h. diejenige, in der sich die Seite des Vielecks findet.

Ist $n > m$ (es ist angenommen, zwischen $\mathfrak{r}_1$ und x_1 besteht eine der Gleichungen $\mathfrak{r}_1 = x_1^3 - 3x_1$, $\mathfrak{r}_1 = x_1^5 - 5x_1^3 + 5x_1$ u. s. w.), so wird zwischen $\mathfrak{r}_m$ und x_m dieselbe Gleichung bestehen wie zwischen $\mathfrak{r}_1$ und x_1, dann muss aber auch diese Gleichung bestehen zwischen $\mathfrak{r}_1$ und x_{m+1}, zwischen $\mathfrak{r}_2$ und x_{m+2}, und so fort; fände sich auf diese Weise, dass zwischen $\mathfrak{r}_\mu$ und x_n auch diese Gleichung gilt, so müsste sie auch zwischen $\mathfrak{r}_{\mu+1}$ und x_1 statt haben; allein $\mathfrak{r}_{\mu+1}$ kann aus dem schon erwähnten Grunde keine von $\mathfrak{r}_1$ verschiedene Grösse sein, somit ist n ein ganzzahliges Vielfache von m. Demnach erhält man den Satz:

> Ist x_m irgend eine ungerade Diagonale eines regulären $2(2n+1)$-Ecks und findet sich x_{3m}, x_{5m}, x_{7m}, ... nicht in der Periode, in der sich x_m befindet, so ist die Zahl der Glieder in der Periode, zu der x_m gehört, ein ganzzahlig Vielfaches (kann auch das Einfache sein) der Gliederzahl der Perioden, in denen sich x_{3m}, x_{5m}, ... finden.

Ist x_1 Seite eines regulären $2(2n+1)$-Ecks, $\alpha = \frac{1R}{2n+1}$, x_1 also $= 2\sin\alpha$, kommt ferner x_m nicht in der Periode vor, in der sich x_1 findet, und hat die Periode, in der sich x_m findet, weniger Glieder als die Periode, in der x_1 vorkommt, so muss sich in letzterer mindestens noch ein Glied befinden, dessen Zeiger p ungerade und so beschaffen ist, dass $\sin(mp.\alpha) = \sin(m\alpha)$ ist, es muss also

$$\frac{mp}{2n+1}R = 2\mu R \pm \frac{m}{2n+1}R \quad \text{oder} \quad m(p \mp 1) = 2\mu(2n+1)$$

Digitized by Google

sein. Ist mithin $2n+1$ eine Primzahl, so lässt sich diese Gleichung nie erfüllen, da m wie $p < 2n$ sind. Somit ergiebt sich der Satz:

> Ist $2n+1$ eine Primzahl und es besteht die Hauptperiode der ungeraden Diagonalen des regulären $2(2n+1)$-Ecks aus m Gliedern, so muss jede der Perioden, die sich aus den ungeraden Diagonalen des Vielecks bilden lässt, aus m Gliedern bestehen, es ist also m ein Theiler von n, der Anzahl der ungeraden Diagonalen des Vielecks.

Ein Theil der Sätze dieses Paragraphen ist bereits §. 14. erwiesen; hier ohne Anwendung von Lehren der Zahlen-Congruenz.

§. 21.

In §. 19. sahen wir, wie man die Summe der ungeraden Potenzen bestimmter Diagonalen eines regulären $2(2n+1)$-Ecks ausdrücken könne, wenn die sämmtlichen ungeraden Diagonalen des Vielecks nur eine Periode oder auch mehrere Perioden bilden, doch mussten im letztern Falle alle Perioden dieselbe Anzahl von Gliedern haben. Wie sich die Sache stellt, wenn die letztere Bedingung nicht erfüllt ist, wird sich am Leichtesten aus einem Beispiele ersehen lassen. Es habe die Hauptperiode $m.\pi$ Glieder, $x_1, x_2, x_3, \ldots. x_{m.\pi}$ seien die auf einander folgenden Glieder derselben; eine andere Periode desselben Vielecks habe nur m Glieder, nämlich $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \ldots. \mathfrak{x}_m$; besteht zwischen x_1 und $\mathfrak{x}_1$ die Gleichung $\mathfrak{x}_1 = x_1^3 - 3x_1$ (oder eine ähnliche), so ist auch:

$$\mathfrak{x}_2 = x_2^3 - 3x_2, \ldots. \mathfrak{x}_m = x_m^3 - 3x_m, \quad \mathfrak{x}_1 = x_{m+1}^3 - 3x_{m+1},$$

$$\mathfrak{x}_2 = x_{m+2}^3 - 3x_{m+2}, \ldots. \mathfrak{x}_m = x_{2m}^3 - 3x_{2m} \text{ u. s. w.},$$

und es ist nun:

$$x_1^3 + x_2^3 + \ldots. + x_{m\pi}^3 = \pi(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2 + \ldots. + \mathfrak{x}_m) + 3(x_1 + x_2 + \ldots. + x_{m\pi})$$

und ähnliche Gleichungen weiter, wenn zwischen x_1 und $\mathfrak{x}_1$ die andern Gleichungen aus §. 19. bestehen.

Soll die Hauptperiode des Vielecks in m Gleichungen zerlegt werden, wo also die eine Gleichung nach §. 19. die Diagonalen $x_1, x_{m+1}, x_{2m+1}, \ldots. x_{(\pi-1)m+1}$ als Wurzeln enthalten wird, so ist unter der Annahme $\mathfrak{x}_1 = x_1^3 - 3x_1$ auch

Digitized by Google

$$x_1^3 + x_{m+1}^3 + \dots + x_{(\pi-1)m+1}^3 = \pi . x_1 + 3(x_1 + x_{m+1} + \dots + x_{(\pi-1)m+1}).$$

Soll die Hauptperiode in π Gleichungen zerlegt werden, wo mithin die eine Gleichung die Diagonalen x_1, $x_{\pi+1}$, $x_{2\pi+1}$, ... $x_{(m-1)\pi+1}$ als Wurzeln enthalten wird, so wird sich auch eine in jedem bestimmten Falle leicht zu ermittelnde Reihe Diagonalen aus der andern Periode ergeben, deren Summe vermehrt um die dreifache Summe der genannten Diagonalen gleich ist der Summe der dritten Potenzen dieser letztern Diagonalen.

Man kann diesen Fall übrigens ganz auf den Fall in §. 19. zurückführen, wenn man die zweite Periode, die nur m Glieder hat, πmal hinter einander schreibt und die so erhaltene Reihe als Periode betrachtet, die mit der Hauptperiode gleiche Gliederzahl hat.

§. 22.

Als Beispiel, wie man die bisher erwähnten Sätze zur Zerlegung der Gleichung eines regulären $2(2n+1)$-Ecks benutzen könne, diene die Zerlegung der Gleichung des regulären 82-Ecks in zwei Gleichungen. Die gesuchten Gleichungen seien:

$$x^{10} + A_1 . x^9 + A_2 . x^8 + \dots + A_9 . x + A_{10} = 0$$

mit den Diagonalen 1. 39. 37. 33. 25. 9. 23. 5. 31. 21 und

$$x^{10} + B_1 . x^9 + B_2 . x^8 + \dots + B_9 . x + B_{10} = 0$$

mit den Diagonalen 3. 35. 29. 17. 7. 27. 13. 15. 11. 19 als Wurzeln.

Es sei gefunden:

$$A_1 = -S_1 = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{41}) \quad \text{und} \quad B_1 = -\mathfrak{S}_1 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{41}),$$

und habe S_1, S_2, S_3, ... dieselbe Bedeutung [Gleichung (31)] für die erste, wie $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, ... für die zweite Gleichung. — Nach Gleichung (32) ist:

$$S_2 = \tfrac{1}{2}(39 + \sqrt{41}), \quad \mathfrak{S}_2 = \tfrac{1}{2}(39 - \sqrt{41});$$

nach Gleichung (38) ist:

$$S_3 = -2 + \sqrt{41}, \quad \mathfrak{S}_3 = -2 - \sqrt{41};$$

nach Gleichung (33):

$$S_4 = \tfrac{1}{2}(115 + 5\sqrt{41}), \quad \mathfrak{S}_4 = \tfrac{1}{2}(115 - 5\sqrt{41});$$

nach Gleichung (39):

$$S_5 = -8 + 3\sqrt{41}, \quad \mathfrak{S}_5 = -8 - 3\sqrt{41};$$

Digitized by Google

nach Gleichung (33):

$$S_6 = 189 + 10\sqrt{41}, \quad s_6 = 189 - 10\sqrt{41};$$

nach Gleichung (40):

$$S_7 = -32 + 10\sqrt{41}, \quad s_7 = -32 - 10\sqrt{41};$$

nach Gleichung (33):

$$S_8 = \tfrac{1}{2}(1307 + 77\sqrt{41}), \quad s_8 = \tfrac{1}{2}(1307 - 77\sqrt{41}).$$

Mittelst der Newton'schen Gleichungen und der Gleichungen (26) und (28) findet man nun:

$$\begin{aligned}
A_2 &= \tfrac{1}{2}(-9-\sqrt{41}), & B_2 &= \tfrac{1}{2}(-9+\sqrt{41});\\
A_3 &= \tfrac{1}{2}(7+7\sqrt{41}), & B_3 &= \tfrac{1}{2}(7-7\sqrt{41});\\
A_4 &= -2+2\sqrt{41}, & B_4 &= -2-2\sqrt{41};\\
A_5 &= -28-8\sqrt{41}, & B_5 &= -28+8\sqrt{41};\\
A_6 &= 33, & B_6 &= 33;\\
A_7 &= \tfrac{1}{2}(71+11\sqrt{41}), & B_7 &= \tfrac{1}{2}(71-11\sqrt{41});\\
A_8 &= -42-4\sqrt{41}, & B_8 &= -42+4\sqrt{41};\\
A_9 &= 5+2\sqrt{41}, & B_9 &= 5-2\sqrt{41};\\
A_{10} &= -1, & B_{10} &= -1.
\end{aligned}$$

Man sieht, dass man die wirkliche Gleichung des regulären 82-Ecks nicht zu kennen braucht, um die Zerlegung zu bewirken; dass sich A_1, B_1 finden lassen, wenn man von der Gleichung des 82-Ecks nur die ersten Glieder $x^{20} + x^{19} - 19x^{18} - \ldots$ kennt, werden wir §. 24. sehen.

§. 23.

Zieht man in irgend einem regulären Vielecke alle Seiten und Diagonalen, so lassen sich irgend zwei Diagonalen desselben stets als Gegenseiten (oder Diagonalen) eines Sehnenvierecks auffassen und darauf der Ptolemäische Lehrsatz anwenden. — Sind x_m, x_p (wofür man auch m, p setzen kann) zwei ungerade Diagonalen eines regulären $2(2n+1)$-Ecks, so giebt es unter den verschiedenen Sehnenvierecken, in denen x_m, x_p Gegenseiten sein können, zwei, die zugleich Parallel-Trapeze sind. In dem einen liegen x_m, x_p auf verschiedenen, in dem andern auf derselben Seite des Mittelpunktes. Im letzteren sind, wenn $m > s$ ist, die beiden andern Gegenseiten $= x_{\frac{1}{2}(m-s)}$; die beiden Diagonalen $= x_{\frac{1}{2}(m+s)}$, nach dem Ptolemäer also:

$$x_m \cdot x_s = x_{\frac{1}{2}(m+s)}^2 - x_{\frac{1}{2}(m-s)}^2,$$

Digitized by Google

eine Gleichung, die richtig bleibt, wenn man bloss die Zeiger schreibt:

$$m.s = \left(\frac{m+s}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-s}{2}\right)^2.$$

Diagonalen, deren Zeiger die Form $4\mu+3$ haben, sind als negativ zu betrachten; sind beide Zeiger m, s von der Form $4\mu+1$ oder $4\mu+3$, so ist das Produkt $x_m.x_s$ positiv; in der Differenz der Quadrate, die dem Produkte gleich ist, ist das Quadrat der Diagonale mit geradem Zeiger abzuziehen, denn

$$(4\mu+1)(4\sigma+1) = (2\mu+2\sigma+1)^2-(2\mu-2\sigma)^2$$

und

$$(4\mu+3)(4\sigma+3) = (2\mu+2\sigma+3)^2-(2\mu-2\sigma)^2.$$

Sind die Zeiger m, s nicht von gleicher Form, so ist das Produkt $x_m.x_s$ als negativ aufzufassen; in der Differenz der Quadrate aber, welcher das Produkt gleich wird, ist das Quadrat der Diagonale mit geradem Zeiger wiederum abzuziehen, denn

$$-(4\mu+3)(4\sigma+1) = (2\mu-2\sigma+1)^2-(2\mu+2\sigma+2)^2.$$

Im regulären $2(2n+1)$-Ecke ist jede Diagonale mit geradem Zeiger, wie x_{2m}, Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse der Durchmesser 2, dessen andere Kathete aber $= x_{2n+1-2m}$ ist; mithin kann man das Produkt zweier ungeraden Diagonalen immer gleich setzen der Summe der Quadrate zweier ungeraden Diagonalen desselben Vielecks weniger 4. Da aber das Quadrat jeder ungeraden Diagonale eines regulären $2(2n+1)$-Ecks gleich ist 2 plus (oder minus) einer andern ungeraden Diagonale des Vielecks, so ist das Produkt zweier ungeraden Diagonalen eines regulären $2(4n+1)$-Ecks stets gleich der positiven Summe [beim $2(4n+3)$-Ecke der negativen Summe] zweier andern ungeraden Diagonalen desselben Vielecks.

Hieraus folgt sogleich, dass sich das Produkt beliebig vieler ungeraden Diagonalen eines regulären $2(2n+1)$-Ecks im Allgemeinen stets als gleich ergeben wird mit der positiven oder negativen Summe ungerader Diagonalen desselben Vielecks. Es wird der Summe bisweilen noch 2 oder ein Vielfaches von 2 als Summand zuzusetzen sein; wäre z. B. $x_m.x_p = x_\mu + x_\pi$ gefunden und es soll $x_\mu.x_m.x_p$ gefunden werden, so ist dieses $= x_\mu^2 + x_\mu.x_\pi$; ist nun $x_\mu.x_\pi = x_r^2 + x_s^2 - 4$, so ist $x_\mu.x_m.x_p = x_\mu^2 + x_r^2 + x_s^2 - 4$, setzt man also statt des Quadrates jeder Diagonale 2 plus dem folgenden Gliede der Periode, so ist das Produkt der drei Diagonalen gleich 2 plus der Summe dreier Diagonalen.

Digitized by Google

Sind x_m, x_p, x_r, x_s, x_t,.... beliebige ungerade Diagonalen eines regulären $2(2n+1)$-Ecks die Wurzeln der Gleichung

$$x^\nu + A_1 . x^{\nu-1} + A_2 . x^{\nu-2} + ... + A_{\nu-1} . x + A_\nu = 0,$$

so werden sich die Coefficienten A_2, A_3, A_4, ... $A_{\nu-1}$, A_ν nicht bloss als Summen der zweiten, dritten, vierten, ... $(\nu-1)$ten, νten Combinationsklassen der Wurzeln darstellen lassen, sie werden sich auch als positive oder negative Summen bestimmter ungerader Diagonalen desselben Vielecks ergeben.

Man sieht auch, wie man jetzt die Summen der 2, 3, 4, 5,....ten Potenzen beliebiger ungerader Diagonalen eines regulären $2(2n+1)$-Ecks als Summen ungerader Diagonalen desselben Vielecks wird darstellen können.

§. 24.

Die Sätze in §. 23. geben das Mittel an die Hand, in einer Gleichung, deren Wurzeln bestimmte ungerade Diagonalen eines regulären $2(2n+1)$-Ecks sind, den Coefficienten des dritten Gliedes (A_2) als Summe von Diagonalen darzustellen. Beim regulären 82-Eck ist (cfr. §. 22.):

$$A_1 = -(1+5+9+21+23+25+31+33+37+39),$$

wenn man nur die Zeiger statt der Diagonalen setzt. A_2 ist die Summe der zweiten Combinations-Classe der Wurzeln, jede einzelne Combination als Produkt betrachtet. Bekanntlich erhält man 45 solcher Produkte; jedes der Produkte verwandle man nach §. 23. in eine Summe von Quadraten. Um die dabei sich ergebende Summe zu finden, addire man jeden Zeiger zu jedem folgenden und subtrahire ihn davon, dividire die Summe (Differenz) durch 2 und notire den Quotienten, wenn er eine ungerade Zahl ist; ziehe den Quotienten, wenn er eine gerade Zahl ist, von 41 ab und notire die Differenz; man erhält so eine Reihe Zeiger: die zugehörigen Diagonalen in's Quadrat erhoben und addirt geben $A_2 + 4.45$. Die dazu nöthige Rechnung sieht wie folgt aus:

3. 5. 11. 29. 13. 25. 17. 19. 21.	7. 13. 27. 15. 23. 19. 21. 19.
39. 37. 31. 11. 29. 15. 25. 23. 19	39. 33. 9. 31. 13. 27. 25. 17

15. 25. 17. 21. 21. 23. 17.	19. 23. 15. 27. 29. 11.	17. 27. 13 11. 31.
35. 7. 33. 11. 29. 27. 15	1. 39. 5. 35. 33. 9	1. 37. 5. 7. 33

13. 29. 31. 9.	9. 7. 35.	35. 5.	3.
3. 37. 35. 7	1. 3. 37	39. 3	1.

Digitized by Google

Man überzeugt sich bald, dass jedes Glied der ersten Periode sich viermal in der Reihe findet, jedes Glied der zweiten Periode aber fünfmal; setzt man also statt des Quadrates jedes Gliedes 2 plus dem folgenden Gliede der Periode, so ist:

$$A_2 = -4A_1 - 5B_1 = -4 - B_1, \text{ da } A_1 + B_1 = 1 \text{ ist,}$$

folglich:

$$\tfrac{1}{2}(A_1^2 + A_1 - 20) = -4 - B_1 \quad \text{oder} \quad A_1^2 + B_1 = 11;$$

ebenso:

$$B_1^2 + A_1 = 11,$$

folglich:

$$A_1 . B_1 = -10 \quad \text{und} \quad A_1 = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{41}), \quad B_1 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{41}),$$

da man aus den Zeigern der Diagonalen abnehmen kann, dass A_1, welches nur die drei negativen Diagonalen x_{23}, x_{31}, x_{39} enthält, negativ, B_1 aber positiv sein muss.

Statt A_2, B_2 zu suchen, konnte man auch direkt $A_1 . B_1$ auf gleiche Weise finden.

§. 25.

Beispiele der Zerlegung.

I. Die Gleichung des 26-Ecks:

$$x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1 = 0 \quad \text{(Periode 1. 11. 9. 5. 3. 7.)}$$

soll in zwei Gleichungen

$$x^3 + A_1 . x^2 + A_2 . x + A_3 = 0 \quad \text{(Wurzeln 1. 9. 3.)}$$

und

$$x^3 + B_1 . x^2 + B_2 . x + B_3 = 0 \quad \text{(Wurzeln 11. 5. 7.)}$$

zerlegt werden. Um A_2 zu finden, bildet man die Reihe $\begin{matrix} 5. & 11. & 7 \\ 9. & 1. & 3 \end{matrix}$, also ist $A_2 = -1 = B_2$. Da $A_2 = \tfrac{1}{2}(A_1^2 + B_1 - 6)$ (§. 16.), so ergiebt sich: $A_1^2 + B_1 = 4$, desgleichen $B_1^2 + A_1 = 4$, folglich: $A_1^2 + B_1^2 = 7$ und $A_1 . B_1 = -3$, $A_1 - B_1 = \pm\sqrt{13}$. Da A_1 negativ ist ($x_1 + x_3 + x_9$ ist positiv), so folgt:

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{13}), \quad B_1 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{13}).$$

Will man A_3 nach §. 23. berechnen, so ergiebt sich:

$$A_3 = - x_1 . x_9 . x_3 = - x_3(x_3 + x_5) = - (x_3^2 + x_9^2 + x_1^2 - 4)$$
$$= -(2 + x_7 + x_5 + x_{11}) = -(2 - B_1) = -\tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{13}),$$

oder die beiden Gleichungen sind:

$$x^3 + \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{13}) . x^2 - x + \tfrac{1}{2}(-3 + \sqrt{13}) = 0$$

und

$$x^3 + \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{13}) . x^2 - x + \tfrac{1}{2}(-3 - \sqrt{13}) = 0.$$

Man konnte natürlich auch $A_1 . B_1$ direkt aus den Zeigern berechnen.

Die obige Gleichung soll in drei Gleichungen zweiten Grades zerlegt werden.

Die gesuchten Gleichungen seien:

$x^2 + A_1 . x + A_2 = 0$ (Wurz. 1. 5.), $x^2 + B_1 . x + B_2 = 0$ (Wurz. 11. 3.),
$x^2 + C_1 . x + C_2 = 0$ (Wurz. 9. 7.). —

Man findet:

$A_2 = x_7 + x_9 = - C_1$, $B_2 = x_1 + x_5 = - A_1$, $C_2 = x_3 + x_{11} = - B_1$,

d. h. die drei Gleichungen lauten:

$x^2 + A_1 . x - C_1 = 0$, $x^2 + B_1 . x - A_1 = 0$, $x^2 + C_1 . x - B_1 = 0$.

Auf dem gewöhnlichen Wege der Elimination findet sich nun, dass die Gleichung $A_1^3 - A_1^2 - 4A_1 - 1 = 0$ zu lösen, um die Werthe für A_1, B_1, C_1 zu erhalten; da B_1 positiv, A_1, C_1 negativ sein müssen, der absolute Werth von A_1 aber grösser als der von C_1, so sieht man auch, wie die drei Werthe der obigen Gleichungen zu vertheilen seien.

II. Die Gleichung des 34-Ecks (cfr. §§. 16., 17.) ist nach der Methode der §§. 23., 24. zu zerlegen. Die eine Gleichung enthalte die Diagonalen 1. 15. 13. 9. als Wurzeln; man bildet die Reihe:

9. 7. 5.	3. 5.	11.
7. 11. 13	1. 3	15

und erhält:

$$A_2 = - A_1 - 2B_1 = - 1 - B_1, \text{ desgleichen } B_2 = - 1 - A_1,$$

da $A_2 + B_2 + A_1 . B_1 = -7$ ist, so folgt $A_1 . B_1 = -4$, und hieraus $A_1 = \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{17})$, $B_1 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{17})$. Dass A_4, $B_4 = -1$ sei, wissen wir aus §. 15. Zerlegen wir nun die Gleichung in vier Gleichungen zweiten Grades, nämlich in:

$x^2 + a_1 . x + a_2 = 0$ (mit den Wurzeln x_1, x_{13}),
$x^2 + b_1 . x + b_2 = 0$ (mit den Wurzeln x_{15}, x_9),

$$x^2 + \alpha_1 . x + \alpha_2 = 0 \text{ (mit den Wurzeln } x_3, x_5),$$
$$x^2 + \beta_1 . x + \beta_2 = 0 \text{ (mit den Wurzeln } x_{11}, x_7).$$

so erhält man:

$$a_2 = x_1 . x_{13} = x_3 + x_5 = -\alpha_1, \quad b_2 = x_9 . x_{15} = x_7 + x_{11} = -\beta_1;$$

da $a_2 . b_2 = -1 = \alpha_1 . \beta_1$ ist, so hat man die Gleichungen:

$$\alpha_1 + \beta_1 = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{17}), \quad \alpha_1 . \beta_1 = -1.$$

folglich:

$$\alpha_1 - \beta_1 = \pm \sqrt{\frac{17 + \sqrt{17}}{2}} = \pm \frac{\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{2};$$

da α_1 negativ, β_1 positiv ist, so ergiebt sich:

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}), \quad \beta_1 = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}).$$

Man findet ebenso $a_2 = -b_1$, $\beta_2 = -a_1$, folglich $a_1 . b_1 = -1$, $a_1 + b_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{17})$, d. h. $a_1 - b_1 = \pm \frac{1}{2}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}})$; da a_1 negativ, b_1 positiv ist, so ist:

$$a_1 = \tfrac{1}{4}(1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}), \quad b_1 = \tfrac{1}{4}(1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}),$$

d. h. die Coefficienten der vier gesuchten Gleichungen sind jetzt bestimmt.

III. Die Gleichung des 42-Ecks ist bereits in §. 8. in Factoren zerlegt worden. Der Factor $x^6 - x^5 - 6x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 8x + 1 = 0$ enthält als Wurzeln die Periode (1. 19. 17. 13. 5. 11.). Man zerlege in

$$x^3 + A_1 . x^2 + A_2 . x + A_3 = 0 \text{ (Wurzeln 1. 17. 5.)}$$

und

$$x^3 + B_1 . x^2 + B_2 . x + B_3 = 0 \text{ (Wurzeln 19. 13. 11.)}.$$

Man erhält nach der Methode des §. 24.:

$$A_2 = x_3 + x_9 + x_{15} + x_1 + x_5 + x_{17}.$$

Die Diagonalen x_3, x_9, x_{15} sind Wurzeln der Gleichung $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, folglich $x_3 + x_9 + x_{15} = -1$, also ist $A_2 = -1 - A_1$, $B_2 = -1 - B_1$, und da $A_2 + B_2 + A_1 . B_1 = -6$ ist, so ist weiter $A_1 . B_1 = -5$, folglich $A_1 - B_1 = \pm \sqrt{21}$; A_1 muss negativ, B_1 positiv sein, also ist:

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{21}), \quad B_1 = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{21});$$
$$A_2 = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{21}), \quad B_2 = \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{21}).$$

Es findet sich:

Digitized by Google

$$A_3 = -x_1 . x_{17} . x_5 = -x_5(x_3 + x_5) = -(x_{17}^2 + x_1^2 + x_6^2 - 4)$$
$$= -(2 - B_1) = -\tfrac{1}{2}(5 - \sqrt{21}),$$

die beiden Gleichungen sind also:

$$x^3 - \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{21})x^2 + \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{21})x - \tfrac{1}{2}(5 - \sqrt{21}) = 0$$

und

$$x^3 - \tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{21})x^2 + \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{21})x - \tfrac{1}{2}(5 + \sqrt{21}) = 0.$$

Soll dieselbe Gleichung in drei Gleichungen zweiten Grades zerlegt werden, so seien dieselben:

$$x^2 + A_1 . x + A_2 = 0 \text{ (mit den Wurzeln 1. 13.)},$$
$$x^2 + B_1 . x + B_2 = 0 \text{ (Wurzeln 19. 5.)},$$
$$x^2 + C_1 . x + C_2 = 0 \text{ (Wurzeln 17. 11.)}.$$

Man erhält:

$$A_2 = -1 + x_9, \quad B_2 = -1 + x_3, \quad C_2 = -1 + x_{15}.$$

Ist also die Gleichung $x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$, deren Wurzeln x_3, x_9, x_{15} sind, gelöst, so ist A_2, B_2, C_2 bestimmt, und wird sich dann A_1, B_1, C_1 aus den Gleichungen finden, die man erhält, wenn man die drei gesuchten Gleichungen multiplicirt und die erhaltenen Coefficienten mit denen der gegebenen Gleichung zusammenhält.

IV. Die Gleichung des 50-Ecks lautet, nachdem die Gleichung des 10-Ecks entfernt ist:

$$x^{10} - 10x^8 + 35x^6 + x^5 - 50x^4 - 5x^3 + 25x^2 + 5x - 1 = 0;$$

ihre Wurzeln bilden die Periode: 1. 23. 21. 17. 9. 7. 11. 3. 19. 13. Die Gleichung soll zerlegt werden in:

$$x^5 + A_1 . x^4 + A_2 . x^3 + A_3 . x^2 + A_4 . x + A_5 = 0 \text{ (mit den Wurz. 1.21.9.11.19.)}$$

und in:

$$x^5 + B_1 . x^4 + B_2 . x^3 + B_3 . x^2 + B_4 . x + B_5 = 0 \text{ (mit den Wurz. 23.17.7.3.13.)}.$$

Es ist $A_1 + B_1 = 0$; nach §. 24. findet man:

$$A_2 = 2(x_{23} + x_{17} + x_7 + x_3 + x_{13}) + 5(x_5 + x_{15}) = -2B_1 - 5,$$

desgleichen:

$$B_2 = -2A_1 - 5;$$

da nun:

$$A_2 + B_2 + A_1 . B_1 = -2(A_1 + B_1) - 10 + A_1 . B_1 = -1$$

ist, so ist:

$$A_1.B_1=0,\quad A_1=B_1=0,\quad A_2=-5,\quad B_2=-5.$$

Aus $A_3+A_2.B_1+A_1.B_2+B_3=0$ folgt $A_3+B_3=0$; aus $A_4+B_4+25=35$ folgt $A_4+B_4=10$; aus $A_5+A_4.B_1+A_3.B_2+A_2.B_3+A_1.B_4+B_5=1$ folgt $A_5+B_5=1$; da $A_5.B_5=-1$, so folgt $A_5=\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{5})$; es ist $A_5=-x_1.x_{21}.x_9.x_{11}.x_{19}$ negativ, da x_{11} und x_{19} negativ sind, also ist $A_5=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$, $B_5=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$; aus $A_4.B_5+A_5.B_4=5$, im Verein mit $A_4+B_4=10$, folgt $A_4=B_4=5$; aus $A_3.B_3-5A_4-5B_4=-50$ folgt $A_3.B_3=0$, folglich $A_3=B_3=0$, oder die gesuchten Gleichungen sind:

$$x^5-5x^3+5x+\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})=0 \quad\text{und}\quad x^5-5x^3+5x+\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})=0.$$

Weil $A_1=B_1=0$, so folgt für das reguläre 50-Eck, wenn man die Diagonalen nur nach ihrem absoluten Werthe nimmt, dass $x_1+x_9+x_{21}=x_{11}+x_{19}$ und $x_3+x_7+x_{23}=x_{13}+x_{17}$ sei.

V. Ist aus der Gleichung des 54-Ecks die des 18-Ecks entfernt, so bleibt:

$$x^9-9x^7+27x^5-30x^3+9x-1=0;$$

die Wurzeln dieser Gleichung bilden die Periode

1. 25. 23. 19. 11. 5. 17. 7. 13.

Die Gleichung soll in drei Gleichungen zerlegt werden:

$x^3+A_1.x^2+A_2.x+A_3=0$ (mit den Wurzeln 1. 19. 17.),

$x^3+B_1.x^2+B_2.x+B_3=0$ (mit den Wurzeln 25. 11. 7.),

$x^3+C_1.x^2+C_2.x+C_3=0$ (mit den Wurzeln 23. 5. 13.).

Man findet:

$$A_1.B_1=-3(x_3+x_{21}+x_{13})-3(x_1+x_{19}+x_{17})=-3A_1,$$
$$A_1.C_1=-3C_1,\quad B_1.C_1=-3B_1;$$

da aber $A_1+B_1+C_1=0$, so ist $A_1=B_1=C_1=0$. Ferner ist $A_2=-12+3x_9^2+x_1^2+x_{19}^2+x_{17}^2=-3$, $B_2=-3$, $C_2=-3$; endlich $A_3=-x_1.x_{19}.x_{17}=-x_{17}(-x_{10}^2+x_9^2)=x_{17}(1+x_7)=x_{17}+x_5^2-x_{12}^2=x_{17}+x_5^2+x_{15}^2-4=-x_3$, desgleichen $B_3=-x_{21}$, $C_3=-x_{15}$, d. h. es sind A_3, B_3, C_3 die Wurzeln der Gleichung $x^3-3x+1=0$; sind diese gefunden, so sind

$$x^3-3x-x_3=0,\quad x^3-3x-x_{21}=0,\quad x^3-3x-x_{15}=0$$

die drei gesuchten Gleichungen.

Digitized by Google

VI. Die Gleichung des 62-Ecks:

$$x^{15}-x^{14}-14x^{13}+13x^{12}+78x^{11}-66x^{10}-220x^{9}+168x^{8}$$
$$+330x^{7}-210x^{6}-255x^{5}+126x^{4}+84x^{3}-28x^{2}-8x+1=0$$

hat 15 Wurzeln, die drei Perioden bilden. Die Gleichung soll in drei Gleichungen zerlegt werden:

$$x^5+A_1.x^4+A_2.x^3+A_3.x^2+A_4.x+A_5=0 \text{ (Wurz. } x_1, x_{29}, x_{27}, x_{23}, x_{15}),$$
$$x^5+B_1.x^4+B_2.x^3+B_3.x^2+B_4.x+B_5=0 \text{ (Wurz. } x_3, x_{25}, x_{19}, x_7, x_{17}),$$
$$x^5+C_1.x^4+C_2.x^3+C_3.x^2+C_4.x+C_5=0 \text{ (Wurz. } x_5, x_{21}, x_{11}, x_9, x_{13}).$$

Man findet:

$$A_2 = A_1+2B_1+C_1 = B_1-1 = \tfrac{1}{2}(A_1^2-A_1-10);$$

folglich:

$$A_1^2 = 8+A_1+2B_1;$$

desgleichen:

$$B_1^2 = 8+B_1+2C_1; \quad C_1^2 = 8+C_1+2A_1;$$

hieraus ergeben sich im Verein mit $A_1+B_1+C_1=-1$ die Gleichungen:

$$A_1.B_1 = -4-2B_1; \quad B_1.C_1 = -4-2C_1; \quad C_1.A_1 = -4-2A_1,$$

und eliminirt man B_1, C_1, so erhält man:

$$A_1^3+A_1^2-10A_1-8=0;$$

die Gleichung hat drei reelle Wurzeln, die positive bezeichne man mit z_a, sie giebt den Werth für A_1, denn es ist

$$A_1 = -(x_1+x_{29}+x_{27}+x_{23}+x_{15})$$

positiv; von den negativen Wurzeln bezeichne man die absolut grössere mit z_c, die kleinere mit z_b, so ist:

$$C_1 = z_c, \quad B_1 = z_b;$$

A_2, B_2, C_2 sind jetzt auch bekannt; A_5, B_5, C_5 sind $=+1$. A_3, A_4; B_3, B_4; C_3, C_4 ergeben sich ohne Schwierigkeit aus den Gleichungen des §. 15. gegen Ende.

VII. Die Gleichung des 66-Ecks lautet, nachdem der Factor $x+1$ entfernt:

$$x^{15}-15x^{13}+x^{12}+90x^{11}-12x^{10}-274x^{9}+54x^{8}$$
$$+441x^{7}-111x^{6}-351x^{5}+99x^{4}+111x^{3}-27x^{2}-9x+1=0.$$

Nach §. 13. bilden die 15 Wurzeln drei Perioden zu fünf Gliedern. — Man soll die Gleichung zerlegen in:

$$x^5 + A_1 . x^4 + A_2 . x^3 + A_3 . x^2 + A_4 . x + A_5 = 0$$

(Wurzeln x_1, x_{31}, x_{29}, x_{25}, x_{17}),

$$x^5 + B_1 . x^4 + B_2 . x^3 + B_3 . x^2 + B_4 . x + B_5 = 0$$

(Wurzeln x_3, x_{27}, x_{21}, x_9, x_{15}),

$$x^5 + C_1 . x^4 + C_2 . x^3 + C_3 . x^2 + C_4 . x + C_5 = 0$$

(Wurzeln x_5, x_{23}, x_{13}, x_7, x_{19}).

Man findet:

$$A_2 = -A_1 - 2B_1 - C_1 = -B_1; \quad B_2 = -4B_1; \quad C_2 = -B_1.$$

Aus der zweiten dieser Gleichungen folgt:

$$B_1^2 + B_1 - 10 = -8B_1$$

oder:

$$B_1 = -\frac{9}{2} \pm \frac{11}{2}.$$

Da die Summe der Wurzeln x_3, x_{27}, x_{21}, x_9, x_{15} negativ, B_1 also positiv sein muss, so folgt:

$$B_1 = +1, \quad B_2 = -4;$$

aus den Gleichungen (29), (30) ergiebt sich:

$$B_3 = -3, \quad B_4 = +3,$$

d. h. die Gleichung lautet:

$$x^5 + x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0,$$

eine Gleichung, die sich auch daraus ergiebt, dass die Wurzeln derselben die ungeraden Diagonalen des regulären 22-Ecks sind. Aus $A_2 = -B_1$ folgt:

$$A_1^2 + A_1 = 8 \quad \text{oder} \quad A_1 = \tfrac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{33});$$

da A_1 negativ sein muss, so ist:

$$A_1 = \tfrac{1}{2}(-1 - \sqrt{33}), \quad C_1 = \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{33}), \quad A_2 = C_2 = -1.$$

Es findet sich aus (29), (30):

$$A_3 = \tfrac{1}{2}(9 + 3\sqrt{33}), \quad A_4 = -6 - \sqrt{33} \text{ u. s. w.};$$

die gesuchten Gleichungen sind also:

$$x^5 - \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{33})\,x^4 - x^3 + \tfrac{1}{2}(9 + 3\sqrt{33})x^2 - (6 + \sqrt{33})\,x + 1 = 0$$

Digitized by Google

und

$$x^6 - \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{33})x^4 - x^3 + \tfrac{1}{2}(9-3\sqrt{33})x^2 - (6-\sqrt{33})x + 1 = 0.$$

§. 26.

Gegen die im Vorhergehenden angewendete Zerlegung lässt sich der Einwand erheben, sie sei in vielen Fällen sehr breit und ihre Benutzung zeitraubend. Wollte man nach ihr z. B. die Gleichung des regulären 386-Ecks, dessen Diagonalen zwei Perioden von 48 Gliedern bilden, in zwei Gleichungen:

$$x^{48} + A_1 . x^{47} + \ldots . = 0 \quad \text{und} \quad x^{48} + B_1 . x^{47} + \ldots . = 0$$

zerlegen, so müsste man zur Berechnung von $A_1 . B_1$, selbst wenn man die nöthigen Additionen, Subtractionen, Divisionen durch 2 nicht rechnet, 4608 Zahlen schreiben. — Diese allerdings bedeutende Arbeit wird aber durch Anwendung des folgenden Satzes und der daraus zu ziehenden Folgerungen sehr verringert:

> Bezeichnet man die Diagonalen eines regulären $2(2n+1)$-Ecks nur mit ihren Zeigern, und sind a, b zwei der ungeraden Diagonalen des Vielecks, die entweder derselben oder verschiedenen Perioden angehören, hat man ferner gefunden, es sei $a.b = r^2 + s^2 - 4$, es sind also r, s ungerade Diagonalen desselben Vielecks, folgt auf a in seiner Periode c, auf b aber d und es ist $c.d = x^2 + y^2 - 4$, so folgt in der Periode, zu der r gehört, auf r entweder x, und dann folgt auf s auch y, oder es folgt y auf r und x auf s in den betreffenden Perioden.

Die Diagonalen a, b haben entweder die Form $4\mu+1$ oder $4\mu+3$; auf jede Diagonale $2m+1$ folgt im $2(4n+1)$-Ecke (für dieses soll der Beweis geführt werden, er ist ganz ähnlich für die $2(4n+3)$-Ecke zu führen) entweder $4(n-m)-1$ oder $4(m-n)+1$. — Die verschiedenen hier möglichen Fälle sind:

I. Es ist:

$$a = 4m+1,\ b = 4\mu+1,\ a.b = (2m+2\mu+1)^2 + (4n+1-2m+2\mu)^2 - 4;$$

nun sei:

1) $c = 4(n-2m) - 1$ und $d = 4(n-2\mu) - 1$,

dann ist:

$$c.d = (4n-4m-4\mu-1)^2 + (4n+1-4m+4\mu)^2 - 4;$$

2) $c = 4(n-2m)-1$ und $d = 4(2\mu-n)+1$,

dann ist:

$$c.d = (4n+1+4m-4\mu)^2 + (4n-4m-4\mu-1)^2 - 4;$$

3) $c = 4(2m-n)+1$ und $d = 4(2\mu-n)+1$,

dann ist:

$$c.d = (4m+4\mu-4n+1)^2 + (4n+1-4m+4\mu)^2 - 4.$$

II. Es ist:

$a = 4m+1$, $b = 4\mu+3$, $a.b = (2m-2\mu-1)^2 + (4n-1-2m-2\mu)^2 - 4$;

nun sei:

1) $c = 4(n-2m)-1$ und $d = 4(n-2\mu-1)-1$,

dann ist:

$$c.d = (4n-4m-4\mu-3)^2 + (4n+4m-4\mu-1)^2 - 4;$$

2) $c = 4(n-2m)-1$ und $d = 4(2\mu+1-n)+1$,

dann ist:

$$c.d = (4n+4m-4\mu-1)^2 + (4n-4m-4\mu-3)^2 - 4;$$

3) $c = 4(2m-n)+1$ und $d = 4(2\mu+1-n)+1$,

dann ist:

$$c.d = (4m+4\mu-4n+3)^2 + (4n+1+4m-4\mu)^2 - 4.$$

III. Es ist:

$a = 4m+3$, $b = 4\mu+3$, $a.b = (2m+2\mu+3)^2 + (4n+1-2m+2\mu)^2 - 4$;

nun sei:

1) $c = 4(n-2m-1)-1$ und $d = 4(n-2\mu-1)-1$,

dann ist:

$$c.d = (4n-4m-4\mu-5)^2 + (4n+1-4m+4\mu)^2 - 4;$$

2) $c = 4(n-2m-1)-1$ und $d = 4(2\mu+1-n)+1$,

dann ist:

$$c.d = (4n+1-4m+4\mu)^2 + (4n-4m-4\mu-5)^2 - 4;$$

3) $c = 4(2m+1-n)+1$ und $d = 4(2\mu+1-n)+1$,

dann ist:

Digitized by Google

$$c.d = (4m + 4\mu - 4n + 5)^2 + (4n + 1 - 4m + 4\mu)^2 - 4,$$

und man überzeugt sich leicht, dass in der That die Glieder, die dem Produkte $c.d$ entsprechen, in ihren Perioden folgen den Gliedern, die dem Produkte $a.b$ gleich sind. Cfr. §. 14.

Statt r^2, s^2, x^2, y^2 aber lässt sich setzen $2 \pm$ dem in der Periode folgenden Gliede, und geschieht dieses, so kann man folgenden Satz aufstellen:

> Folgt in einer der Perioden der ungeraden Diagonalen eines regulären Vielecks x_c auf x_a, und in derselben oder in einer anderen Periode desselben Vielecks x_d auf x_b, setzt man statt der Produkte $x_a.x_b$ und $x_c.x_d$ die ihr gleiche positive (negative) Summe zweier ungeraden Diagonalen desselben Vielecks, ist also:
>
> $$x_a.x_b = \pm (x_\alpha + x_\beta), \quad x_c.x_d = \pm (x_\gamma + x_\delta),$$
>
> so folgt in der betreffenden Periode x_γ entweder auf x_α und dann folgt x_δ auf x_β, oder es folgt x_γ auf x_β und dann folgt x_δ auf x_α.

Es seien x_m, x_n, x_p, x_r, ... x_s, x_t die auf einander folgenden Glieder einer Periode, ihre Summe $= - A_1$; x_μ, x_ν, x_π, x_ϱ, ... x_σ, x_τ die auf einander folgenden Glieder einer anderen Periode desselben Vielecks, ihre Summe $= - B_1$; das Produkt $A_1 . B_1$ kann man dann schreiben:

$$\begin{array}{l}
x_\mu.x_m + x_\nu.x_n + x_\pi.x_p + x_\varrho.x_r + \ldots + x_\sigma.x_s + x_\tau.x_t + \\
x_\mu.x_n + x_\nu.x_p + x_\pi.x_r + \ldots\ldots\ldots\ldots + x_\sigma.x_t + x_\tau.x_m + \\
x_\mu.x_p + x_\nu.x_r + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_\sigma.x_m + x_\tau.x_n + \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_\mu.x_t + x_\nu.x_m + x_\pi.x_n + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + x_\tau.x_s.
\end{array}$$

Dass diese Summe das verlangte Produkt darstellt, geht daraus hervor, dass jede Vertikalreihe die Produkte enthält aus demselben Summanden der zweiten Periode in die sämmtlichen Summanden der ersten Periode. Die Produkte jeder Horizontalreihe stehen aber in solcher Ordnung hintereinander, dass die Factoren des folgenden Produktes die Glieder der Perioden sind, die auf die Factoren des vorhergehenden Produktes folgen; denkt man also statt jedes Produktes die positive oder negative Summe der beiden Diagonalen gesetzt, mit der das Produkt gleich ist, so bilden diese Summen die auf einander folgenden Glieder zweier Perioden des Vielecks, statt jeder Horizontalreihe ist also die positive oder negative Summe zweier Perioden des Vielecks zu

Digitized by Google

setzen; um aber zu wissen, welche Perioden man zu addiren habe, braucht man nur ein Glied der Periode zu kennen, d. h. man hat nur eine der Vertikalreihen etwa die erste in der Art umzuformen, dass man statt jedes Produktes die ihm gleiche Summe sucht. Setzt man dann statt jedes dabei sich ergebenden Gliedes die Summe der zugehörigen Periode, so ergiebt sich durch Addition dieser Perioden die Grösse $A_1 . B_1$. Hierbei ist angenommen, es hätten alle Perioden des Vielecks gleiche Gliederzahl; haben einzelne Perioden weniger Glieder, so weiss man doch, dass die Zahl ihrer Glieder ein Theiler ist von der Gliederzahl der Hauptperiode; findet sich also ein Glied aus einer dieser Perioden, so wird sich leicht berechnen lassen, das Wievielfache der Summe der Periode statt des betreffenden Gliedes zu setzen sei.

Hätte man in §. 24. beim regulären 82-Eck $A_1 . B_1$ finden wollen nach der dort angewandten Methode, so hatte man 200 Zahlen zu schreiben. Die Rechnung stellt sich jetzt einfacher. Aus der ersten Periode nehme man den Zeiger 1; und verbinde ihn mit den Zeigern 3. 35. 29. 17. 7. 27. 13. 15. 11. 19 der zweiten Periode; und bilde folgende Reihe:

39. 23. 15. 9. 37. 27. 7. 33. 35. 31.
1. 17. 27. 33. 3. 13. 35. 7. 5. 9.

Es finden sich in derselben 10 Zeiger der ersten, 10 Zeiger der zweiten Periode, mithin ist:

$$A_1 . B_1 = -10(A_1 + B_1) = -10. \quad \text{Cfr. §. 28.}$$

Beim regulären 66-Eck (cfr. §. 25. VII, die dasigen Bezeichnungen sollen beibehalten werden) soll $A_1 . C_1$ gefunden werden. Aus dem Zeiger 1 der ersten und den Zeigern 5. 23. 13. 7. 19 der dritten Periode bilde man die Reihe $\begin{matrix} 3. & 21. & 7. & 29. & 23. \\ 31. & 11. & 27. & 3. & 9. \end{matrix}$ Zwei Zeiger 31. 29. finden sich aus der ersten Periode, sie geben $-2A_1$; zwei Zeiger 7. 23. aus der dritten Periode, sie geben $-2C_1$; fünf Zeiger 3. 3. 27. 21. 9. gehören der zweiten Periode an, sie geben $-5B_1$, oder da $B_1 = 1$ ist -5; ausserdem findet sich der Zeiger 11; x_{11} bildet eine Periode von einem Gliede, der Zeiger ist also gleichbedeutend mit $5x_{11} = -5$ oder es ist:

$$A_1 . C_1 = -10 - 2(A_1 + C_1) = -8.$$

§. 27.

Eine Periode der Diagonalen eines regulären Vielecks habe $3m$ Glieder; die verschiedenen Diagonalen unterscheide man durch

Digitized by Google

die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... $3m$, welche also nur die Stelle angeben, an der die einzelnen Diagonalen in der Periode stehen; die Gleichung, deren Wurzeln diese $3m$ Diagonalen sind, soll in drei Gleichungen zerlegt werden, nämlich in:

$$x^m + a_1 . x^{m-1} + a_2 . x^{m-2} + \dots = 0$$

mit den Wurzeln 1, 4, 7, 10, ... $3m-5$, $3m-2$,

$$x^m + b_1 . x^{m-1} + b_2 . x^{m-2} + \dots = 0$$

mit den Wurzeln 2, 5, 8, 11, ... $3m-4$, $3m-1$,

$$x^m + c_1 . x^{m-1} + c_2 . x^{m-2} + \dots = 0$$

mit den Wurzeln 3, 6, 9, 12, ... $3m-3$, $3m$.

Da $a_1 + b_1 + c_1$ bekannt, so ist a_1, b_1, c_1 bestimmt, so wie $a_1 . b_1$, $b_1 . c_1$, $c_1 . a_1$ bekannt sind. Man denke aus den Diagonalen folgende Reihen von Produkten gebildet:

$$\begin{array}{llllll}
1.2, & 2.3, & 3.4, & 4.5, & \dots (3m-2)(3m-1), & (3m-1).(3m), \quad (3m).1, \\
1.5, & 2.6, & 3.7, & 4.8, & \dots (3m-2).2, & (3m-1).3, \quad (3m).4, \\
1.8, & 2.9, & 3.10, & 4.11, & \dots (3m-2).5, & (3m-1).6, \quad (3m).7, \\
1.11, & 2.12, & 3.13, & 4.14, & \dots (3m-2).8, & (3m-1).9, \quad (3m).10, \\
\dots & & & & & \\
1.(3m-1), & 2.(3m), & 3.1, & 4.2, & \dots (3m-2)(3m-4), & (3m-1)(3m-3), \\
& & & & (3m).(3m-2). &
\end{array}$$

Man übersieht, dass die Summen der Produkte aus den Vertikalreihen 1, 4, 7, 10, ... $3m-5$, $3m-2$ die Grösse $a_1 . b_1$, die Summe der Vertikalreihen 2, 5, 8, 11, ... $3m-4$, $3m-1$ die Grösse $b_1 . c_1$, die Summe der übrigen Vertikalreihen aber $c_1 . a_1$ giebt. — Setzt man statt jedes Produktes die ihr gleiche positive oder negative Summe zweier ungeraden Diagonalen, so stellt jede Horizontalreihe zwei Perioden dar; welche Perioden es seien, sieht man aus einem ihrer Glieder; d. h. die Perioden sind gefunden, so wie man jedes Produkt einer der Vertikalreihen, etwa der ersten in eine Summe zweier Diagonalen verwandelt. Man habe also etwa gefunden

$1.2 = \pm (x_r + x_\varrho)$; $1.5 = \pm (x_p + x_\pi)$; $1.8 = \pm (x_s + x_\sigma)$ u. s. w.

Ist nun x_r ein Glied der Periode, deren Gleichung eben zerlegt werden soll und es gehörte zu den Gliedern, deren negative Summe $= -a_1$ gesetzt wurde, so ist wegen dieses Gliedes unter die Summanden, deren Summe $= a_1 . b_1$ ist, aufzunehmen $\mp a_1$, unter die Summanden, deren Summe $= b_1 . c_1$ ist, gehört dann $\mp b_1$, und zu den Summanden, deren Summe $= c_1 . a_1$ ist, $\mp c_1$. Ist

x_r ein Glied aus der Zahl derer, deren negative Summe $= -b_1$ war, so gehört $\mp b_1$ als ein Summand zu $a_1.b_1$; $\mp c_1$ desgl. zu $b_1.c_1$; $\mp a_1$ aber zu $c_1.a_1$ u. s. w. Die Sache verhält sich auf ähnliche Weise, wenn x_r zu einer Periode gehört, die mit der Periode, deren Gleichung wir zerlegen wollen, gleiche Gliederzahl hat; aus dem einen Gliede ergeben sich unmittelbar die Diagonalen, deren Summe unter die Summanden von $a_1.b_1$, $b_1.c_1$, $c_1.a_1$ aufzunehmen sind. — Ist aber x_r einer Periode angehörig, die weniger Glieder hat, so wird sich leicht bestimmen lassen, welche Glieder derselben und in welcher Zahl jedes den Summen zuzuzählen sind, die gleich $a_1.b_1$, $b_1.c_1$, $c_1.a_1$ sind.

Dasselbe Verfahren lässt sich aber auch anwenden, wenn die Periode $5m$, $7m$, ... Glieder hat, man hat nur bei $5m$ Gliedern z. B. die erste Vertikal-Reihe in 1.2, 1.7, 1.12, 1.17 .... umzuändern, und findet durch Verwandlung dieser Produkte in Summen unmittelbar die Werthe von $a_1.b_1$, $b_1.c_1$, $c_1.d_1$, $d_1.e_1$, $e_1.a_1$.

Die Diagonalen des 70-Ecks bilden 3 Perioden. Periode I. enthält die Diagonalen 4. 21; Periode II. die Diagonalen 5. 25. 15 (14-Eck); Periode III. die Diagonalen 1. 33. 31. 27. 19. 3. 29. 23. 11. 13. 9. 17. Die negative Summe der Glieder der dritten Periode ist nach §. 8. $= 1$. Die Gleichung, deren Wurzeln die Glieder der dritten Periode sind, soll in 3 Gleichungen zerlegt werden. Man setze:

$$-a_1 = x_1 + x_{27} + x_{29} + x_{13};\ -b_1 = x_{33} + x_{19} + x_{23} + x_9;$$
$$-c = x_{31} + x_3 + x_{11} + x_{17}.$$

Verbindet man den Zeiger 1 mit den Zeigern 33, 19, 23, 9 so erhält man die Reihen:

17. 25. 23. 5.
19. 9. 11. 31.'

oder wenn man statt der Quadrate die in der Periode folgenden Glieder setzt:

1. 15. 11. 25.
3. 17. 13. 27.

Die Zahlen 1, 13, 27 gehören zu a_1; 3, 17, 11 zu c_1; 15, 25 gehören der Periode II. zu, die aus drei Gliedern besteht, während Periode III. 12 Glieder enthält, mithin ist:

$$a_1.b_1 = 3a_1 + 3c_1 - 4(x_{15} + x_{25});\quad b_1.c_1 = 3b_1 + 3a_1 - 4(x_5 + x_{15});$$
$$c_1.a_1 = 3c_1 + 3b_1 - 4(x_{25} + x_5);$$

Digitized by Google

sind also x_5, x_{15}, x_{25} bestimmt, so lassen sich auch a_1, b_1, c_1 finden.

§. 28.

Bei einer Anzahl regulärer $2(4n+1)$-Ecke bilden sämmtliche $2n$ ungerade Diagonalen eine einzige Periode. (26, 58, 74, 106, 122, ... -Eck gehören dazu.) Die Summe aller ungeraden Diagonalen eines solchen Vielecks ist $= -1$ [Gleichung (21)]. Die negative Summe der an den ungeraden Stellen der Periode stehenden Diagonalen sei a_1; die negative Summe der an den geraden Stellen stehenden Diagonalen sei b_1; also $a_1 + b_1 = 1$. Man bilde folgende Reihe von Produkten:

$$1.2, 2.3, 3.4, 4.5, \ldots (2n-3)(2n-2), (2n-2)(2n-1), \quad (2n-1)(2n), \quad 2n.1,$$
$$1.4, 2.5, 3.6, 4.7, \ldots (2n-3)(2n), \quad (2n-2).1, \quad (2n-1).2, \quad 2n.3,$$
$$1.6, 2.7, 3.8, 4.9, \ldots (2n3).2, \quad (2n-2).3, \quad (2n-1).4, \quad 2n.5,$$

. . . .

$$1.2n, \; 2.1, \; 3.2, \; 4.3, \ldots (2n-3)(2n-4), \; (2n-2)(2n-3),$$
$$(2n-1)(2n-2), \; 2n(2n-1).$$

Die n Vertikalreihen, die an den ungeraden Stellen *stehen*, addirt geben $a_1.b_1$; ebenso gross ist die Summe der n Vertikalreihen, die an den geraden Stellen stehen; die Gesammtheit aller Produkte ist also $2a_1.b_1$. Setzt man statt jedes Produktes die Summe der beiden Diagonalen, die dem Produkte gleich ist, so ist die Summe jeder Horizontalreihe gleich der doppelten Summe aller ungeraden Diagonalen des Vielecks; da also n Horizontalreihen vorhanden sind, so ist:

$$a_1.b_1 = -n \text{ oder } a_1 = \tfrac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1+4n}), \; b_1 = \tfrac{1}{2}(1 \mp \sqrt{1+4n}).$$

§. 29.

Die Zusammenstellung von Produkten immer zweier Diagonalen, wie sie in §. 27. gegeben, zeigt in dem Falle, wo das betreffende Vieleck $3m$ Diagonalen hat, die sämmtlich nur eine Periode bilden (ein Fall, der bei dem 38, 74, 122, 134, ... -Eck vorliegt), dass $a_1.b_1 + b_1.c_1 + c_1.a_1 = -2m$ sei. Dass die Summe aller jener Produkte $= a_1.b_1 + b_1.c_1 + c_1.a_1$ sei, ist schon §. 27. gezeigt. Setzt man statt jedes Produktes die entsprechende Summe zweier Diagonalen, so stellt jede der m Horizontalreihen dieselbe Periode aller ungeraden Diagonalen des Vielecks zwei-

mal genommen dar; bei den $2(4n+1)$-Ecken ist diese Summe mit dem Vorzeichen $+$, bei den $2(4n+3)$-Ecken mit dem Vorzeichen $-$ zu versehen; da aber im $2(4n+1)$-Ecke die negative Summe dieser Diagonalen $= +1$, bei dem $2(4n+3)$-Ecke $= -1$ ist, so ist in beiden Fällen $a_1.b_1 + b_1.c_1 + c_1.a_1 = -2m$.

Diese Summe lässt sich aber in diesem Falle noch auf andere Art finden. Bedeuten α, β, γ positive oder negative ganze Zahlen, auch 0, so ergiebt sich nach §. 27.:

$$\left.\begin{aligned} a_1.b_1 &= \alpha.a_1 + \beta.b_1 + \gamma.c_1 \\ b_1.c_1 &= \alpha.b_1 + \beta.c_1 + \gamma.a_1 \\ c_1.a_1 &= \alpha.c_1 + \alpha.a_1 + \gamma.b_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (A)$$

$$a_1.b_1 + b_1.c_1 + c_1.a_1 = (\alpha+\beta+\gamma)(a_1+b_1+c_1) = \pm(\alpha+\beta+\gamma).$$

Multiplicirt man die drei Gleichungen in (A) respective mit c_1, a_1, b_1, so ergiebt sich:

$$3a_1.b_1.c_1 = (\alpha+\beta)(a_1.b_1 + b_1.c_1 + c_1.a_1) + \gamma(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2).$$

Nun ist:

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 - 2(a_1.b_1 + b_1.c_1 + c_1.a_1),$$

folglich:

$$3a_1.b_1.c_1 = (\alpha+\beta-2\gamma)(a_1.b_1 + b_1.c_1 + c_1.a_1) + \gamma,$$

d. h. a_1, b_1, c_1 ergeben sich als Wurzeln einer Gleichung dritten Grades.

Hat ein reguläres $2(2n+1)$-Eck $5m$ ungerade Diagonalen, die nur eine Periode bilden, so kann man sich durch ein dem Vorhergehenden ähnliches Verfahren überzeugen, dass die Zerlegung der Gleichung des Vielecks in 5 Gleichungen von der Lösung einer Gleichung fünften Grades abhängig ist.

Die Periode der Diagonalen des regulären 38-Ecks lautet:

1. 17. 15. 11. 3. 13. 7. 5. 9;

man setze:

$$-a_1 = x_1 + x_{11} + x_7; \quad -b_1 = x_{17} + x_3 + x_5; \quad -c_1 = x_{15} + x_{13} + x_9.$$

Man findet:

$$a_1.b_1 = 1a_1 + 2b_1 + 3c_1,$$

folglich ist:

$$a_1.b_1 + b_1.c_1 + c_1.a_1 = -6, \quad \text{da } a_1 + b_1 + c_1 = -1$$

Digitized by Google

ist; und

$$3a_1 . b_1 . c_1 = 21,$$

also ist:

$$x^3 + x^2 - 6x - 7 = 0$$

zu lösen; die Wurzeln der Gleichungen geben die Werthe für a_1, b_1, c_1. —

Die Periode der Diagonalen des regulären 74-Ecks lautet:

1. 35. 33. 29. 21. 5. 27. 17. 3. 31. 25. 13. 11. 15. 7. 23. 9. 19;

man setze:

$$-a_1 = x_1 + x_{29} + x_{27} + x_{31} + x_{11} + x_{23};$$
$$-b_1 = x_{35} + x_{21} + x_{17} + x_{25} + x_{15} + x_9;$$
$$-c_1 = x_{33} + x_5 + x_3 + x_{13} + x_7 + x_{19}.$$

Es ist:

$$a_1 + b_1 + c_1 = 1; \; a_1 . b_1 = -5a_1 - 4b_1 - 3c_1;$$

also:

$$a_1 . b_1 + b_1 . c_1 + c_1 . a_1 = -12; \; a_1 . b_1 . c_1 = 11;$$

oder die Wurzeln von $x^3 - x^2 - 12x - 11 = 0$ geben die Werthe von a_1, b_1, c_1. —

§. 30.

Die Diagonalen des regulären 146-Ecks bilden 4 Perioden (cfr. §. 13.); während sich in Periode I. der Zeiger 1 findet, hat man in Periode III. den Zeiger 5, in Periode II. den Zeiger 25, dabei aber auch den Zeiger 3, in Periode IV. den Zeiger 15, dabei auch den Zeiger 11; in Periode I. ist auch der Zeiger 55; stellt man also die Perioden in folgender Reihe hinter einander: I., III., II., IV., I., so findet sich in jeder Periode ein Zeiger, der das Fünffache ist von einem Zeiger der vorhergehenden Periode. Stellt man die Perioden des regulären 514-Ecks in folgender Reihe hinter einander I., IX., II., X., III., XI., IV., XII., V., XIII., VI., XIV., VII., XV., VIII., XVI., I., so ist in jeder Periode ein Zeiger, der das Dreifache ist von einem Zeiger der vorhergehenden Periode. — Es seien a_1, a_2, a_3, ... Zeiger auf einander folgender Glieder einer; b_1, b_2, b_3, ... eben solche Zeiger einer andern oder auch derselben Periode eines regulären $2(2n+1)$-Ecks; ferner sei $b_1 = (2m+1)a_1$. Aus §. 14. ist bekannt, dass

$$2a_1 \equiv \pm a_2; \; 2a_2 \equiv \pm a_3; \; .... \; 2b_1 \equiv \pm b_2; \; 2b_2 \equiv \pm b_3; \; .... \; (\text{Mod.} 2n+1).$$

Digitized by Google

folglich ist auch:

$$\pm b_2 \equiv 2b_1 \equiv 2(m+1)a_1 \equiv (2m+1)a_2\,;\ \pm b_3 \equiv 2(2m+1a_2 \equiv (2m+1)a_3\,;\ \ldots\ (\text{Mod. } 2n+1);$$

oder man erhält den Satz:

> Sind a, b die Zeiger irgend zweier ungeraden Diagonalen eines regulären $2(2n+1)$-Ecks, auf welche in ihren Perioden respective α, β folgen, und es gilt zwischen a, b die Congruenz $\pm b \equiv (2m+1)a$ (Mod. $2n+1$), so ist auch $\pm \beta \equiv (2m+1)\alpha$ (Mod. $2n+1$).

Schreibt man die Zeiger einer Periode eines regulären $2(2n+1)$-Ecks in eine Horizontal-Reihe, erstes Glied sei a, darunter schreibe man die Zeiger sei es desselben sei es einer andern Periode desselben Vielecks, das erste unter a stehende Glied sei positiv oder negativ genommen $\equiv (2m+1)a$ (Mod. $2n+1$), so giebt jeder Zeiger der ersten Periode mit $(2m+1)$ multiplicirt eine Zahl, die dem darunter stehenden positiven oder negativen Zeiger congruent ist (Mod. $2n+1$). Um kurz die Art auszudrücken, wie hiernach die Perioden unter einander zu stellen, sage man, sie seien nach dem Factor $(2m+1)$ unter einander geordnet.

Sind a, b die Zeiger zweier ungeraden Diagonalen eines regulären $2(2n+1)$-Ecks, dessen Perioden nach dem Factor $(2m+1)$ unter einander geordnet sind, α, β sind die Zeiger der Diagonalen, die unter den vorigen stehen, so ist: $a.b = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2$ und $\alpha.\beta = \left((2m+1)\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left((2m+1)\frac{a-b}{2}\right)^2$, d. h. die Zeiger $(2m+1)\frac{a+b}{2}$, $(2m+1).\frac{a-b}{2}$, oder die nach §. 14. an ihre Stelle tretenden Zahlen stehen in ihren Perioden unter den Zeigern $\frac{a+b}{2}$ und $\frac{a-b}{2}$; dass eine der beiden Zahlen gerade ist, sich also in der Periode nicht findet, ändert an der Sache Nichts, da statt der geraden Zahl die Differenz zwischen ihr und $2n+1$ zu setzen ist. Verbindet man hiermit das, was über Verwandlung des Produktes zweier ungeraden Diagonalen in die positiv oder negativ zu nehmende Summe zweier ungeraden Diagonalen gesagt ist, so ergiebt sich der Satz:

> Sind die Perioden eines regulären $2(2n+1)$-Ecks nach dem Factor $2m+1$ unter einander geordnet, und man

Digitized by Google

hat gefunden, es sei das Produkt irgend zweier dieser Diagonalen $x_a . x_b$ gleich der positiven oder negativen Summe der Diagonalen x_m und x_s, so ist das Produkt der unter x_a, x_b stehenden Diagonalen gefunden, wenn man die positive oder negative Summe der beiden unter x_m, x_s stehenden Diagonalen nimmt.

Der Satz lässt sich übrigens auch ganz in der Art beweisen, wie es bei dem entsprechenden in §. 26. geschehen; der letztere Satz ergiebt sich aus dem obigen, wenn man Perioden nach dem Factor 2 unter einander ordnet. — Es ergiebt sich nun aber auch folgender Satz:

Sind die Perioden eines regulären $2(2n+1)$-Ecks nach dem Factor $2m+1$ unter einander geordnet, und sind $x_1, x_2, x_3, \dots$ beliebige Diagonalen einer, $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \dots$ beliebige Diagonalen, sei es derselben sei es einer andern Periode dieses Vielecks; sind ferner $z_1, z_2, z_3, \dots$ die unter $x_1, x_2, x_3, \dots$ und $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \mathfrak{z}_3, \dots$ die unter $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \dots$ stehenden Diagonalen; ist endlich $(x_1+x_2+x_3+\dots)(\mathfrak{x}_1+\mathfrak{x}_2+\mathfrak{x}_3+\dots) = \pm(p_1+p_2+p_3+\dots)$ gefunden, wo $p_1, p_2, p_3, \dots$ beliebige Diagonalen desselben Vielecks sind, so erhält man die Summe, welche gleich dem Produkte $(z_1+z_2+z_3+\dots)(\mathfrak{z}_1+\mathfrak{z}_2+\mathfrak{z}_3+\dots)$ ist, wenn man die Summe der Diagonalen nimmt, die unter $p_1, p_2, p_3, \dots$ stehen.

§. 31.

Wir wollen im Folgenden nur Vielecke betrachten, bei denen $4n+1$ oder $4n+3$ eine Primzahl ist. Die $2n$ ungeraden Diagonalen eines $2(4n+1)$-Ecks bilden zwei Perioden; A_1, B_1 seien die negativen Summen der Glieder dieser Perioden; nach §. 26. ergiebt sich:

$$A_1 . B_1 = \alpha . A_1 + \beta . B_1,$$

folglich nach §. 30.:

$$B_1 . A_1 = \alpha . B_1 + \beta . A_1,$$

d. h. es ist $\alpha = \beta$, und da $\alpha + \beta$ dem absoluten Werthe nach $= 2n$ sein muss, so ist:

$$A_1 . B_1 = -n; \; A_1 + B_1 = 1. \text{ cfr. §. 28.}$$

Die n ungeraden Diagonalen eines $2(2n+1)$-Ecks bilden 3 Perioden; A_1, B_1, C_1 seien die negativen Summen der Glieder jeder dieser Perioden, auch mögen sie nach einem Factor $2m+1$

Digitized by Google

unter einander geordnet, in der genannten Reihe einander folgen. Nach §. 26. habe man erhalten:

$$A_1.B_1 = \alpha.A_1 + \beta.B_1 + \gamma.C_1,$$

dann ist nach §. 30.:

$$B_1.C_1 = \alpha.B_1 + \beta.C_1 + \gamma.A_1,$$
$$C_1.A_1 = \alpha.C_1 + \beta.A_1 + \gamma.B_1,$$

folglich:

$$A_1.B_1 + B_1.C_1 + C_1.A_1 = \pm(\alpha+\beta+\gamma) \text{ cfr. §. 29.}$$

Ebenso wie in §. 29. kann man jetzt zeigen, dass auch $A_1.B_1.C_1$ gleich einer nur von α, β, γ abhängigen Grösse sei; A_1, B_1, C_1 sind also Wurzeln einer kubischen Gleichung.

Die $2n$ ungeraden Diagonalen eines $2(4n+1)$-Ecks bilden vier Perioden; A_1, B_1, C_1, D_1 seien die negativen Summen der Glieder dieser Perioden, die nach dem Factor $(2m+1)$ unter einander geordnet in der Reihe A_1, B_1, C_1, D_1, A_1 einander folgen mögen. Nach §. 26. habe sich ergeben:

$$A_1.B_1 = \alpha.A_1 + \beta.B_1 + \gamma.C_1 + \delta.D_1,$$

dann ist:

$$B_1.C_1 = \alpha.B_1 + \beta.C_1 + \gamma.D_1 + \delta.A_1,$$
$$C_1.D_1 = \alpha.C_1 + \beta.D_1 + \gamma.A_1 + \delta.B_1,$$
$$D_1.A_1 = \alpha.D_1 + \beta.A_1 + \gamma.B_1 + \delta.C_1;$$

folglich:

$$(A_1 + C_1)(B_1 + D_1) = \alpha+\beta+\gamma+\delta = -n,$$

und da:

$$A_1 + B_1 + C_1 + D_1 = 1,$$

so findet man $A_1 + C_1$ und $B_1 + D_1$ durch eine quadratische Gleichung.

Es sei ferner erhalten worden:

$$A_1.C_1 = \mu.A_1 + \nu.B_1 + \pi.C_1 + \varrho.D_1,$$

folglich:

$$B_1.D_1 = \mu.B_1 + \nu.C_1 + \pi.D_1 + \varrho.A_1,$$
$$C_1.A_1 = \mu.C_1 + \nu.D_1 + \pi.A_1 + \varrho.B_1,$$
$$D_1.B_1 = \mu.D_1 + \nu.A_1 + \pi.B_1 + \varrho.C_1;$$

mithin ergiebt sich:

$$(\mu-\pi)(A_1 - C_1) = (\varrho-\nu)(B_1 - D_1)$$

Digitized by Google

und

$$(\varrho-\nu)(A_1-C_1)=(\mu-\pi)(B_1-D_1),$$

d. h. es ist entweder $\mu=\pi$ und $\varrho=\nu$ oder $(A_1-C_1)^2=(B_1-D_1)^2$. Da die letzte Gleichung entweder $A_1-C_1=B_1-D_1$ oder $A_1-C_1=D_1-B_1$ giebt, so erhält man aus ihr und $A_1+B_1+C_1+D_1=1$, dass entweder $A_1+B_1=\frac{1}{2}$, also $A_1+B_1=C_1+D_1$ oder dass $A_1+D_1=B_1+C_1$ ist. Da beide Gleichungen unmöglich sind, so muss $\mu=\pi$ und $\varrho=\nu$ sein; alsdann aber ist:

$$A_1.C_1=\mu(A_1+C_1)+\nu(B_1+D_1)$$

und

$$B_1.D_1=\mu(B_1+D_1)+\nu(A_1+C_1),$$

also A_1, B_1, C_1, D_1 sind durch quadratische Gleichungen zu finden.

Dieselben Gleichungen ergeben sich bei der Gleichung eines regulären $2(4n+1)$-Ecks, wenn die ungeraden Diagonalen eine Periode bilden, deren Gliederzahl durch 4 theilbar ist und diese Gleichung in vier neue Gleichungen zerlegt werden soll. —

Uebrigens lassen sich die Werthe von A_1, B_1, C_1, D_1 auch ohne Berechnung der Produkte $A_1.C_1$, $B_1.D_1$ finden; denn aus den ersten vier Gleichungen kann man $(A_1-C_1)(B_1-D_1)$ wie $(A_1+C_1)(B_1-D_1)$ berechnen.

Die Diagonalen des regulären 146-Ecks bilden vier Perioden (§. 13.). Die negativen Summen der Perioden I., II., III., IV. bezeichne man respective mit A_1, C_1, B_1, D_1; die Perioden nach dem Factor 5 unter einander geordnet folgen dann A_1, B_1, C_1, D_1. Da $n=18$, so ist $(A_1+C_1)(B_1+D_1)=-18$ und da $A_1+B_1+C_1+D_1=1$ ist, so ergiebt sich:

$$(A_1+C_1)-(B_1+D_1)=\pm\sqrt{73};$$

aus den Zeigern der Diagonalen folgt, dass A_1+C_1 negativ sein muss, folglich ist:

$$A_1+C_1=\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{73});\quad B_1+D_1=\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{73}).$$

Es ist ferner:

$$A_1.C_1=-4A_1-5B_1-4C_1-5D_1=\tfrac{1}{2}(-9-\sqrt{73}),$$

folglich:

$$(A_1-C_1)^2=\tfrac{1}{2}(73+3\sqrt{73});\quad (B_1-D_1)^2=\tfrac{1}{2}(73-3\sqrt{73}),$$

und daher:

Digitized by Google

$$A_1 = \tfrac{1}{4}(1 - \sqrt{73} - \sqrt{146 + 6\sqrt{73}}; \quad C_1 = \tfrac{1}{4}(1 - \sqrt{73} + \sqrt{146 + 6\sqrt{73}});$$

$$B_1 = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{73} - \sqrt{146 - 6\sqrt{73}}; \quad D_1 = \tfrac{1}{4}(1 + \sqrt{73} + \sqrt{146 - 6\sqrt{73}}).$$

Die ungeraden Diagonalen eines regulären $2(4n+1)$-Ecks mögen sechs Perioden bilden; oder eine Periode, deren Gliederzahl durch 6 theilbar ist; oder zwei Perioden, die Zahl der Glieder in jeder Periode aber durch 3 theilbar sein, in jedem Falle lässt sich die Gleichung des Vielecks in sechs Gleichungen zerlegen und zwar hat man dazu eine quadratische und eine kubische Gleichung zu lösen. — Im ersten Falle mögen A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 die negativen Summen der sechs Perioden bezeichnen, die nach dem Factor $(2m+1)$ unter einander geordnet sind; im zweiten Falle bezeichne A_1 die negative Summe der Glieder 1, 7, 13, 19 u. s. w., B_1 die negative Summe der Glieder 2, 8, 14, 20 u. s. w.; im dritten Falle ist $A_1 + C_1 + E_1$ die negative Summe der Glieder der einen, $B_1 + D_1 + F_1$ die entsprechende Summe der andern Periode, und zwar A_1 die negative Summe der Glieder 1, 4, 7, 10 u. s. w. — Aus

$$A_1 . B_1 = \alpha . A_1 + \beta . B_1 + \gamma . C_1 + \delta . D_1 + \varepsilon . E_1 + \xi . F_1$$

ergeben sich $B_1 . C_1$, $C_1 . D_1$ u. s. w., und daraus:

$$A_1 . B_1 + B_1 . C_1 + C_1 . D_1 + D_1 . E_1 + E_1 . F_1 + F_1 . A_1 = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \xi.$$

Aus

$$A_1 . D_1 = \mu . A_1 + \nu . B_1 + o . C_1 + \pi . D_1 + \varrho . E_1 + \sigma . F_1$$

folgt:

$$A_1 . D_1 + B_1 . E_1 + C_1 . F_1 + D_1 . A_1 + E_1 . B_1 + F_1 . C_1 = \mu + \nu + o + \pi + \varrho + \sigma,$$

also:

$$A_1 . D_1 + B_1 . E_1 + C_1 . F_1 = \tfrac{1}{2}(\mu + \nu + o + \pi + \varrho + \sigma).$$

Addirt man diese beiden Summen, so ist

$$(A_1 + C_1 + E_1)(B_1 + D_1 + F_1) = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \xi + \tfrac{1}{2}(\mu + \nu + o + \pi + \varrho + \sigma);$$

also

$$A_1 + C_1 + E_1 \text{ und } B_1 + D_1 + F_1$$

durch eine quadratische Gleichung zu finden.

Es sei ferner:

$$A_1 . C_1 = \mu . A_1 + \nu . B_1 + o . C_1 + \pi . D_1 + \varrho . E_1 + \sigma . F_1,$$

(μ, ν, o, π, ϱ, σ haben natürlich andere Bedeutung als vorher), so folgt:

$$C_1.E_1 = \mu.C_1 + \nu.D_1 + o.E_1 + \pi.F_1 + \varrho.A_1 + \sigma.B_1,$$

$$E_1.A_1 = \mu.E_1 + \nu.F_1 + o.A_1 + \pi.B_1 + \varrho.C_1 + \sigma.D_1;$$

folglich ist:

$$A_1.C_1 + C_1.E_1 + E_1.A_1 = (\mu + o + \varrho)(A_1 + C_1 + E_1) + (\nu + \pi + \sigma)(B_1 + D_1 + F_1),$$

d. h. diese Summe ist durch bekannte Zahlen zu bestimmen. Das Gleiche gilt von $B_1.D_1 + D_1.F_1 + F_1.B_1$. Multiplicirt man die drei Gleichungen der Reihe nach durch E_1, A_1, C_1 und addirt, so erhält man:

$$3.A_1.C_1.E_1 = \mu(A_1.E_1 + A_1.C_1 + C_1.E_1) + \nu(B_1.E_1 + A_1.D_1 + C_1.F_1)$$
$$+ o(C_1.E_1 + A_1.E_1 + C_1.A_1) + \pi(D_1.E_1 + A_1.F_1 + B_1.C_1)$$
$$+ \varrho(E_1^2 + A_1^2 + C_1^2) + \sigma(E_1.F_1 + A_1.B_1 + C_1.D_1).$$

Die Summen $A_1.E_1 + A_1.C_1 + C_1.E_1$, desgleichen $B_1.E_1 + A_1.D_1 + C_1.F_1$, desgleichen $A_1^2 + C_1^2 + E_1^2$ kann man durch bekannte von A_1, B_1, C_1 u. s. w. unabhängige Grössen ausdrücken. Aus den für $A_1.B_1$, $B_1.C_1$ u. s. w. angenommenen Gleichungen folgt aber:

$$D_1.E_1 + A_1.F_1 + B_1.C_1 = (\alpha + \gamma + \varepsilon)(B_1 + D_1 + F_1) + (\beta + \delta + \xi)(A_1 + B_1 + C_1),$$

desgleichen:

$$A_1.B_1 + E_1.F_1 + C_1.D_1 = (\alpha + \gamma + \varepsilon)(A_1 + C_1 + E_1) + (\beta + \delta + \xi)(B_1 + D_1 + F_1),$$

d. h. das Produkt $A_1.C_1.E_1$, ebenso $B_1.D_1.F_1$ lässt sich durch bekannte von A_1, B_1, C_1 u. s. w. unabhängige Grössen ausdrücken; oder A_1, C_1, E_1 wie B_1, D_1, F_1 ergeben sich als Wurzeln kubischer Gleichungen.

§. 32.

Die 16 Perioden, welche die ungeraden Diagonalen des regulären 514-Ecks bilden, finden sich in §. 13. Mit A und verschiedenen Zeigern bezeichne man die Coefficienten der Gleichung, deren Wurzeln die Glieder der ersten Periode sind. $x^8 + A_1.x^7 + A_2.x^6 + A_3.x^5 + A_4.x^4 + A_5.x^3 + A_6.x^2 + A_7.x + A_8 = 0$ habe die Wurzeln x_1, x_{255}, x_{253}, x_{249}, x_{241}, x_{225}, x_{193}, x_{129}.

Es sollen B, C, D, E, F, G, H, K, L, M, N, O, P, R, T an die Stelle von A treten bei den Gleichungen deren Wurzeln

Digitized by Google

Diagonalen der 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16ten Periode sind. Werden die Perioden nach dem Factor 3 unter einander geordnet, so folgen auf einander: A, K, B, L, C, M, D, N, E, O, F, P, G, R, H, T, A. Man bilde nach §. 27. $A_1 . B_1$ aus dem Zeiger 1 und den Zeigern von B_1 und erhält:

$$A_1 . B_1 + 2A_1 + C_1 + 2E_1 + F_1 + 2G_1 + H_1 + L_1 + 2M_1 + 2N_1 + P_1 + R_1 = 0.$$

Nach §. 31. erhält man hieraus sogleich die Werthe für $K_1 . L_1$ $B_1 . C_1$, $L_1 . M_1$ u. s. w.; es ergiebt sich z. B.:

$$B_1 . C_1 + 2B_1 + D_1 + 2F_1 + G_1 + 2H_1 + A_1 + M_1 + 2N_1 + 2O_1 + R_1 + T_1 = 0$$

u. s. w.,

$$K_1 . L_1 + 2K_1 + M_1 + 2O_1 + P_1 + 2R_1 + T_1 + C_1 + 2D_1 + 2E_1 + G_1 + H_1 = 0,$$

$$L_1 . M_1 + 2L_1 + N_1 + 2P_1 + R_1 + 2T_1 + K_1 + D_1 + 2E_1 + 2F_1 + H_1 + A_1 = 0$$

u. s. w.

Ferner suche man nach §. 27. $A_1 . C_1$, und erhält:

$$A_1 . C_1 + B_1 + 2D_1 + E_1 + F_1 + G_1 + 2K_1 + L_1 + M_1 + 2N_1 + O_1 + R_1 + 2T_1 = 0,$$

folglich nach §. 31.:

$$B_1 . D_1 + C_1 + 2E_1 + F_1 + G_1 + H_1 + 2L_1 + M_1 + N_1 + 2O_1 + P_1 + T_1 + 2K_1 = 0 \text{ u. s. w.},$$

desgleichen:

$$K_1 . M_1 + L_1 + 2N_1 + O_1 + P_1 + R_1 + 2B_1 + C_1 + D_1 + 2E_1 + F_1 + H_1 + 2A_1 = 0,$$

$$L_1 . N_1 + M_1 + 2O_1 + P_1 + R_1 + T_1 + 2C_1 + D_1 + E_1 + 2F_1 + G_1 + A_1 + 2B_1 = 0 \text{ u. s. w.}$$

Ferner suche man nach §. 27.:

$$A_1 . D_1 + 2C_1 + E_1 + F_1 + G_1 + 2H_1 + L_1 + 2N_1 + O_1 + P_1 + R_1 + 3T_1 = 0,$$

folglich:

$$B_1 . E_1 + 2D_1 + F_1 + G_1 + H_1 + 2A_1 + M_1 + 2O_1 + P_1 + R_1 + T_1 + 3K_1 = 0$$

u. s. w., desgleichen:

$$K_1 . N_1 + 2M_1 + O_1 + P_1 + R_1 + 2T_1 + C_1 + 2E_1 + F_1 + G_1 + H_1 + 3A_1 = 0,$$

$$L_1 . O_1 + 2N_1 + P_1 + R_1 + T_1 + 2K_1 + D_1 + 2F_1 + G_1 + H_1 + A_1 + 3B_1 = 0$$

u. s. w.

Ebenso findet sich:

Digitized by Google

$$A_1.E_1+2A_1+2B_1+C_1+D_1+2E_1+2F_1+G_1+H_1+2M_1+2R_1=0,$$

folglich:

$$B_1.F_1+2B_1+2C_1+D_1+E_1+2F_1+2G_1+H_1+A_1+2N_1+2T_1=0$$

u. s. w., desgleichen:

$$K_1.O_1+2K_1+2L_1+M_1+N_1+2O_1+2P_1+R_1+T_1+2D_1+2H_1=0,$$

$$L_1.P_1+2L_1+2M_1+N_1+O_1+2P_1+2R_1+T_1+K_1+2E_1+2A_1=0$$

u. s. w.

Sucht man nach §. 24. A_2, so ergeben sich B_2, C_2, D_2, .. nach §. 31.; man erhält:

$$A_2+A_1+B_1+E_1+2K_1+M_1+N_1=0,$$

$$B_2+B_1+C_1+F_1+2L_1+N_1+O_1=0 \text{ u. s. w.},$$

$$K_2+K_1+L_1+O_1+2B_1+D_1+E_1=0;$$

$$L_2+L_1+M_1+P_1+2C_1+E_1+F_1=0 \text{ u. s. w.}$$

Die Gleichung des regulären 514-Ecks, die vom 128ten Grade ist, zerlege man zunächst in zwei Gleichungen, deren eine die in den Perioden I.—VIII., die andere die in den Perioden IX.—XVI. enthaltenen Diagonalen zu Wurzeln hat. Da nach §.15. $A_2=\frac{1}{2}(A_1{}^2+A_1-16)$, $B_2=\frac{1}{2}(B_1{}^2+B_1-16)$ u. s. w. ist, so ergiebt sich aus der letzten Reihe der vorher entwickelten Gleichungen:

$$A_1{}^2+B_1{}^2+C_1{}^2+D_1{}^2+E_1{}^2+F_1{}^2+G_1{}^2+H_1{}^2$$
$$=-7(A_1+B_1+C_1+D_1+E_1+F_1+G_1+H_1)$$
$$-8(K_1+L_1+M_1+N_1+O_1+P_1+R_1+T_1)+128$$
$$=-(K_1+L_1+M_1+N_1+O_1+P_1+R_1+T_1)+121.$$

Da man aus den vorhergehenden Gleichungen das Produkt je zweier der Grössen A_1, B_1 .... H_1 bestimmen kann, so findet man:

$$(A_1+B_1+C_1+D_1+E_1+F_1+G_1+H_1)^2$$
$$=65-(K_1+L_1+M_1+N_1+O_1+P_1+R_1+T_1)$$
$$=64+(A_1+B_1+C_1+D_1+E_1+F_1+G_1+H_1),$$

oder es ist:

$$A_1+B_1+C_1+D_1+E_1+F_1+G_1+H_1=\tfrac{1}{2}(1\pm\sqrt{257});$$

Digitized by Google

beachtet man die Vorzeichen der Wurzeln, die in vorhergehender Summe enthalten sind, so ist:

(A)

$$A_1+B_1+C_1+D_1+E_1+F_1+G_1+H_1=\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{257});$$

$$K_1+L_1+M_1+N_1+O_1+P_1+R_1+T_1=\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{257}).$$

Aus

$$(A_1+C_1+E_1+G_1)+(B_1+D_1+F_1+H_1)=\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{257})$$

und

$$(A_1+C_1+E_1+G_1)(B_1+D_1+F_1+H_1)=-16,$$

welche letztere Gleichung sich aus den früher entwickelten Gleichungen ergiebt, folgt:

(B)

$$A_1+C_1+E_1+G_1=\tfrac{1}{4}(1-\sqrt{257}-\sqrt{514-2\sqrt{257}});$$

$$B_1+D_1+F_1+H_1=\tfrac{1}{4}(1-\sqrt{257}+\sqrt{514-2\sqrt{257}}).$$

Auf gleichem Wege ergiebt sich:

(C)

$$K_1+M_1+O_1+R_1=\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{257}-\sqrt{514+2\sqrt{257}});$$

$$L_1+N_1+P_1+T_1=\tfrac{1}{4}(1+\sqrt{257}+\sqrt{514+2\sqrt{257}}).$$

Aus

$$(A_1+B_1+E_1+F_1)+(C_1+D_1+G_1+H_1)=\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{257})$$

und

$$\begin{aligned}(A_1+B_1+E_1+F_1).(C_1+D_1+G_1+H_1)\\ =-12-4(B_1+D_1+F_1+H_1)-4(K_1+M_1+O_1+R_1)\\ -8(L_1+N_1+P_1+T_1)\\ =-16-2(\sqrt{257}-\sqrt{514+2\sqrt{257}}-\sqrt{514-2\sqrt{257}}\end{aligned}$$

folgt:

(D)

$$A_1+B_1+E_1+F_1$$

$$=\tfrac{1}{8}(1-\sqrt{257}-\sqrt{514+30\sqrt{257}+16\sqrt{514+2\sqrt{257}}+16\sqrt{514-2\sqrt{257}}}),$$

$$C_1+D_1+G_1+H_1$$

$$=\tfrac{1}{8}(1-\sqrt{257}+\sqrt{514+30\sqrt{257}+16\sqrt{514+2\sqrt{257}}+16\sqrt{514-2\sqrt{257}}}).$$

Digitized by Google

Aus

$$(A_1+D_1+E_1+H_1)+(B_1+C_1+F_1+G_1)=\tfrac{1}{4}(1-\sqrt{257})$$

und

$$\begin{aligned}(A_1+D_1+E_1+H_1).(B_1+C_1+F_1+G_1)\\ =-12-4(A_1+C_1+E_1+G_1)-4(L_1+N_1+P_1+T_1)\\ -8(K_1+M_1+O_1+R_1)\\ =-16-2\sqrt{257}+\sqrt{514+2\sqrt{257}}+\sqrt{514-2\sqrt{257}}\end{aligned}$$

folgt:

(E)

$$A_1+D_1+E_1+H_1$$

$$=\tfrac{1}{8}(1-\sqrt{257}-\sqrt{514+30\sqrt{257}-16\sqrt{514+2\sqrt{257}}-16\sqrt{514-2\sqrt{257}}}),$$

$$B_1+C_1+F_1+G_1$$

$$=\tfrac{1}{8}(1-\sqrt{257}+\sqrt{514+30\sqrt{257}-16\sqrt{514+2\sqrt{257}}-16\sqrt{514-2\sqrt{257}}}).$$

Aus den Gleichungen $B.D.E$ ergiebt sich:

(F)

$$A_1+E_1=\tfrac{1}{8}(1-\sqrt{257}-\sqrt{514-2\sqrt{257}}$$
$$-2\sqrt{257+15\sqrt{257}+\sqrt{226.257+3614\sqrt{257}}}),$$

$$C_1+G_1=\tfrac{1}{8}(1-\sqrt{257}-\sqrt{514-2\sqrt{257}}$$
$$+2\sqrt{257+15\sqrt{257}+\sqrt{226.257+3614\sqrt{257}}}),$$

$$B_1+F_1=\tfrac{1}{8}(1-\sqrt{257}+\sqrt{514-2\sqrt{257}}$$
$$-2\sqrt{257+15\sqrt{257}-\sqrt{226.257+3614\sqrt{257}}}),$$

$$D_1+H_1=\tfrac{1}{8}(1-\sqrt{257}+\sqrt{514-2\sqrt{257}}$$
$$+2\sqrt{257+15\sqrt{257}-\sqrt{226.257+3614\sqrt{257}}}).$$

Auf gleiche Weise ergiebt sich:

(G)

$$K_1+O_1=\tfrac{1}{8}(1+\sqrt{257}-\sqrt{514+2\sqrt{257}}$$
$$+2\sqrt{257-15\sqrt{257}-\sqrt{226.257-3614\sqrt{257}}}),$$

$$L_1+P_1=\tfrac{1}{8}(1+\sqrt{257}+\sqrt{514+2\sqrt{257}}$$
$$+2\sqrt{257-15\sqrt{257}+\sqrt{226.257-3614\sqrt{257}}}),$$

$$M_1+R_1=\tfrac{1}{8}(1+\sqrt{257}-\sqrt{514+2\sqrt{257}}$$
$$-2\sqrt{257-15\sqrt{257}-\sqrt{226.257-3614\sqrt{257}}}),$$

$$N_1+T_1=\tfrac{1}{8}(1+\sqrt{257}+\sqrt{514+2\sqrt{257}}$$
$$-2\sqrt{257-15\sqrt{257}+\sqrt{226.257-3614\sqrt{257}}}).$$

Führt man folgende Bezeichnungen ein:

$$A=\sqrt{514-2\sqrt{257}};\ B=\sqrt{514+2\sqrt{257}};\ D=257+15\sqrt{257};$$
$$E=257-15\sqrt{257};\ F=\sqrt{226.257+3614\sqrt{257}};$$
$$H=\sqrt{226.257-3614\sqrt{257}},$$

so kann man statt F, G setzen:

(H)

$$A_1+E_1=\tfrac{1}{8}(1-\sqrt{257}-A-2\sqrt{D+F});\ K_1+O_1=\tfrac{1}{8}(1+\sqrt{257}-B+2\sqrt{E-H})$$
$$B_1+F_1=\tfrac{1}{8}(1-\sqrt{257}+A-2\sqrt{D-F});\ L_1+P_1=\tfrac{1}{8}(1+\sqrt{257}+B+2\sqrt{E+H})$$
$$C_1+G_1=\tfrac{1}{8}(1-\sqrt{257}-A+2\sqrt{D+F});\ M_1+R_1=\tfrac{1}{8}(1+\sqrt{257}-B-2\sqrt{E-H})$$
$$D_1+H_1=\tfrac{1}{8}(1-\sqrt{257}+A+2\sqrt{D-F});\ N_1+T_1=\tfrac{1}{8}(1+\sqrt{257}+B-2\sqrt{E+H})$$

Aus den Werthen von A_1^2, E_1^2 (die sich aus A_2, E_2 ergeben) und $A_1.E_1$ findet man:

$$(A_1-E_1)^2=-(A_1+E_1)+2(B_1+F_1)+2(C_1+G_1)+2(D_1+H_1)$$
$$+2(M_1+R_1)-2(N_1+T_1)-4(O_1+K_1)+32,$$

und da A_1 absolut genommen $> E_1$ aber negativ ist, so ergiebt sich:

Digitized by Google

(K)

$$A_1-E_1=-\tfrac{1}{4}\sqrt{514-18\sqrt{257}+6A+12\sqrt{D+F}-24\sqrt{E-H}+8\sqrt{E+H}},$$

desgleichen:

$$B_1-F_1=-\tfrac{1}{4}\sqrt{514-18\sqrt{257}-6A+12\sqrt{D-F}-8\sqrt{E-H}-24\sqrt{E+H}},$$

$$C_1-G_1=-\tfrac{1}{4}\sqrt{514-18\sqrt{257}+6A-12\sqrt{D+F}+24\sqrt{E-H}-8\sqrt{E+H}},$$

$$D_1-H_1=+\tfrac{1}{4}\sqrt{514-18\sqrt{257}-6A-12\sqrt{D-F}+8\sqrt{E-H}+24\sqrt{E+H}},$$

$$K_1-O_1=-\tfrac{1}{4}\sqrt{514+18\sqrt{257}+6B+24\sqrt{D-F}+8\sqrt{D+F}-12\sqrt{E-H}},$$

$$L_1-P_1=-\tfrac{1}{4}\sqrt{514+18\sqrt{257}-6B+8\sqrt{D-F}-24\sqrt{D+F}-12\sqrt{E+H}},$$

$$M_1-R_1=-\tfrac{1}{4}\sqrt{514+18\sqrt{257}+6B-24\sqrt{D-F}-8\sqrt{D+F}+12\sqrt{E-H}},$$

$$N_1-T_1=-\tfrac{1}{4}\sqrt{514+18\sqrt{257}-6B-8\sqrt{D-F}+24\sqrt{D+F}+12\sqrt{E+H}}.$$

Durch die Gleichungen (H) und (K) sind A_1, B_1, C_1 .... bestimmt.

Man zerlege die erste und fünfte Gleichung in zwei Gleichungen vierten Grades; es enthalte

$x^4+\mathfrak{A}_1.x_3+\mathfrak{A}_2.x^2+\mathfrak{A}_3.x+\mathfrak{A}_4=0$ die Diag. 1, 253, 241, 193,

$x^4+\mathfrak{a}_1.x^3+\mathfrak{a}_2.x^2+\mathfrak{a}_3.x+\mathfrak{a}_4=0$ „ „ 255, 249, 225, 129,

$x^4+\mathfrak{E}_1.x^3+\mathfrak{E}_2.x^2+\mathfrak{E}_3.x+\mathfrak{E}_4=0$ „ „ 15, 197, 17, 189,

$x^4+\mathfrak{e}_1.x^3+\mathfrak{e}_2.x^2+\mathfrak{e}_3.x+\mathfrak{e}_4=0$ „ „ 227, 137, 223, 121

als Wurzeln. Aus den Zeigern der Wurzeln findet man: $\mathfrak{A}_1.\mathfrak{a}_1=-(A_1+B_1+K_1+M_1)$; $\mathfrak{E}_1.\mathfrak{e}_1=-(E_1+F_1+R_1+O_1)$, und da $\mathfrak{A}_1+\mathfrak{a}_1=A_1$; $\mathfrak{E}_1+\mathfrak{e}_1=E_1$ sind, so sind $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{e}_1$ als gefunden anzusehen. Durch die Gleichungen des §. 17. sind nun aber auch $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{a}_2$, ... zu bestimmen. Endlich bestimme man die Gleichungen:

$x^2+a_{1,1}.x+a_{2,1}=0(x_1,\ x_{241})$; $x^2+a_{1,2}.x+a_{2,2}=0(x_{256},\ x_{225})$;

$x^2+a_{1,3}.x+a_{2,3}=0(x_{253},\ x_{193})$; $x^2+a_{1,4}.x+a_{2,4}=0(x_{249},\ x_{129})$;

$x^2+e_{1,1}.x+e_{2,1}=0(x_{15},\ x_{17})$; $x^2+e_{1,2}.x+e_{2,2}=0(x_{227},\ x_{223})$;

$x^2+e_{1,3}.x+e_{2,3}=0(x_{197},x_{189})$; $x^2+e_{1,4}.x+e_{2,4}=0(x_{137},x_{121})$;

Digitized by Google

die Wurzeln die jeder Gleichung zugehören, stehen dabei in Parenthesen. Aus den Zeigern findet man nach §. 23.:

$$a_{2,1}=-e_{1,1};\ a_{2,2}=-e_{1,2};\ a_{2,3}=-e_{1,3};\ a_{2,4}=-e_{1,4};\ e_{2,1}=-a_{1,2};$$

$$e_{2,2}=-a_{1,3};\ e_{2,3}=-a_{1,4};\ e_{2,4}=-a_{1,1};$$

setzt man aber diese Werthe in die letzten Gleichungen ein und multiplicirt dann paarweise diese acht Gleichungen, damit man dadurch die vier unmittelbar vorher bestimmten Gleichungen erhalte, so ergiebt sich:

$$a_{1,1}+a_{1,3}=\mathfrak{A}_1;\ a_{1,1}.a_{1,3}=\mathfrak{A}_2+\mathfrak{E}_1;\ a_{1,2}+a_{1,4}=\mathfrak{a}_1;\ a_{1,2}.a_{1,4}=\mathfrak{a}_2+\mathfrak{e}_1;$$

$$e_{1,1}+e_{1,3}=\mathfrak{E}_1;\ e_{1,1}.e_{1,3}=\mathfrak{E}_2+\mathfrak{a}_1;\ e_{1,2}+e_{1,4}=\mathfrak{e}_1;\ e_{1,2}.e_{1,4}=\mathfrak{e}_2+\mathfrak{A}_1,$$

aus welchen Gleichungen sich die Coefficienten der obigen acht Gleichungen ergeben, so dass also nachgewiesen, wie sich die Seite des regulären 514-Ecks als Wurzel einer quadratischen Gleichung ergiebt.

§. 33.

Als Resultat der vorstehenden Abhandlung in Bezug auf die Zerlegung der Gleichungen der regulären $2(2n+1)$-Ecke und zwar für den Fall, wo $2n+1$ eine Primzahl ist, ergäbe sich Folgendes:

Ist n selbst eine Primzahl, so lässt sich die betreffende Gleichung nicht weiter zerlegen. Ist n theilbar, so bilden die ungeraden Diagonalen des Vielecks, die sämmtlich Wurzeln der betreffenden Gleichung sind, entweder eine oder mehrere Perioden. Bilden die n Diagonalen eine Periode, so kann man die Gleichung des Vielecks, je nachdem n durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... theilbar ist in 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... Gleichungen zerlegen. Die Wurzeln jeder der neuen Gleichungen sind ganz bestimmte Diagonalen des Vielecks, die man angeben kann, so wie man die Reihenfolge der Diagonalen in der Periode kennt. Die Coefficienten der Gleichungen sind zu bestimmen, so wie man die Summe der Diagonalen kennt, welche sich in jeder der Gleichungen als Wurzeln finden. Diese Summen findet man, wenn n durch 2 theilbar ist, durch eine Gleichung zweiten Grades; ist n durch 3 theilbar, durch eine Gleichung dritten Grades, ist n durch 4 theilbar, durch zwei Gleichungen zweiten Grades, ist n durch 6 theilbar, durch eine Gleichung zweiten und eine Gleichung dritten Grades. Ist n durch 5, 7, 11 .... theilbar und a, b, c, d, ... sind die negativen Summen der Wurzeln der zu

Digitized by Google

suchenden Gleichungen, so sind die Produkte aus je zweien dieser Grössen stets gleich einer Grösse von der Form $\alpha.a+\beta.b+\gamma.c+\delta.d$ worin α, β, γ, δ .... positive oder negative ganze Zahlen sind. — Enthält jede der so erhaltenen Gleichungen wieder eine durch 2 oder 3 oder 5 .... theilbare Anzahl von Wurzeln, so lässt sich jede der neuen Gleichungen wieder in 2 oder 3 oder 5 .... Gleichungen zerlegen u. s. w. — Bilden die n ungeraden Diagonalen mehrere Perioden, so hat jede Periode dieselbe Anzahl von Gliedern und lässt sich die Gleichung des Vielecks, je nachdem die Diagonalen 2, 3, 4, 5, ... Perioden bilden in 2, 3, 4, 5, ... Gleichungen zerlegen, deren jede die Glieder einer Periode zu Wurzeln hat. Bei zwei Perioden hängt die Zerlegung von einer Gleichung zweiten, bei drei Perioden von einer Gleichung dritten, bei vier Perioden von zwei Gleichungen zweiten, bei sechs Perioden von einer Gleichung zweiten und einer Gleichung dritten Grades ab. Ist die Zahl der Glieder einer Periode durch 2, 3, 4, 5, ... theilbar, so kann man jede der neuen Gleichungen wieder in 2, 3, 4, 5, ... Gleichungen zerlegen, deren jede ganz bestimmte Diagonalen des Vielecks zu Wurzeln hat u. s. w.

Ob und in wie weit es dem Verfasser gelungen ist, im Vorhergehenden einzelne Theile des Gauss'ischen Satzes über reguläre Vielecke auf elementare Weise zu beweisen, muss er der Beurtheilung Anderer überlassen. Dem Verfasser kam es übrigens weniger darauf an, einzelne Stücke dieses Satzes zu erweisen (bei einer Verallgemeinerung der angewendeten Beweisführung dürfte sich der ganze Satz ergeben), als eine Methode anzugeben, durch welche es möglich wird, auch einem mit der Zahlentheorie nicht Vertrauten zu zeigen, von welchen Beziehungen und Rechnungen die Zerlegung der Gleichungen, also in einzelnen Fällen die Construirbarkeit der betreffenden Vielecke abhängig ist. —

XXIV.

Bestimmung des kürzesten Abstandes zweier im Raume gelegener nicht paralleler Geraden.

Von

Herrn Professor *C. A. Bretschneider*

am Gymnasium zu Gotha.

Die ausführlicheren Lehrbücher der Geometrie enthalten gewöhnlich die Auflösung der Aufgabe, den senkrechten Abstand zweier im Raume liegender, nicht paralleler, Geraden zu finden, zeigen aber nicht, wie der Zahlwerth dieses Abstandes gefunden werden könne, für welchen immer auf die Hülfsmittel der analytischen Geometrie verwiesen wird. Legendre in seiner Geometrie (p. 378 der Crelle'schen Uebersetzung) giebt zwar einen ziemlich einfachen Ausdruck für diesen Zahlwerth, verwendet aber zu dessen Herleitung doch Vorstellungen, welche der synthetischen Geometrie fremd sind. Das nachfolgende einfache Verfahren zur Lösung der vorgelegten Aufgabe dürfte daher für den Elementarunterricht vielleicht nicht ohne Werth sein.

Sind AB und CD (Taf. IX. Fig. 16.) zwei im Raume gelegene Gerade, welche einander nicht parallel laufen, so fälle man aus einem beliebigen Punkte J der Geraden AB ein Loth $JK=a$ auf CD, aus dem Fusspunkte K desselben ein zweites Loth $KL=b$ auf AB, und aus dem Fusspunkte L wiederum ein drittes Loth $LM=c$ auf die CD. Dann erhält man für das Quadrat des kleinsten Abstandes δ beider Geraden den Werth:

$$\delta^2=\frac{a^2c^2-b^4}{a^2-2b^2+c^2}=GH^2.$$

Für den Werth der Entfernungen JG und KH der beiden

Digitized by Google

Endpunkte des ersten Lothes von den betreffenden Endpunkten der auf beiden Geraden senkrecht stehenden Strecke GH ergiebt sich:

$$JG = \frac{a^2-b^2}{a^2-2b^2+c^2}\sqrt{a^2-b^2}, \quad KH = \frac{a^2-b^2}{a^2-2b^2+c^2}\sqrt{b^2-c^2}.$$

Ist endlich ω der spitze Winkel, den beide Gerade AB und CD zusammen bilden, so wird

$$\sin\omega = \sqrt{\frac{a^2-2b^2+c^2}{a^2-b^2}}, \quad \cos\omega = \sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}$$

gefunden. Fällt man von M aus $MN=d$ senkrecht auf AB, von N aus wiederum $NO=e$ senkrecht auf CD u. s. f., so nähern sich diese Lothe rasch dem Werthe δ, und hängen durch folgende Gleichungen unter einander zusammen:

$$\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2} = \frac{c^2-d^2}{b^2-c^2} = \frac{d^2-e^2}{c^2-d^2} = \frac{e^2-f^2}{d^2-e^2} = \text{u. s. w.}$$

$$= \frac{b^2-d^2}{a^2-c^2} = \frac{b^2-e^2}{a^2-d^2} = \frac{b^2-f^2}{a^2-e^2} = \text{u. s. w.}$$

Es bilden daher die Differenzen a^2-b^2, b^2-c^2, c^2-d^2, u. s. w. eine fallende geometrische Progression.

Der Beweis dieser Ausdrücke wird höchst einfach dadurch geführt, dass man durch die AB eine Ebene XY parallel zu CD, sodann durch CD eine zweite Ebene legt, welche auf XY senkrecht steht und letztere in der Geraden EF schneidet. Zieht man dann von den Punkten K und M aus die Geraden KP und MQ senkrecht auf EF, so ist $JL^2=a^2-b^2$, $KM^2=PQ^2=b^2-c^2$, woraus dann das Uebrige ohne alle Weitläufigkeit gefunden werden kann.

XXV.

Schreiben des Herrn Professor Dr. Ligowski
in Berlin
an den Herausgeber.

Durch die Lösungen der Aufgabe, Band 45. des Archivs, Seite 220., bin ich veranlasst worden, ebenfalls eine Lösung zu versuchen.

Dreiecke, in welchen a, b, c, r, ϱ und F rationale Zahlen sind.

Nach den gebräuchlichen Bezeichnungen ist:

$$1) \ldots \quad F=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}=\varrho . S,$$

also auch:

$$2) \ldots \quad (S-a)(S-b)(S-c)=\varrho^2 S.$$

Setzt man:

$$3) \ldots \quad \begin{aligned} S-a&=\varrho x, \\ S-b&=\varrho y, \\ S-c&=\varrho z; \end{aligned}$$

dann ist:

$$4) \ldots \quad \begin{aligned} S&=\varrho(x+y+z) \\ &=a+\varrho x, \\ &=b+\varrho y, \\ &=c+\varrho z. \end{aligned}$$

Nach 3) und 4) wird aus 2):

$$5) \ldots \quad \begin{aligned} xyz&=x+y+z \\ &=\frac{a}{\varrho}+x \\ &=\frac{b}{\varrho}+y \\ &=\frac{c}{\varrho}+z. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Mithin ist auch:

$$\frac{a}{\varrho}=y+z,$$
$$\frac{b}{\varrho}=x+z,$$
$$\frac{c}{\varrho}=x+y;$$

d. h.:

6) . . . . $a:b:c=(y+z):(x+z):(x+y)$.

Aus 5) ergiebt sich:

7) . . . . $z=\frac{x+y}{xy-1}$.

Diesen Werth von z in 6) eingesetzt ergiebt:

8) . . . $a:b:c=x(y^2+1):y(x^2+1):(x+y)(xy-1)$.

Setzt man:

9) . . . . $a=x(y^2+1)$,

dann ist:

10) . . . . $b=y(x^2+1)$,

11) . . . . $c=(x+y)(xy-1)$.

Hieraus ergiebt sich nach der Formel 1):

12) . . . . $F=xy(x+y)(xy-1)$.

Ferner ist:

13) . . . . $\varrho=xy-1$,

14) . . . . $r=\frac{1}{4}(x^2+1)(y^2+1)$,

15) . . . . $\sin\alpha=\frac{2x}{x^2+1}$,

16) . . . . $\sin\beta=\frac{2y}{y^2+1}$,

17) . . . . $\sin\gamma=\frac{2(x+y)(xy-1)}{(x^2+1)(y^2+1)}$.

Für $x=4$ und $y=3$ erhält man:

$$a=40,\quad b=51,\quad c=77;$$
$$F=924,\quad \varrho=11,\quad r=42{,}5;$$
$$\sin\alpha=\frac{8}{17},\qquad \sin\beta=\frac{3}{5},\qquad \sin\gamma=\frac{77}{85}.$$

Literarischer Bericht
CLXXXI.

Gustav Skřivan,

ordentl. Professor der Mathematik am polytechnischen Landes-Institut in Prag, welcher am 6. Jänner des laufenden Jahres*) nach verhältnissmässig kurzem Krankenlager verschied, und in welchem das reorganisirte Institut, namentlich die böhmischen Lehrer desselben, eine ihrer tüchtigsten Kräfte verloren, wurde am 11. April 1831 in dem böhmischen Städtchen Krucembusk (deutsch Kreuzberg) geboren, und war der einzige Sohn eines Lohgerbers, zugleich Gemeindevorstandes im Orte. Der Sohn war für dasselbe Geschäft bestimmt und erlernte dasselbe auch regelrecht, so dass er seinem Vater bereits Beihilfe leisten konnte. Allein der unwiderstehliche Drang nach geistiger Fortbildung, welcher der junge Skřivan seine freie Zeit widmete, sowie die fortwährenden Bitten des Sohnes bewogen den Vater, denselben, und zwar erst in seinen Jünglingsjahren, nach Prag zu geben, um sich dort für die technischen Studien vorzubereiten. Gustav Skřivan überwand durch eisernen Fleiss bald alle Schwierigkeiten, welche ihm die Mangelhaftigkeit der ersten Schulbildung bereitete, wurde nach abgelegter Aufnahmeprüfung an die polytechnische Schule in Prag aufgenommen, wo er im Jahre 1850 und 1851 studirte, und gieng hierauf zur Fortsetzung seiner Studien an die polytechnische Schule nach Wien, welche er bis zum Jahre 1855 besuchte. In Wien erwachte in ihm eine besondere Vorliebe für mathematische Studien, er beschloss, sich denselben sowie dem Lehrfache zu widmen, und hörte zu diesem Behufe auch alle einschlägigen Collegien an der Universität. Der

*) 1866.

Digitized by Google

Eifer und Fleiss, mit welchem Skřivan sich seinem Berufe widmete, fand bald Anerkennung. Er wurde im Jahre 1856 Lehrer an der Communal-Oberrealschule in Wien, und, nachdem er im Jahre 1858 das Staatsexamen für Oberreallehrer mit bestem Erfolge bestanden, wurde ihm in demselben Jahre die Direction der Oberrealschule am Bauernmarkte in Wien anvertraut, welche Schule er in kurzer Zeit durch Heranziehung ausgezeichneter Lehrkräfte, sowie durch sein eigenes Wirken, einen sehr guten Ruf erwarb. Sein Streben war jedoch immer eine Lehrkanzel an einer Hochschule, namentlich in seinem Vaterlande Böhmen zu erhalten, und er verwendete seine ganze Musse auf mathematische Studien. Aus dieser Zeit datirt sein Buch: Die Grundlehren der Zahlentheorie 1862, sowie einige kleinere Aufsätze. Als mit Schluss des Jahres 1862, um die Reorganisirung des Landespolytechnikums in Prag anzubahnen, eine zweite Lehrkanzel für Mathematik und zwar mit böhmischer Unterrichtssprache daselbst errichtet wurde, schlug der Lehrkörper Gustav Skřivan als den würdigsten vor. Er erhielt diese Stelle wirklich, übersiedelte nach Prag, und gab sich nun ganz mit gewohntem Eifer seinem neuen Berufe hin. Er machte sich vor Allem an's Werk, dem nunmehr auftretenden Bedürfniss der böhmischen Studirenden nach guten mathematischen Lehrbüchern Rechnung zu tragen, und es erschienen von ihm im Jahre 1864 ein Lehrbuch der analytischen Geometrie, und im Jahre 1865 seine Vorlesungen über algebraische Analysis, beide in böhmischer Sprache, ausserdem kleinere Aufsätze in diesem Archive, sowie in der böhmischen Zeitschrift: Krok. Ausserdem nahm er grossen Antheil an der Durchführung der Reform der polytechnischen Schule, welcher er nun angehörte. Sein Körper war jedoch den vielfachen Anstrengungen nicht gewachsen, namentlich schadeten ihm die nächtlichen Arbeiten, und er musste im letzten Jahre zu wiederholten Malen längere Zeit wegen obwohl nicht bedenklichen Unwohlseins seine Vorträge unterbrechen. Im November 1865 begann er an einem Lehrbuch der Differenzialrechnung zu arbeiten, in welcher Arbeit ihn ein heftiger Blutsturz unterbrach, der ihn auf's Krankenlager warf, von welchem er zur tiefsten Betrübniss seiner zahlreichen Schüler und Freunde leider nicht mehr aufstand. Die königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften wählte Skřivan zu ihrem ausserord. Mitgliede, und der Lehrkörper der polytechnischen Schule wählte ihn bei der ersten Wahl der Functionäre zum Vorstande der Ingenieur-Abtheilung. K.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Sciences mathématiques et physiques chez les Belges au commencement du XIXe siècle; par Ad. Quetelet, Directeur de l'Observatoire Royal de Bruxelles, etc. etc. Bruxelles, H. Thiry-Van Buggenhoudt, Imprimeur Éditeur. 1866. 8.

Im Literar. Ber. Nr. CLXXV. S. 3. haben wir die treffliche, in so vielen Beziehungen das grösste Interesse darbietende, für die Geschichte der Mathematik im Allgemeinen sehr wichtige „Histoire des sciences mathématiques et physiques chez les Belges. 1864." von Herrn Ad. Quetelet anzuzeigen das Vergnügen gehabt. In der Vorrede zu dem vorliegenden neueren Werke sagt derselbe mit grosser, jeden wahren Gelehrten so sehr zierenden Bescheidenheit, dass er nicht die Absicht gehabt habe, sein früheres Werk für das laufende Jahrhundert fortzusetzen, vielmehr habe er nur Documente sammeln wollen, welche später die Geschichte der mathematischen und physischen Wissenschaften in dem jetzigen Jahrhundert zu schreiben benutzt werden können. Wie dem auch sein möge, so sind wir doch der Meinung, dass Herr Quetelet in seinem jetzigen Werke die vielfachen und grossen Verdienste, welche sich die neueren belgischen Mathematiker und Physiker, insbesondere und namentlich die Mitglieder der „Classe des Sciences" der mit so grossem Erfolg wirkenden Belgischen Akademie der Wissenschaften, erworben haben — wobei auch selbst die Verdienste ausländischer Gelehrten nicht unberücksichtigt geblieben sind — so vollständig und lehrreich charakterisirt und gewürdigt hat, dass dadurch allerdings die trefflichsten Bausteine für eine künftige Geschichte der mathematischen und physikalischen Wissenschaften in dem jetzigen Jahrhundert zusammengetragen worden sind, wodurch diesem Werke auch für die neuere Geschichte der genannten Wissenschaften überhaupt eine sehr grosse Bedeutung gesichert worden ist, so dass dasselbe von keinem Bearbeiter derselben entbehrt werden kann. Zugleich sind die einzelnen Gelehrten, deren Leben, wissenschaftliche Arbeiten und Verdienste ausführlich mitgetheilt und besprochen werden, so vollständig und in so lebhafter Weise charakterisirt, so viele einzelne Züge aus deren Leben sind mitgetheilt worden, dass das Werk namentlich auch in dieser Rücksicht das höchste Interesse gewährt, und von Niemandem ohne die grösste Befriedigung gelesen werden wird, woran auch noch ausserdem die bei Herrn Quetelet selbstverständliche sehr elegante Sprache

Digitized by Google

und meisterhafte Darstellung einen wesentlichen Antheil haben. Neben dem mathematischen und naturwissenschaftlichen Interesse, welches das Werk vorzugsweise in Anspruch nimmt, bietet dasselbe aber auch ein weiteres und allgemeineres Interesse für die neuere Geschichte der Wissenschaften in Belgien überhaupt dar, indem in demselben auch noch viele andere Gelehrte, die auf anderen wissenschaftlichen Gebieten sich verdient und berühmt gemacht haben, wie z. B. der Dichter Baron **von Stassart**, der Philologe und Archäologe Baron von **Reiffenberg**, u. s. w. charakterisirt werden, in einer Weise, die auch das Interesse jedes Mathematikers u. s. w., der zugleich ausserhalb seines engeren wissenschaftlichen Gebietes auf anderen Feldern sich umzusehen gewohnt ist, in Anspruch zu nehmen in hohem Grade geeignet ist; ja selbst für die Geschichte des Vaterlandes des geehrten Herrn Verfassers überhaupt scheint uns das sehr schöne Werk wegen mancher in demselben vorkommenden historischen Excurse keineswegs ohne Bedeutung zu sein.

Wir schliessen mit einer Uebersicht des Inhalts des in so vielen Beziehungen so sehr zu beachtenden Werkes: **Livre Premier.** État général des sciences, p. 1—96. Wir können uns nicht versagen, den Herrn Verfasser über das, was er in diesem ersten Buche bezweckt hat, selbst sprechen zu lassen; er sagt darüber in der Vorrede, p. II.: „Dans le premier livre, j'appelle l'attention sur un sujet qui ne parait pas avoir été suffisamment étudié. Par suite de l'avancement des sciences, il devient facile aujourd'hui de s'entendre avec d'autres savants et de concerter ensemble ses recherches pour élucider un même point scientifique, contre lequel venait échouer autrefois toute la capacité d'un seul homme, quelle que fût son ardeur au travail: je citerai, par exemple, les perturbations simultanées du magnétisme sur les différents points du globe et leur mode d'action dans un instant donné. Il faut évidemment substituer à un seul observateur, quel que soit son mérite, une réunion d'observateurs actifs, répandus sur les différentes parties du globe, qui, avec toute l'attention possible, constatent les mêmes faits d'après les mêmes méthodes et avec les mêmes instruments. Notre Belgique, si ralentie dans sa marche, par plusieurs causes indépendantes d'elle, a été l'une des nations qui est entrée avec le plus d'ardeur dans cette voie. J'ai tâché de faire comprendre ensuite quels ont été les principaux travaux exécutés dans ce pays, soit individuellement, soit collectivement et en dirigeant l'attention de plusieurs savants à la fois vers une difficulté qu'il s'agissait d'étudier et de surmonter.“ Der Herr Verfasser, der bekanntlich

Digitized by Google

selbst so sehr und nach so verschiedenen Richtungen hin zur Förderung wissenschaftlicher Associationen beigetragen und dafür in seinem ganzen Leben gewirkt hat, verbreitet sich darüber in diesem ersten Buche sehr vollständig und in höchst lehrreicher Weise, wobei er auch die verschiedenen wissenschaftlichen Arbeiten, welche vorzugsweise auf dem Wege der Association theils hervorgerufen, theils gefördert worden sind, sämmtlich besonders hervorhebt und ausführlicher bespricht. Dass in dieser Beziehung die Belgische Akademie der Wissenschaften einen ganz besonders hervorragenden Platz einnimmt, ist allgemein genug bekannt, und daher auch vollständig gerechtfertigt, dass Herr Quetelet deren Arbeiten sowohl im Allgemeinen, als auch die ihrer Mitglieder im Besonderen mit grösserer Ausführlichkeit bespricht. — **Livre II.** Sciences. Savants Belges: Charles-François Le Prud'homme d'Hailly, vicomte de Nieuport. — Jean-Baptiste Van Mons. — Le colonel G.-P. Dandelin. — Pierre-François Verhulst. — Gaspard-Michel Pagani. — Jean-Guillaume Garnier. — Jacques-Guillaume Crahay. — Pierre Simons. — François-Philippe Cauchy. — Antoine Belpaire. — Jean Kickx père. — Jean Kickx fils — Daniel-Joseph-Benoit Mareska. — Henri-Guillaume Galeotti. p. 97.—p. 316. Ganz besonders machen wir die Leser des Archivs auf die in diesem zweiten Buche gegebenen sehr ausführlichen Lebensbeschreibungen der Mathematiker und Physiker: Vicomte de Nieuport. p. 99. — p. 109. Van Mons. p. 110.—p. 137. — Colonel Dandelin. p. 138.—p. 164. — Verhulst. p. 165.—p. 183. — Pagani. p. 184. — p. 202. — Garnier. p. 203.—p. 243. — Crahay. p. 244.—p. 256. aufmerksam. Jeder wird von der Lectüre derselben mit der grössten Befriedigung und grossem Gewinn an seinem historischen und literarischen Wissen scheiden. — **Livre III.** Littérateurs et Artistes Belges: Charles-Joseph-Emmanuel Van Hulthem. — Louis-Déodat Dewez. — Egide-Norbert Cornelissen. — Philippe Lesbroussart. — Goswin-Joseph-Augustin baron de Stassart. — Fr.-Aug.-Ferd.-Th. baron de Reiffenberg. — Louis-Vincent Raoul. — Jean-Théodore-Hubert Weustenraad. — Léonard Pycke. — Philippe Bernard. — Matthieu-Edouard Smits. — Jean-Baptiste Van Eycken. p. 317.—p. 558. — **Livre IV.** Savants et Littérateurs étrangers. Leurs relations avec la Belgique: Dominique-François-Jean Arago. — Le baron F.-H.-A. de Humboldt. — Alexis Bouvard. — Henri-Chrétien Schumacher. — Charles-Frederic Gauss. — Jean-Wolfgang Goethe. — Vincent Gioberti. — François-Xavier-Joseph Droz. — Thomas-Robert Malthus. — Antoine-Reinhard Falck. — D.-J. Van Ewyck van Oosbroek en de

Digitized by Google

Bilt. — Le baron de Keverberg de Kessel. p. 559.—p. 741. Mögen sich in diesem vierten Buche unsere Leser die Lebensbeschreibungen der Mathematiker und Physiker Arago. p. 559.—591. — Humboldt. p. 592.—p. 607. — Bouvard. p. 608. — p. 628. — Schumacher. p. 629.—p. 642. — Gauss. p. 643.—p. 655. ganz besonders empfohlen sein lassen.

Wir zweifeln nicht, dass dem trefflichen und höchst interessanten, auch äusserlich sehr schön ausgestatteten Buche, für dessen Herausgabe dem Herrn Verfasser der grösste Dank gebührt, die so sehr verdiente Beachtung bald in den weitesten Kreisen zu Theil werden wird.

Arithmetik.

Trattato di Algebra Superiore di Giovanni Novi, Professore di Algebra Superiore nella R. Università di Pisa. Parte prima. Analisi algebrica. Firenze. Felice le Monnier. 1863. 8°.

Leider ist es uns erst jetzt möglich gewesen, uns auf dem Wege des Buchhandels in den Besitz dieses Werkes zu setzen, und die Beziehungen und Verbindungen zwischen dem deutschen und italienischen Buchhandel müssen in der That noch sehr unvollkommen sein, wenn — wie es im vorliegenden Falle uns begegnet ist — in Deutschland fast Jahre lange Bemühungen nöthig sind, um sich in den Besitz eines italienischen Werkes zu setzen: je wichtiger aber jetzt gerade auch in den mathematischen Wissenschaften die sorgfältigste Berücksichtigung und genaueste Kenntnissnahme von den Bestrebungen und Arbeiten so vieler trefflichen italienischen Gelehrten auf dem genannten wissenschaftlichen Gebiete ist: desto erfreulicher ist es, in der neuesten Zeit mit Sicherheit hoffen zu dürfen, dass auch in dem erwähnten Misstande bald eine nachhaltige Besserung eintreten werde.

Das vorliegende Werk hat uns so vieles Interesse eingeflösst, dass wir, wenn auch seit seinem Erscheinen bereits drei Jahre verflossen sind, eine ausführlichere Anzeige desselben noch für nöthig halten. Der uns jetzt vorliegende erste Theil enthält unter dem Namen: „Analisi algebrica“ — um es kurz zu sagen — die allgemeine Lehre von den Functionen und die Theorie der Reihen. Ob ein zweiter Theil erschienen ist, vermögen wir nicht zu sagen, weil es uns bis jetzt nur möglich gewesen ist, in den Besitz des ersten Theils zu gelangen. Es lässt sich aber mit

Digitized by Google

Sicherheit annehmen, dass der zweite Theil der allgemeinen Theorie der Gleichungen und deren Auflösung gewidmet sein wird, und wir können nicht leugnen, dass wir, nach der in dem ersten Theile uns vorliegenden schönen Probe, sehr begierig sind, diesen zweiten Theil kennen zu lernen, wenn er schon erschienen sein sollte, worüber wir unseren Lesern möglichst bald Genaueres zu berichten suchen werden.

Was nun den vorliegenden ersten Theil im Allgemeinen betrifft, so können wir aus vollkommenster Ueberzeugung versichern, dass derselbe durchaus im Geiste der neueren strengen Analysis, oder, mit anderen Worten, ganz im Geiste Cauchy's verfasst ist, dass derselbe aber, wie aus der nachfolgenden ausführlicheren Inhaltsangabe ersichtlich sein wird, in mehreren Beziehungen viel weiter geht als die classische „Analyse algébrique" des genannten grossen Mathematikers, auf welcher natürlich alle neueren Bearbeitungen der algebraischen Analysis oder, nach älterer Bezeichnung, der sogenannten Analysis des Endlichen, als ihrer Hauptgrundlage zunächst fussen müssen. Die Darstellung und Beweisführung ist überall, ohne zu weitläufig zu sein, vollkommen streng und evident, was bei einem Werke dieser Art natürlich bei Weitem die Hauptsache ist, weil es in diesem Falle viel mehr eben auf diese völlig stringente Beweisführung, als auf die Neuheit der Resultate ankommt, und wir können in dieser Beziehung dem Werke, mit besonderer Freude über sein Erscheinen, nur das grösste Lob ertheilen und es unseren Lesern zu sorgfältigster Beachtung empfehlen, indem wir überhaupt der Meinung sind, dass es unter den wenigen, in diesem strengen Geiste bis jetzt verfassten Werken eine der ersten Stellen einnimmt, der mathematischen Literatur zur Zierde gereicht, und als Lehrbuch von Neuem den Beweis liefert, dass auf den italienischen höheren Unterrichtsanstalten in allen mathematischen Wissenschaften wahre wissenschaftliche Strenge und Evidenz als das Hauptziel eines wahrhaft Frucht bringenden Unterrichts allgemein angesehen wird.

Diesem allgemeinen Urtheile über das treffliche Werk, mit welchem wir dasselbe nochmals zu sorgfältigster Beachtung empfehlen, fügen wir die folgende Uebersicht des Hauptinhalts bei:

In der Einleitung erläutert der Herr Verfasser in völlig deutlicher und bestimmter Weise die nöthigsten Grundbegriffe über beständige und veränderliche Grössen, Functionen im Allgemeinen und die verschiedenen Arten derselben, u. s. w. — Das 1ste Kapitel enthält eine kurze, für das Folgende aber hinreichende

Digitized by Google

Darstellung der Lehre von den Permutationen, Combinationen und Variationen. — Das 2te Kapitel ist der Lehre von den complexen Zahlen gewidmet, mit verschiedenen lehrreichen Anwendungen auf die Summirung endlicher goniometrischer Reihen und auf die Bestimmung der Wurzeln aus der positiven und negativen Einheit. — Das 3te Kapitel betrifft die Gränzen und die Stetigkeit, so wie die geometrische Darstellung der Functionen, wiederum mit verschiedenen Anwendungen, wie u. A. den Satz:

$$\lim \frac{1}{n}\left\{1+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{n}\right)^2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{1-\left[\frac{(n-1)x}{n}\right]^2}}\right\}$$

$$=\frac{\arcsin x}{x}$$

für $n=\infty$. — Das 4te, 5te, 6te und 7te Kapitel enthalten eine in jeder Beziehung lehrreiche und sehr vollständige Darstellung der allgemeinen Lehre von den sogenannten unendlichen Reihen, natürlich mit ganz besonderer Rücksicht auf Convergenz und Divergenz, die verschiedenen Rechnungsarten mit Reihen, recurrirende Reihen, Doppelreihen, Potenzreihen, Binomial- und Polynomialreihen, u. s. w., mit einer grossen Anzahl sehr lehrreicher Special-Untersuchungen, so dass wir die genannten vier Kapitel einem Jeden, der die Lehre von den Reihen in ihrem neuesten Zustande mit hinreichender Vollständigkeit kennen lernen will, ganz besonders empfehlen können. — Das 8te Kapitel enthält die Exponential- und logarithmischen Reihen, und das 9te Kapitel ist den circularen und hyperbolischen Reihen gewidmet, enthält also auch eine sehr lehrreiche Darstellung der Theorie der hyperbolischen Functionen. — Das 10te Kapitel enthält verschiedene speciellere Untersuchungen über die Reihen, mit Vorausschickung verschiedener besonders allgemeiner Sätze über die Convergenz der Reihen. — Das 11te Kapitel ist der Theorie der Producte mit unendlich vielen Factoren, mit besonderer Rücksicht auf die Untersuchungen von Gauss und Heine, gewidmet, und das 12te Kapitel betrifft die Theorie der analytischen Facultäten mit besonderer Rücksicht auf die Arbeiten von Betti und Weierstrass. — In dem 13ten und 14ten Kapitel endlich hat der Herr Verfasser die Theorie der continuirlichen Brüche, ihre Verwandlung in Reihen und umgekehrt, wie es scheint, mit besonderer Vorliebe und gleichfalls überaus lehrreich und vollständig, auch hier immer mit besonderer Rücksicht auf Convergenz und Divergenz, behandelt.

Digitized by Google

Man wird aus dieser Darlegung des Inhalts entnehmen, dass der Herr Verfasser, was wir noch besonders hervorzuheben nicht unterlassen, in diesem ausgezeichneten Buche alle Arten, wie Functionen durch in's Unendliche fortlaufende Ausdrücke dargestellt werden können, nämlich: 1. durch Verbindung der Glieder der vorzugsweise mit dem Namen „Reihen" belegten analytischen Ausdrücke durch Addition und Subtraction; 2. durch Producte mit unendlich vielen Factoren also durch analytische Ausdrücke, deren in's Unendliche fortlaufende Glieder durch Multiplication mit einander verbunden sind; 3. durch die sogenannten continuirlichen Brüche, also durch analytische Ausdrücke, deren in's Unendliche fortlaufende Glieder durch Division mit einander verbunden sind; mit ganz gleicher Vollständigkeit, Gründlichkeit, Strenge und Sorgfalt behandelt hat, was in gleicher Weise noch nicht geschehen sein dürfte, so dass also auch in dieser Rücksicht das Werk die wärmste Empfehlung verdient.

So bald uns der zweite Theil zu Gesicht kommt, werden wir nicht verfehlen, unsere Leser sogleich ausführlich mit demselben bekannt zu machen. G.

Physik.

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Redigirt von G. Jelinek und J. Hann. I. Band. Nr. 5—12.

Die 4 ersten Nummern dieser neuen sehr verdienstlichen Zeitschrift sind im Literar. Ber. Nr. CLXXIX. S. 18. von uns angezeigt worden. Da wir uns über die Entstehung und Tendenz derselben an diesem Orte schon ausführlich genug ausgesprochen haben, so ist es nur nöthig, den Inhalt der uns jetzt vorliegenden Nummern 5 — 12 des ersten Bandes im Allgemeinen anzugeben, um dadurch von Neuem zu zeigen, wie sehr diese neue Zeitschrift die allgemeinste Beachtung und Empfehlung verdient, wobei wir uns aber der Beschränktheit des Raumes wegen auf den Inhalt der jeder Nummer beigefügten kleineren Mittheilungen, so viel Interessantes auch gerade diese meistens enthalten, nicht einlassen können, sondern uns mit der Angabe der grösseren Aufsätze begnügen müssen: Die Witterungs-Vorherbestimmungen der Pariser Sternwarte. — Das Aneroid als Instrument zur Messung der Aenderungen der Schwere. Von Sr. Excellenz B. Freiherrn von Wüllerstorf-Urbair Dieser sehr deutlich verfasste Aufsatz des be-

rühmten Herrn Verfassers erläutert in sehr lehrreicher Weise die von demselben zuerst gefasste und weiter verfolgte Idee, aus der Vergleichung gleichzeitiger mit einem Aneroid und einem Quecksilberbarometer angestellter Beobachtungen die Veränderungen der Schwere auf der Erdoberfläche zu bestimmen; wir empfehlen Jedem, der sich hiermit näher bekannt machen will, diesen Aufsatz recht sehr. — Ueber eine eigenthümliche Trübung des Himmels in Sicilien und deren Beziehung zum Scirocco. Von Dr. Rudolph Edl. von Vivenot jun. — Ueber die grössten Regenmengen in Oesterreich. Von Carl Fritsch. — Ueber die Grösse der Verdunstung in Ofen. Von Dr. Guido Schenzl. — In Nr. 10. S. 157.—S. 160. giebt Herr Jelinek unter den kleineren Mittheilungen ausführliche Nachricht von den grossartigen meteorologischen Einrichtungen in Italien und den Arbeiten der verschiedenen Stationen, so wie über die von denselben ausgehenden telegraphischen Mittheilungen. Es sind in Italien, grösstentheils an den Küsten, 21 meteorologische Stationen errichtet, und deren telegraphische Correspondenz ist am 1. April 1866 eröffnet worden. Die Organisation derselben ist der in Oesterreich ähnlich. Wir machen auf den interessanten Bericht des Herrn Jelinek recht sehr aufmerksam.

Vermischte Schriften.

Bulletins de l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXV. S. 13.)

34me Année, 2me Sér. T. XX. Seconde note sur de nouvelles illusions d'optique, par M. Delboeuf. Rapport de M. Plateau. p. 6. — Sur les paratonnerres et sur quelques experiences faites avec l'etincelle d'induction et les batteries de Leyde; première note par M. Melsens. p. 15. — Note sur l'état de l'atmosphère à Bruxelles, pendant l'année 1864; par M. Ernest Quetelet. p. 34. — Sur les propriétés de deux droites faisant avec un axe fixe des angles complémentaires; par M. Van der Mensbrugghe. p. 60. — Seconde note sur de nouvelles illusions d'optique. Essai d'une théorie psychophysique de la manière dont l'oeil apprécie les grandeurs; par M. J. Delboeuf. p. 70. — Sur la stabilité des systèmes liquides en lames minces, deuxième partie; par M. Lamarle. Rapport de M. Plateau. p. 220. — Note sur les questions: Les pointes des paratonnerres ont-elles

une action préventive notable? Est-il avantageux d'employer des pointes aiguës ou des pointes multiples; par M. F. Duprez. p. 227. — Orages du mois de juillet 1865; par M. A. Quetelet. p. 361. — M. le secrétaire perpétuel (A. Quetelet) presente la note suivante sur les Apparitions remarquables d'étoiles filantes recueillies dans diverses chroniques des siècles passés, par M. Alexis Perrey. p. 370. — Théorie nouvelle du mouvement d'un corps libre; par M. F. Folie. p. 435. — Éruption du Vésuve de 1631; par M. H. Le Hon. p. 483. (Sehr interessanter und wichtiger, 56 Seiten umfassender Aufsatz). — Observation, à Bruxelles, de l'éclipse de lune du 4 octobre 1865; par MM. Ad. et Ern. Quetelet. p. 602. — Étoiles filantes observées à Bruxelles, le 10 août 1865; par MM. Ad. Quetelet, Ern. Quetelet et Hooreman. p. 602. — Sur les orages observées en Belgique pendant le mois d'août 1865, par M. Ad. Quetelet. p. 605. — Herr Houzeau theilt p. 614. in einem Briefe „Nouvelle-Orleans, 13 août 1865" Bemerkungen über die Auflösung der Gleichungen durch Reihen mit; für die kleinste Wurzel x_1 der Gleichung des dritten Grades

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

giebt er die folgende Reihe:

$$x_1=-\frac{c}{b}-\frac{c^2}{b^3}a-\frac{c^3}{b^5}(2a^2-b)-5\frac{c^4}{b^7}a(a^2-b)$$

$$-\frac{c^5}{b^9}(14a^4-21a^2b+3b^2)-14\frac{c^6}{b^{11}}(3a^4-6a^2b+2b^2)$$

$$-6\frac{c^7}{b^{13}}(22a^6-55a^4b+30a^2b^2-2b^3)$$

$$-33\frac{c^8}{b^{15}}a(13a^6-39a^4b+30a^2b^2-5b^3)-\ldots\ldots$$

Sur la force musculaire des insectes; par M. Felix Plateau. (Enthält interessante und möglichst genaue Messungen der Kraft der Insekten mit einem besonders construirten Dynamometer.) p. 732. — Étoiles filantes de novembre 1865; avec une note de M. Secchi à M. Ad. Quetelet. p. 814. — Aurores boréales observées à Christiania pendant l'été et l'automne de 1865. (Lettre de M. Chr. Hansteen à M. Ad. Quetelet.) p. 816. — Comparaison des pouvoirs refringents et calorifiques de certains gaz; par M. Ch. Montigny. p. 855.

35me Année, 2me Sér. T. XXI. Sur les étoiles filantes du

Digitized by Google

10 août et du mois de novembre 1865, observées aux États-Unis. Lettre de M. Newton, de New-Haven, à M. Ad. Quetelet. p. 12. — Note sur l'intégration d'un système d'équations homogènes; par M. E. Catalan. p. 25. — Note sur la rotation du soleil; par M. F. Dauge. Rapport de M. Schaar. p. 80. — Sur l'état de l'atmosphère, à Bruxelles, pendant l'année 1865; par M. Ernest Quetelet. p. 82. — Note sur la température de janvier 1866, à Gand; par M. Duprez. p. 130. — Faut-il terminer les paratonnerres par des pointes ou par des boules? Lettre adressée par M. Peltier à M. Ad. Quetelet. p. 132. — Note sur la rotation du soleil, par M. Dauge. p. 142. — Perturbations de la déclinaison magnétique, observées dans les lignes télégraphiques de Belgique et de France et dans les Observatoires de Bruxelles et de Paris, le 21 février 1866. p. 216. — Sur les tremblements de terre en 1864, avec suppléments pour les années 1843 à 1863; par M. Alexis Perrey. Rapport de M. Duprez. Rapport de M. Ad. Quetelet. p. 264. — Perturbation magnétique à Christiania le 21 février 1866; lettre de M. Hansteen à M. Ad. Quetelet. p. 280. — Phénomènes atmosphériques remarquables observés à l'observatoire de Bruxelles au commencement de 1866, par M. Ern. Quetelet. p. 283. — Détermination rationelle des nombres de la gamme chromatique, par M. J. Delboeuf. Rapport de M. Gloesener. p. 313. — Détermination rationelle des nombres de la gamme chromatique, par M. J. Delboeuf. p. 339. — Discussion et réalisation expérimentale d'une surface particulière à courbure moyenne nulle, par M. G. Van der Mensbrugghe. Rapport de M. Lamarle. Rapport de M. Catalan. (Betrifft die von Scherk im Jahre 1835*) auf die Gleichung

$$4\sin mz = \pm (e^{mx} - e^{-mx})(e^{my} - e^{-my}),$$

wo m eine Constante bezeichnet, zurückgeführte Fläche.) p. 530. — Note sur la nouvelle étoile changeante de la couronne boréale, par M. Ern. Quetelet. (Zu Brüssel angestellte verdienstliche Beobachtungen dieses merkwürdigen Sterns, und Mittheilung anderer Beobachtungen.) p. 535. — Discussion et réalisation expérimentale d'une surface particulière à courbure moyenne nulle; par M. G. Van der Mensbrugghe. (S. oben.) p. 552.

Am 7ten Mai 1866 feierte die Königlich Belgische Akademie der Wissenschaften das

---

*) Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Gränzen. Journal von Crelle. Thl. XIII. S. 185.

„Cinquantième Anniversaire de la reconstitution de l'Académie“

in einer feierlichen Sitzung aller drei Klassen. Der Präsident der Akademie Herr Ch. Faider hielt die p. 457—p. 474 mitgetheilte Festrede, in welcher er das Thema behandelte:

„Léopold Ier et la royauté belge“

und in der er in beredten Worten die Verdienste und die ganze Persönlichkeit des edlen, nur erst vor Kurzem geschiedenen Monarchen schilderte.

Nach Herrn Faider ergriff Herr Ad. Quetelet das Wort und sprach:

„Sur les travaux d'ensemble de l'Académie royale et sur les relations avec les Sociétés savantes étrangères, pendant le demi-siècle qui vient de s'écouler“

auf welche historisch und literarisch sehr zu beachtende Rede wir unsere Leser noch besonders aufmerksam zu machen nicht unterlassen wollen.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CLXXIX. S. 21.)

Anno IV. Luglio e Agosto 1866. Dimostrazione di alcune formole del Sig. Liouville; per C. M. Piuma. p. 193. — Ricerche ulteriori sulla rotazione di un sistema di tre masse che verificano la legge delle aree; per A. de Gasparis. p. 202. — Note sur les séries de courbes à double courbure; par E. de Jonquières, p. 210. — Note pour le Giornale di Matematiche; par E. de Jonquières. p. 212. — Sopra una curva di terza classe e di quart'ordine; par G. Battaglini. p. 214. — Saggio elementare di Geometria della sfera; per P. Cassani. p. 223. — Tre teoremi sul cerchio dei 9 punti; per L. Rajola. p. 238. — Questione. p. 239. — Dimostrazione di un teorema proposto nell' Educational Times; per L. Rajola. p. 241. — Nota sull' equazioni differenziali che si presentano nei problemi di Meccanica; per R. del Grosso. p. 243.

Sitzungsberichte der königl. böhmischen Gesell-

Digitized by Google

schaft der Wissenschaften in Prag. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXVIII. S. 17.)

Jahrgang 1865. Juli — December. S. 39. Herr Nowak trug eine hydrologisch-meteorologische Studie vor unter dem Titel: Ein Streifzug über den dunklen Grund der nassen und trockenen Jahre. — S. 44. — S. 62. Herr Dastig hielt einen freien Vortrag: Ueber das Zustandekommen der räumlichen Gesichtsanschauung, unter Berücksichtigung der physiologischen Mitbedingungen. (Dieser Aufsatz scheint uns namentlich in psychologischer und physiologischer Rücksicht recht sehr Beachtung zu verdienen.) — S. 62. Herr Pozděna (als Gast) trug einen auf specielle Beobachtungen basirten Commentar zur modernen Quellentheorie vor. (Nur im Auszuge mitgetheilt.) — S. 93. — S. 96. Herr Fr. Štolba (als Gast) hielt einen Vortrag über die Darstellung von Sauerstoffgas aus Chlorkalk und über ein Verfahren diess Gas in Flaschen aufzufangen. (Beides, besonders das letztere deutlich beschriebene Verfahren, scheint auch bei'm Unterrichte nützliche Anwendung finden zu können, und wird daher hier darauf hingewiesen.)

Nachträglich bemerken wir, dass in der Anzeige von Jahrgang 1865, Januar—Juni, (S. 58.), im Literar. Ber. Nr. CLXXVIII. S. 17. durch ein Versehen auf den längeren, der Mittheilung wohl werthen Vortrag hinzuweisen unterblieben ist, den Herr Joseph Wesely (als Gast) über sein Verfahren elementarer Bestimmung der Trägheitsmomente mittelst Anwendung von Summenreihen hielt.

Jahrgang 1866. Jänner—Juni. S. 18. Herr Prof. Franz Tilscher (als Gast) hielt einen demonstrativen Vortrag über einige Sätze aus der descriptiven Geometrie. — S. 41— S. 61. Herr Alois Nowak hielt einen (hier vollständig mitgetheilten) Vortrag: Ueber die Natur und meteorologische Bedeutung des Grundwassers.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. (Bis Nr. 579 im Literar. Ber. Nr. CLXXI. S. 22.)

Aus dem Jahre 1865. Nr. 580.—602. — H. Wild: Bericht der meteorologischen Centralstation in Bern vom Jahre 1864. S. 37. — S. 54. — H. Wild: Nachrichten von der Sternwarte in Bern aus den Jahren 1863 — 1864. I. Astronomische Beobachtungen; II. Magnetische Beobachtungen, S. 64. — S. 73. —

Professor Dr. Perty: Ueber Secchi's in Rom Abbildung des grossen Sonnenfleckens vom Februar 1865. Betrifft eine merkwürdige photographische Abbildung des genannten grossen Sonnenfleckens, welcher von dem berühmten, seit einer Reihe von Jahren eifrig mit Sonnenbeobachtungen beschäftigten Secchi in Rom im grossen Refractor von 9 Zoll Oeffnung und 14 Fuss Brennweite des Collegio Romano in Rom gesehen wurde. S. 74. — S. 78. — R. Lauterberg, Ingenieur: Bericht zu den Pegelbeobachtungen der Aar in Bern und Thun vom 1. Mai 1864 bis 1. Mai 1865. (Für solche Beobachtungen und deren Benutzung sehr lehrreich.) S. 79. — S. 96. — Friedrich Geiser, Docent am eidgenössischen Polytechnikum: Ueber eine geometrische Verwandtschaft zweiten Grades. („In Bezug auf einen festen Punkt P und einen festen Kegelschnitt K kann jedem Punkte p in der Ebene ein anderer p_1 zugeordnet werden, indem man die Gerade pP zieht, welche K in k_1 und k_2 schneiden möge, und nun zu p, k_1 und k_2 den vierten harmonischen p zugeordneten Punkt p_1 construirt. Einem Punkte p entspricht im Allgemeinen stets ein und nur ein Punkt p_1, während diesem wiederum der ursprüngliche p conjugirt ist; die aufgestellte Beziehung ist also eindeutig und reciprok." Diese Beziehungen betrifft der vorliegende Aufsatz.) S. 97. — S. 107. — Professor Dr. Perty: Ueber das neue Marine-Doppelfernrohr von Herrn Sigmund Merz in München (Oeffnung der Objective 11 Linien; Brennweite $4\frac{1}{2}$ Zoll; Sehfeld 3 Grade; Vergrösserung wird auf 10 Mal angegeben, ist aber wirklich fast 12 Mal; die Oculare sind die gewöhnlichen Fraunhoferschen, aus 4 Gläsern bestehenden; die mechanische Arbeit ist sehr vorzüglich; Preis 180 Fr.). S. 139. — S. 140.

Sitzungsberichte der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXVIII. S. 17.).

1866. I. Heft I. Enthält in den Kreis des Archivs gehörende Aufsätze nicht. Sehr interessant sind aber die Aufsätze von Nägeli: a) die abgeleiteten Pflanzenbastarde. S. 71; b) die Theorie der Bastardbildung. S. 93.

1866. I. Heft II. Enthält in den Kreis des Archivs gehörende Aufsätze nicht.

1866. I. Heft III. Zu unserem grossen Bedauern ist uns dieses Heft nicht zugegangen, vielleicht in Folge des Krieges,

Digitized by Google

was wir um so mehr beklagen, weil dasselbe Necrologe von **Baumgartner**, **Bond** und **Encke** enthält. Vielleicht dürfen wir uns einer späteren Zusendung dieses uns sehr interessanten Heftes erfreuen.

1866. I. **Heft IV.** Wir machen dringend aufmerksam auf den Aufsatz: **Nägeli**: Ueber die Theorie der Capillarität. S. 597. — S. 627.

1866. II. **Heft I.** Enthält in den Kreis des Archivs gehörende Aufsätze nicht.

Berichtigungen.

Thl. XLV. S. 238. Z. 11 v. u. am Ende dieser Zeile ist das ausgelassene Wort „nenne" beizufügen.

Thl. XLV. Hft. 4. S. 387. Z. 5. v. u. ist statt „142° C." zu setzen: „— 142° C."

Digitized by Google

Literarischer Bericht
CLXXXII.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Le Messâbat de Mohammed ben Moussa al Khârezmi. Extrait de son Algèbre. Traduit et annoté par Aristide Marre. 2e Édition revue et corrigée sur le texte arabe publié par Rosen. Rome. Imprimérie des sciences mathématiques et physiques. 1866. 4°.

Abou Abdallah Mohammed ben Moussa Al Khârezmi ist der älteste arabische Algebrist; Ibn Khaldoûn erklärt ausdrücklich, dass Abou Abdallah Al Khârezmi unter den Arabern der erste war, welcher über die Algebra schrieb. Die gelehrte und interessante Vorrede enthält weitere historische Nachrichten über diesen arabischen Mathematiker. Sein hierher gehörendes Werk führt den Titel: „Kitâb al mokhtessar fî hissâb aldjebr oua'l mokâbalah, und ist um das Jahr 820 der christlichen Zeitrechnung auf den Wunsch des Chalifen Al Mamoun verfasst. Im Jahre 1831 lieferte Rosen den ganzen algebraischen Text nebst einer englischen Uebersetzung. Nach dieser ist die, in zweiter Auflage hier vorliegende französische Uebersetzung des auf die Geometrie bezüglichen Kapitels: „Bâb al messâhat" von Herrn Aristide Marre gefertigt, wofür derselbe jedenfalls den Dank aller derer verdient, die aus der Geschichte der Mathematik ein besonderes Studium machen, denen wir daher diese Schrift recht sehr zur Beachtung empfehlen. In einer grösseren Anzahl von Noten sind die gegebenen algebraischen Auflösungen geometrischer Aufgaben von dem Herrn Uebersetzer erläutert.

Digitized by Google

Brani dell' Aritmetica d'Elia Misrachi. Tradotti dall' Ebraico con alcune note. Lettera IV. di M. Steinschneider a. D. B. Boncompagni. Roma. Tipografia delle scienze matematiche e fisiche. 1866. 4°.

Elia Misrachi oder Mizrahi (d. h. ein Morgenländer, setzt der Herr Herausgeber hinzu) war gegen Ende des 15ten Jahrhunderts Rabbiner in Constantinopel, und starb 1522 oder 1527. Der Brief an den Fürsten Herrn B. Boncompagni enthält weitere sehr interessante literarische und historische Nachrichten über denselben, auf die wir unsere Leser recht sehr zu verweisen uns erlauben. Von seiner „Arithmetik" (Buch von der Zahl) liefern die hier aus derselben gegebenen Mittheilungen ein anschauliches Bild, weshalb auch diese Schrift jedenfalls ein mit Dank aufzunehmender Beitrag zur Geschichte der Mathematik ist.

In einem Auszuge aus den Bulletins de l'Académie R. de Bruxelles. 2me sér. t. XXII. nos 9 et 10. 1866. hat Herr Ad. Quetelet zwei höchst interessante Briefe Kaiser Karl's V. an François Rabelais mitgetheilt, welche er der Güte des Herrn Chasles verdankt. Diese Briefe zeigen, wie sehr der grosse Kaiser sich auch für die Wissenschaften interessirte, weshalb wir uns erlauben, dieselben nachfolgend unseren Lesern mitzutheilen:

„Maistre Rabelais,

Vous qu'avez l'esprit fin et subtil, me pourriez vous satisfaire? J'ay promis 1000 escus à celuy qui trouvera la quadrature du cercle, et nul mathématicien n'a pu resoudre ce problesme. J'ay pensé que vous qui estes ingénieux en toutes choses me satisferiez; et si le faictes, forte recompense en recevrez. Dieu vous vienne en aide."

„Ce X septembre 1542."

„Charles."

A maistre François Rabelais, docteur en toutes sciences et bonnes lettres.

Ferner:

„Maistre Rabelais, je suis moult surpris de ce que ne m'avez encore fait response à la proposition que je vous ay faite touchant la quadrature du cercle. Est-ce que reellement cette

Digitized by Google

chose serait impossible à resoudre? Mais quant ainsy serait, je pryeray vous me faire response quelle quelle soit, vous nignorez pas qu'elle sera toujours bien venue de moy. Je l'attens donc par le porteur dicelle, et me ferez plaisir. Adieu."

„Charles."

A maistre Fr. Rabelais.

Also selbst Karl V. interessirte sich lebhaft für die Quadratur des Kreises! Das Weitere muss man a. a. O. in den interessanten Aufsätzen der Herren Ad. Quetelet und Gachard nachsehen, wobei wir freilich bemerken müssen, dass Herr Gachard Zweifel rücksichtlich der Echtheit dieser Briefe erhebt, die aber auf der anderen Seite von Herrn Ad. Quetelet mit sehr triftigen Gründen in einer interessanten Ausführung vertheidigt wird.

Arithmetik.

Sehr wichtige literarische Nachricht.

Herr Professor Bierens de Haan an der Universität zu Leiden hat die Güte gehabt, uns die interessante und wichtige Nachricht zu geben, dass von seinen Tafeln der bestimmten Integrale, durch welche er der Wissenschaft, namentlich der Integralrechnung und deren allseitigster Anwendung, einen so grossen Nutzen gebracht hat, in kurzer Zeit eine neue Ausgabe erscheinen wird, auf die wir unsere Leser durch die Mittheilung des wesentlichen Inhalts der folgenden, von dem Herrn Verfasser selbst mit besonderer Güte uns gegebenen vorläufigen Nachricht am besten aufmerksam machen können. Wir sehen diesen neuen Tafeln, die jedenfalls wie die älteren auch unter den besonderen Auspicien der Königlich niederländischen Akademie der Wissenschaften publicirt werden, mit dem grössten Verlangen entgegen, und sprechen, so wie dem Herrn Verfasser selbst, auch der vorher genannten gelehrten Körperschaft, für die Publication dieses neuen wichtigen Werkes schon jetzt unseren wärmsten Dank aus. G.

Die zweite Auflage meiner „Tafeln der bestimmten Integrale" *) — (schreibt uns der Herr Verfasser) — wird hoffentlich bald unter dem Titel:

---

*) M. s. die ausführliche Anzeige Literar. Ber. Nr. CXXVI. S. 31 (Thl. 32.).

Digitized by Google

„Nouvelles Tables d'Intégrales Définies" erscheinen. Ich glaube diese zweite Auflage mit Recht „Neue Tafeln" nennen zu dürfen. Denn unter etwa 8200 Formeln kommen nur ungefähr 50% aus den älteren Tafeln vor; 20% sind in meinem „Exposé de la théorie etc. des Intégrales définies (Abh. der K. Akademie der Wiss. Amsterdam, Bd. VIII.)*)" abgeleitet, und die übrigen 30% finden sich in mehreren anderen Abhandlungen und Arbeiten von mir. Ungeachtet der jetzigen sehr grossen Anzahl von Integralen nehmen doch die neuen Tafeln ungefähr denselben Raum ein wie die älteren, was auf folgende Art zu ermöglichen gewesen ist.

1°. Von der Beifügung der Literatur ist in den neuen Tafeln abgesehen worden; für diese bleiben die älteren Tafeln eine, wie ich hoffe, gute Dienste leistende Quelle. So viel als möglich ist aber in den neuen Tafeln doch auch auf mein oben erwähntes Mémoire in Band VIII. hingewiesen worden, und, wo dies nicht möglich wär oder ausreichte, auf Band IV (Tables d'Intégrales définies), was somit rücksichtlich der Quellenangabe wohl als genügend wird angesehen werden können.

2°. Die specielleren Formeln sind den allgemeineren untergeordnet und nur dann angeführt worden, wenn sie als für den Gebrauch ein wesentliches und besonderes Interesse darbietend angenommen werden konnten. Eben so sind die Integrale ganz übergangen worden, welche sich unmittelbar und ohne Weiteres aus den entsprechenden allgemeinen oder unbestimmten Integralen ableiten lassen.

Durch alle diese Mittel ist eine sehr grosse Raumersparniss bewirkt und es auch möglich gemacht worden, die erforderliche Literatur nöthigenfalls mit Rücksicht auf Band VIII. und Band IV. (S. vorher) leicht nachschlagen zu können.

Der Druck ist bereits bis zum 70sten Bogen vorgeschritten und wird der niederländischen Typographie alle Ehre machen.

Geometrie.

Mathematische Unterhaltungen. Herausgegeben vom Oberstudienrath Dr. Riecke. Erstes Heft. Stuttgart. Aue. 1867. 8°.

*) M. s. die ausführliche Anzeige dieses „Exposé" im Literar. Ber. Nr. CLVI. S. 1. (Thl. 39).

Digitized by Google

Diese Schrift eines sehr würdigen Veteranen der Wissenschaft enthält (wenigstens vorzugsweise) eine Sammlung geometrischer Aufgaben, theils bekannter, theils unbekannter, für die theilweise recht nette Auflösungen durch Construction gegeben werden. Eine solche sehr hübsche Construction ist z. B. auf S. 126 und S. 127 für die Kapff'sche Aufgabe*): „Wenn 4 Punkte A, B, C, D auf einer Geraden gegeben sind, so soll der geometrische Ort eines Punktes K gefunden werden, von welchem aus die Linien AB und CD unter gleichen gegebenen Winkeln erscheinen" gegeben worden. Wir bitten namentlich auch Lehrer der Mathematik, das Schriftchen, welches von seinem würdigen und verdienstvollen, bereits in den Ruhestand getretenen Verfasser, als eine Frucht seiner Musse mit grosser Anspruchslosigkeit der Oeffentlichkeit übergeben wird, nicht unbeachtet zu lassen; sie werden darin manches für ihre Zwecke Brauchbare finden. Möge der Herr Verfasser bald ein zweites Heft folgen lassen.

Zur Bestimmung des Dreiecks aus Eckentransversalen. Eine mathematische Aufgabe, behandelt von Conrector Dr. Möhring. Aurich. 1866. 4°.

Die Bestimmung des Dreiecks aus Eckentransversalen ist in dieser Schrift mit grosser Ausführlichkeit sowohl im Allgemeinen als auch rücksichtlich besonderer Fälle behandelt worden, und dieselbe enthält einen grossen Reichthum von Formeln. Auf Einzelheiten können wir bei einer solchen Schrift hier natürlich nicht eingehen, glauben aber dieselbe wohl allen denen, die sich für solche elementare Untersuchungen interessiren, zur Beachtung empfehlen zu dürfen.

Nouvelle Étude algébrique des lignes et surfaces du second degré. Par Georges Dostor, Docteur ès-sciences mathématiques, Professeur au Lycée Impérial de la Réunion. Première Partie. Ellipse et Hyperbole. Extrait du Bulletin de la Société des Sciences et Arts de la Réunion. Saint-Dénis (Réunion). Imp. lithographique et typographique de A. Roussin. Rue de l'église. 96. — Paris. Gauthier-Villars. 1866.

Der Herr Verfasser, welchem das Archiv (z. B. Thl. XXVI.) mehrere sehr werthvolle Beiträge verdankt, jetzt „Professeur

*) Der am 13. October 1844 gestorbene Oberstudienrath Heinrich Christian Kapff in Stuttgart legte diese Aufgabe im Jahre 1842 mehreren Freunden vor und erweiterte dieselbe.

Digitized by Google

au Lycée Impérial de la Réunion“ hat uns durch gütige Zusendung der obigen Schrift aus jener weiten oceanischen Ferne eine sehr grosse und von uns mit ganz besonderem Dank anerkannte Freude gemacht. Diese Schrift, von der nur die erste Abtheilung, welche die Ellipse und Hyperbel betrifft, uns bis jetzt vorliegt, hat den Zweck, eine neue ganz allgemeine, ein beliebiges schiefwinkliges Coordinaten-System zu Grunde legende, die betreffenden Formeln in völlig entwickelter Form gebende Darstellung der Theorie der Linien und Flächen des zweiten Grades zu liefern. „Pour cela“ — sagt der Herr Verfasser in der Vorrede — „nous avons établi, tout d'abord, que les deux équations

$$(x'y-y'x)^2+(x''y-y''x)^2=(x'y''-y'x'')^2,$$

$$\begin{aligned}&(xy'z''-xz'y''+yz'x''-yx'z''+zx'y''-zy'x'')^2\\+&(xy''z'''-xz''y'''+yz''x'''-yx''z'''+zx''y'''-zy''x''')^2\\+&(xy'''z'-xz'''y'+yz'''x'-yx'''z'+zx'''y'-zy'''x')^2\\=&(x'y''z'''-x'z''y'''+y'z''x'''-y'x''z'''+z'x''y'''-z'y''x''')^2\end{aligned}$$

représentent, la première, l'ellipse et l'hyperbole, la seconde, l'ellipsoïde et les deux hyperboloïdes, lorsque ces figures sont rapportées à leur centre et que x', y'; x'', y''; x', y', z'; x'', y'', z''; x''', y''', z''' désignent les coordonnées de sommets conjugués. Ensuite nous avons identifié ces mêmes équations avec les équations générales du second degré, et nous avons ainsi obtenu, immédiatement et presque sans calcul, les expressions de tous les éléments, dans leur plus grande généralité.

Nous avons suivi une marche analogue pour la parabole et les deux paraboloïdes.

Les résultats obtenus, moins compliqués qu'on ne pourrait le supposer, nous ont conduit à formuler quelques règles bien simples, qui permettent d'écrire immédiatement les équations qui donnent la plupart des éléments, sans passer par les calculs transitoires.

Le présent mémoire se composera de cinq parties, dont nous livrons au public la première, qui comprend l'Ellipse et l'Hyperbole; les trois suivantes, qui paraîtront successivement, traitent de la Parabole, de l'Ellipsoïde et des deux Hyperboloïdes, puis des deux Paraboloïdes. Dans la dernière, enfin, nous donnons la Discussion générale des lignes et surfaces du second degré

Digitized by Google

par la Méthode des sections planes et par celle de la décomposition en carrés, en la faisant suivre de nombreux exercices numériques. Dans le choix des exemples, nous nous sommes principalement arrêté aux cas particuliers, qui, par leur forme singulière, reviennent souvent aux examens d'admission à l'École polytechnique et à l'École normale supérieure.“

Wir glauben hiernach diese jedenfalls nicht wenig Neues darbietende allgemeine Theorie der Linien und Flächen des zweiten Grades zu sorgfältiger Beachtung unseren Lesern empfehlen zu müssen.

Astronomie.

Uebersicht der Thätigkeit der Nicolai-Hauptsternwarte während der ersten 25 Jahre ihres Bestehens. Zusammengestellt von Otto Struve. St. Petersburg. 1865. 4°.

Die Nicolai-Hauptsternwarte in Pulkowa feierte am 7. (19.) August 1864 das Fest ihres 25jährigen Bestehens, welches die nächste Veranlassung gab zur Abfassung der vorliegenden prachtvoll ausgestatteten, mit dem schönen Bildnisse ihres ersten Directors, des berühmten W. Struve, geschmückten, Sr. Kaiserlichen Hoheit dem Grossfürsten Constantin Nicolajewitsch gewidmeten, einen guten Theil der Geschichte der Astronomie in dem jetzigen Jahrhundert enthaltenden Schrift. Die Zusammenstellung derselben rührt ganz von Otto Struve her; als dieser erkrankte, übernahm Winnecke die Herausgabe; und als auch dieser erkrankte, ging das Geschäft der Herausgabe und Drucklegung in die Hände von W. Döllen über, dem also, wie seinen Vorgängern, die Wissenschaft dafür zu besonderem und wärmstem Danke verpflichtet ist. Die Schrift bietet für Jeden, der an den Fortschritten der Astronomie Theil nimmt, ein sehr grosses Interesse dar, und ist, wie dies kaum anders sein konnte, mit so grosser Sachkenntniss, Sorgfalt, Genauigkeit und historischer Treue verfasst, dass sie unbedingt als ein sehr wichtiges Actenstück für die Geschichte der Astronomie betrachtet werden muss, und als ein solches von uns mit der grössten Freude begrüsst worden ist. — S. 1 — S. 21. liefern eine höchst anziehende Geschichte der Sternwarte im Allgemeinen, mit Rücksicht auf Entstehung, Zweck, Einrichtung und namentlich auf alle die verdienten Männer, welche in den vergangenen 25 Jahren an der berühmten Anstalt thätig

Digitized by Google

gewesen sind. — Auf S. 22—S. 28. sind die der Sternwarte unter dem 14. August 1862 verliehenen neuen Statuten mitgetheilt, auf deren Originale Seine Majestät der Kaiser Höchsteigenhändig geschrieben hat: **„Dem sei also“**, wobei wir auch bemerken, dass in diesen neuen Statuten der Sternwarte zu Ehren ihres Gründers die amtliche Bezeichnung „Nicolai-Hauptsternwarte“ verliehen wurde. Nach diesen neuen Statuten bilden das Personal der Sternwarte: a) Der Director. b) Vier ältere Astronomen, von denen einer die Stellung als Vice-Director hat. c) Zwei Adjunkt-Astronomen. d) Zwei Rechner. e) Ein Mechaniker. f) Ein Inspector. g) Ein Schriftführer. h) Ein Arzt; im Ganzen also 13 Personen, woraus die Grossartigkeit des Instituts hinreichend erhellen möge, da die Beschränktheit des Raums weitere Anführungen nicht erlaubt. — Hierauf wird nun von S. 29. an die Thätigkeit der Sternwarte in den vergangenen 25 Jahren unter folgenden Rubriken zusammengefasst: I. **Astronomische Thätigkeit.** 1. Die Beobachtungen. a) das grosse Passageninstrument von Ertel. b) Der grosse Vertikalkreis von Ertel. c) Der Meridiankreis von Repsold. d) Das Passageninstrument im ersten Vertikale. e) Der grosse Refractor. f) Das Heliometer. 2. Die Reduction und Publication der Beobachtungen. 3. Andere astronomische Arbeiten. II. **Geographisch-geodätische Thätigkeit.** a) Von der Sternwarte ausgeführte Unternehmungen (1844: Basismessung bei Elimä im südlichen Finnland. 1845: Basismessung bei Uleaborg und astronomische Bestimmungen in ihrer Nachbarschaft, so wie bei Torneo. 1848: Basismessung bei Romankauzi. 1850: Astronomische Bestimmungen am Nordende der Gradmessung von Fuglenaes in Finnmarken. 1851: Wiederholung der astronomischen Bestimmungen bei Torneo und Basismessung bei Ofver-Torneo. 1852: Basismessung bei Taschbunar nahe dem Südende der Gradmessung in Bessarabien. 1853: Bestimmung der Polhöhe von Bielin. 1855: Bestimmung der Polhöhe von Nemesch). b) Andere auf Geodäsie und geographische Ortsbestimmung bezügliche Studien und Arbeiten. c) Unterstützung der von anderen Behörden unternommenen Arbeiten. III. **Die Lehrthätigkeit.** a) Ausbildung jüngerer Gelehrten (namentliche Aufführung der hier gebildeten Astronomen, neun und dreissig aus den verschiedensten Gegenden der Erde). b) Ausbildung von Militairs für die geodätischen Arbeiten im Reiche; neun und sechzig Offiziere vom Landheere und der Flotte haben hier ihre Ausbildung erhalten. — IV. **Die mechanische Werkstatt.** — **Die Beziehungen zu anderen Sternwarten und Ge-**

Digitized by Google

lehrten. (Keiner der bedeutenderen Astronomen fehlt hier). — **Nachschrift** (Entstehung der Schrift). — Den Schluss bildet das in literarischer Rücksicht mit dem grössten Danke aufzunehmende: **Verzeichniss der von Pulkowaer Astronomen publicirten Schriften von 1839 bis 1861.** — Welche grossartige Thätigkeit nach allen möglichen Seiten und Richtungen hin! Möge die herrliche Nicolai-Sternwarte fernerhin immer noch schöner gedeihen zur Ehre ihres edlen Gründers, dessen Namen sie trägt!

Von den neueren Publicationen der Nicolai-Hauptsternwarte wollen wir hier noch auf die folgenden aufmerksam machen:

1. Jahresbericht, am 17. Mai 1864 dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte abgestattet vom Director der Sternwarte. St. Petersburg. 1864. 8°.

Jahresbericht, am 19. Mai 1865 dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte abgestattet in Vertretung des Directors der Sternwarte von dem älteren Astronomen W. Döllen. St. Petersburg. 1865. 8°.

2. Observations de la grande nébuleuse d'Orion, faites à Cazan et à Poulkowa. Par O. Struve. Ire Partie: Mémoire de M. Liapounov sur les observations de Cazan. IIe Partie. O. Struve: Additions au mémoire de M. Liapounov et observations de Poulkowa. St.-Pétersbourg. 1862. 4°.

3. Die Zeitbestimmung vermittelst des tragbaren Durchgangsinstrumentes im Verticale des Polarsterns. Von W. Döllen. St. Petersburg. 1863. 4°.

4. Beobachtungen des Mars um die Zeit der Opposition 1862. Von Dr. A. Winnecke. St. Petersburg. 1863. 4°.

5. Pulkowaer Beobachtungen des hellen Cometen von 1862, nebst einigen Bemerkungen. Von Dr. A. Winnecke. St. Petersburg. 1864. 4°.

6. Untersuchungen über die Constitution der Atmosphäre und die Strahlenbrechung in derselben. Von Dr. H. Gyldén. St. Petersburg. 1866. 4°.

Alle diese Schriften sind von grosser wissenschaftlicher Bedeutung, was rücksichtlich der eigentlichen theoretischen oder mathematischen Astronomie insbesondere von 3. und 6. gilt.

Digitized by Google

J. J. von Littrow's Atlas des gestirnten Himmels für Freunde der Astronomie. Dritte, vielfach verbesserte und vermehrte Auflage, herausgegeben von Karl von Littrow, Director der Sternwarte und Professor der Astronomie in Wien. Stuttgart. Gustav Weise. 1866. 8°.

Dieser treffliche Himmels-Atlas, welcher Freunden der Astronomie vor allen übrigen empfohlen werden muss und mit den im Literar. Ber. Nr. CLXXIX. S. 17. in fünfter Auflage von uns angezeigten „Wundern des Himmels" desselben Herrn Verfassers in naher Verbindung steht und denselben zu wesentlicher Ergänzung dient, liegt zu unserer besonderen Freude in einer neuen, schön ausgestatteten dritten Auflage vor uns. Ein wie treffliches Hülfsmittel dieser schöne Atlas ist, um den gestirnten Himmel in kurzer Zeit genauer kennen zu lernen, haben wir selbst durch Erfahrung genugsam erprobt, und können es nicht hoch genug anschlagen, dass in demselben bekanntlich zuerst eine Zeichnungsweise eingeführt worden ist, bei welcher das Bild des Himmels, das sie geben soll, nicht weiter wie in allen älteren Karten durch Nebendinge oft bis zur Unkenntlichkeit entstellt wird, worin spätere Arbeiten ähnlicher Art diesem Muster mit Recht meistens gefolgt sind. „Die hauptsächlichsten Verbesserungen, welche unser Atlas in der vorliegenden Ausgabe erfuhr," — sagt der Herr Verfasser in der Vorrede — „beziehen sich auf die zu gleicher Zeit erschienene fünfte Auflage der Wunder des Himmels und die darin berücksichtigten Fortschritte des betreffenden Theiles der beschreibenden Astronomie, wodurch sich zahlreiche Aenderungen sowohl in dem beigeschlossenen Auszuge des eben genannten Werkes als in den Noten auf den einzelnen Blättern des Atlas ergaben. Ueberdiess konnte das bereits in den früheren Ausgaben versuchte Hervorheben von Objecten, die schon in mittleren Fernröhren ihre individuellen Eigenthümlichkeiten zeigen und daher auch weiteren Kreisen das Vergnügen der Autopsie ermöglichen, nun weit vollständiger durchgeführt werden, da eine sich darauf beziehende Vorarbeit, die in dem Vorworte zur zweiten Auflage als sehr wünschenswerth bezeichnet wurde, jetzt in T. W. Webb's Celestial Objects for common telescopes (London 1859) vorliegt."

Man sieht hieraus, wie sehr der Herr Herausgeber bemüht gewesen ist, in dieser neuen Ausgabe allen Wünschen der Freunde der Astronomie entgegen zu kommen, und in derselben mit den neuesten Fortschritten der beschreibenden Astronomie vollständig

Digitized by Google

gleichen Schritt zu halten, so dass dieselbe jedenfalls die wärmste Empfehlung verdient.

Kalender für alle Stände. 1867. Herausgegeben von Karl v. Littrow, Director der k. k. Sternwarte in Wien. Mit zwei lithographirten Tafeln. Wien. Carl Gerold's Sohn. 8⁰.

Der vorige Jahrgang dieses trefflichen Kalenders ist im Literar. Nr. CLXXVII. S. 10. von uns angezeigt worden. Was wir dort und früher nun schon so oft bemerkt haben, dass nämlich derselbe keineswegs als ein Kalender gewöhnlichen Schlages betrachtet werden darf, sondern neben den gewöhnlichen Kalenderangaben eine kleine astronomische Ephemeride liefert, welche für Freunde der Astronomie vollständig hinreicht und denselben nicht genug empfohlen werden kann, gilt vollständig auch von dem neuen, im Ganzen in seiner Einrichtung unverändert gebliebenen Jahrgange. Die wissenschaftlichen Beilagen sind die folgenden: I. Astronomische Miscellen. (Neue Planeten. Neue Kometen. Wiederkünfte bekannter Kometen. Physische Beschaffenheit der Sonne. Merkwürdige Lichtveränderungen eines Fixsterns, nämlich des bekannten merkwürdigen Sterns im Sternbilde der nördlichen Krone.) — II. Uebersicht des Planetensystems (wie immer vollständiger als irgend wo anders). — III. Kometen-Katalog (ebenfalls höchst vollständig und sehr dankenswerth). IV. Ringförmige Sonnenfinsterniss am 6. März 1867. V. Uebersicht der meteorologischen Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Wien im Jahre 1865. — Ausser der gewöhnlichen Sternkarte ist diesem Jahrgange noch eine von Herrn Dr. E. Weiss entworfene Karte der vorher genannten ringförmigen Sonnenfinsterniss beigegeben.

Wir wüssten in der That nicht, welche besseren und vollständigeren Hülfsmittel bei ihren Beschäftigungen wir Liebhabern der Astronomie empfehlen sollten als die „Wunder des Himmels“, den vorher angezeigten „Atlas des gestirnten Himmels“ und als kleine astronomische Ephemeride den vorliegenden „Kalender“, sämmtlich Schriften, durch deren Herausgabe sich der Herr Herausgeber jedenfalls ein nicht hoch genug anzuschlagendes Verdienst um die weitere Verbreitung astronomischer Kenntnisse erworben hat und fortwährend erwirbt.

Digitized by Google

Vermischte Schriften.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Milano, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. (Vergl. Literar. Ber. No. CLXXX. S. 7.).

Tom. VII. No. 5. Sulle proprietà geometriche e dinamiche de' centri di percossa ne' moti di rotazione. Memoria di D. Chelini. p. 217. — Recherches sur les équations du cinquième degré par M. Roberts. p. 257. — **Rivista bibliografica.** Le Messàbat De Mohammed Ben Moussa al Khârezmi. Extrait de son Algèbre. Traduit et annoté par Aristide Marre. p. 269.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Professore G. Battaglini. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CLXXXI. S. 13.)

Anno IV. Settembre e Ottobre 1866. Nota sulle equazioni differenziali che si presentano nei problemi di Meccanica; per R. del Grosso. p. 257. — Sull' inversione quadrica delle curve piane; per T. A. Hirst. p. 278. — Questione. p. 293. — Teorema sui determinanti a due scale e soluzione della questione 47; per G. Torelli. p. 294. — Altra soluzione; per L. Rajola. p. 297. — Annunzio Bibliografico. p. 297. — Sulle superficie gobbe applicabili su quelle di rivoluzione, e su alcune proprietà delle superficie gobbe delle normali principali di una curva; per U. Dini. p. 298. — Sulle superficie gobbe che soddisfanno a date equazioni alle derivate parziali del second'ordine; per U. Dini. p. 305. — Questioni. p. 318.

Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXIX. S. 20.).

Band LII. Heft III. Mach: Ueber die Wirkung der räumlichen Vertheilung des Lichtringes auf der Netzhaut. S. 303. — Unferdinger: Theorie der Transversalen, welche die Mittelpunkte der Seiten eines sphärischen Dreiecks verbinden: darauf bezügliche Lehrsätze und Probleme. (Sehr ausführlich und beachtenswerth.) S. 323. — Schwarzer: Beziehungsgleichungen zwischen der Seite und dem Halbmesser gewisser regelmässiger

Digitized by Google

Kreisvierecke. S. 363. — Loschmidt: Zur Grösse der Luftmolecüle. S. 395. — Schmidt: Ueber die Atomwärme. S. 417. — Allé: Ueber die Entwickelung von Functionen in Reihen, die nach einer besonderen Gattung algebraischer Ausdrücke fortschreiten. (Steht mit der neueren Functionentheorie in naher Verbindung und muss zur Beachtung besonders empfohlen werden). S. 453.

Band LII. Heft IV. - Stefan: Ueber die Farbenzerstreuung durch Drehung der Polarisationsebene in Zuckerlösungen. S. 486. — Popper: Theorie der Convergenz unendlicher Reihen und bestimmter Integrale, die keine periodischen Functionen enthalten. (Auch wegen der allgemeinen Theorie der Convergenz beachtenswerth). S. 496. — v. Littrow: Ueber eine Modification des Hansen'schen Registrirapparates. (Diese, wie es uns scheint, sehr zu beachtenden Modificationen der von Hansen für die mitteleuropäische Gradmessung angegebenen galvanischen Registratoren betreffen vorzugsweise die leichtere Transportabilität und leichtere Aufstellung, ohne das Hansen'sche Princip im Wesentlichen zu alteriren. Eine ausserordentlich schöne Abbildung des neuen Apparats ist beigegeben.) S. 546. — Lippich: Ueber einen neuen Fallapparat. (Ebenfalls der Beachtung recht sehr zu empfehlen; durch sehr deutliche Abbildungen erläutert). S. 549. — Ditscheiner: Eine Bemerkung zu Herrn Lewis M. Rutherford's Construction des Spectroscopes. Mit 1 Tafel. S. 563.

Band LII. Heft V. Niemtschik: Directe Constructionen der Contouren von Rotationsflächen in orthogonalen und perspectivischen Darstellungen. Mit 5 Tafeln. (Für Descriptive Geometrie und Perspective recht sehr zu beachten). S. 573.

Band LIII. Heft I. Winckler: Allgemeine Sätze zur Theorie der unregelmässigen Beobachtungsfehler. S. 6. — Grabowski, A., Graf: Methode und Apparat zur Bestimmung der Dampfdichte. S. 84. — Frischauf: Bahnbestimmung des Planeten (67) Asia. S. 96.

Band LIII. Heft II. Aus einem Schreiben des Herrn Lewis M. Rutherford an Prof. Schrötter. (Die Photographie des Monds u. s. w. betreffend). S. 191. — Boltzmann: Ueber die mechanische Bedeutung des zweiten Hauptsatzes der Wärmetheorie. S. 195. — Ditscheiner: Ueber einen Interferenzversuch mit dem Quarzprisma. S. 238. — Oppolzer: Ueber die Bahn des Cometen I. 1866. S. 247. — Friesach: Beschrei-

Digitized by Google

bung einer Tabelle zur Erleichterung der Schiffahrt im grössten Kreise. (Bei der grossen Wichtigkeit der Schiffahrt im grössten Kreise, dem loxodromischen Cours gegenüber, würde die Herstellung der hier beschriebenen Tabellen gewiss sehr wünschenswerth sein). S. 258.

Band LIII. Heft III. Wagner: Erfolge der Bestrebungen, den Elektromagnetismus als Triebkraft nutzbar zu machen. S. 308. — Winckler: Geometrische Construction rationaler Polynome. Mit 3 Holzschnitten. (In mehrfacher Beziehung zu beachten). S. 326. — Pierre: Ueber die durch Fluorescenz hervorgerufene Wärmestrahlung. S. 339. — Memorsky: Ueber die Farbe des Tageslichts und einiger künstlicher Beleuchtungsmittel. S. 345. — Oppolzer: Einige Bemerkungen und Zusätze zu Le Verrier's Sonnentafeln. S. 348. — Von v. Hahn, Christomanos und Schrötter finden sich S. 411. u. s. w. sehr interessante Mittheilungen über die vulkanischen Eruptionen auf der Insel Santorin und die chemische Zusammensetzung der Eruptivgesteine der neuen Erhebung (von Schrötter). — Schwarzer: Allgemeine Entwickelung der Beziehungsgleichungen zwischen der Seite und dem Halbmesser regelmässiger Sehnenpolygone, deren halbe Seitenzahl ungerad (Vergl. oben Band LII. Heft III). S. 454. — Petzval: Bericht über die Kulik'schen Factorentafeln. (Herr Prof. Petzval giebt den Mathematikern hier eine sehr interessante Nachricht von einer staunenswerthen Arbeit des verstorbenen Professor Kulik in Prag, nämlich von den, von demselben nachgelassenen Factorentafeln aller durch 2, 3, 5 nicht theilbaren Zahlen von **Drei bis Hundert Millionen**, welche in sechs grossen Foliobänden der kais. Akademie der Wissenschaften vorgelegt worden sind, eine Arbeit, deren Grösse wahrlich alle Begriffe übersteigt. Herr Petzval giebt an, welche besonderen Hülfsmittel von Kulik angewandt worden sind, um diese Tafeln auf einen verhältnissmässig kleinen Raum zu bringen, und verbreitet sich dann in interessanter selbstständiger Weise über die Mittel, welche anzuwenden sind, um den allerdings im höchsten Grade wünschenswerthen Druck dieser Tafeln, deren Ausdehnung schwerlich für alle künftigen Zeiten jemals übertroffen werden wird, möglich zu machen). S. 460.

Band LIII. Heft IV. Pranghofer: Abhandlungen aus dem Gebiete der höheren Mathematik. (Ueber das Gauss'sche Kriterium der Convergenz, über gewisse Flächen, bemerkenswerthe Beziehungen des Moments der Gesammtresultante und der Momente der nach den Axen der x, y, z wirkenden Seitenresultanten auf einen freien Punkt wirkender Kräfte). S. 503. —

Digitized by Google

Stefan: Ueber eine Methode die Längen der Lichtwellen zu messen. S. 521. — Derselbe: Ueber den Einfluss der inneren Reibung in der Luft auf die Schallbewegung. S. 529. — Derselbe: Ueber Interferenzversuche mit dem Soleil'schen Doppelquarz. S. 548. — Jelinek: Mittheilung über einige in den letzten Jahren beobachtete Staubfälle. (In preussich- und österreichisch-Schlesien; in Krain; in Valona in Albanien; in Tunis und Rom; in Klagenfurt. Sehr interessante Beschreibungen und Reflexionen über die Natur solcher Staubfälle und Schlammregen). S. 555.

Verslagen en Mededeelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Afdeeling Natuurkunde. Tweede Reeks. Eerste Deel. Amsterdam. 1866. 8°.

Die Königlich niederländische Akademie der Wissenschaften beginnt mit dem obigen Ersten Theile eine neue Reihe ihrer vieles Wichtige enthaltenden Verslagen en Mededeelingen, weshalb wir es uns von jetzt an zur besonderen Aufgabe machen werden, den Hauptinhalt der einzelnen Theile so bald als irgend möglich nach ihrem Erscheinen, so weit derselbe in den Kreis des Archivs gehört, zur Kenntniss unserer Leser zu bringen.

Tweede Reeks. Deel I. — R. Lobatto: Bijdrage tot het vormen der vergelijkingen welker wortels de Zijden en Diagonalen der regelmatige veelhoeken doen kennen. p. 33. — G. J. Verdam: Over eene wijze van wording der Kromtelijnen op de oppervlakte van de ellipsoïde met drie ongelijke assen, en over de verwantschap dezer lijnen met confocale spherische ellipsen. p. 64. — F. J. Stamkart: Over eene Benaderingsmanier ter berekening der waarde van Lijfrenten en Verbindingsrenten. (Met eene Tabel). p. 95. — M. Hoek: Ephemeride van Proserpina, voor de oppositie van 2. Januarij 1865. p. 112. — D. Bierens de Haan: Bijdrage tot de Theorie der bepaalde Integralen. p. 117. — P. M. Brutel de la Rivière: Eenige opmerkingen, betreffende eene nieuwe oplossing van het vraagstuk der lengte-bepaling op zee. p. 141. (Betrifft die bekannte Methode der Längenbestimmung zur See von Littrow). — R. van Rees: Over elektrische spanning en potentiaal. p. 194. — P. J. van Kerckhoff: Over atomiciteit en affiniteit. p. 262. — J. Badon Ghijben: Nieuwe Bijdrage tot het vormen der vergelijkingen, die de uit één hoekpunt getrokkene Zijden en Diagonalen eenes regelmatigen veelhoeks tot wortels hebben.

Digitized by Google

p. 294. — F. J. Stamkart: Over den invloed van luchtdrukking en capillaire werking bij de vervaardiging en het gebruik van Areometers. Bepaling door proefneming van de hoeveelheid vloeistof welke buiten aan eene buis door de capillaire werking opgehouden wordt. p. 320. — F. Kaiser: Waarnemingen omtrent een Merkwaardigen Vuurbot, volbragt aan de Sterrewacht te Leiden. p. 349. — F. Kaiser: Eenige opmerkingen omtrent de periodieke fouten van Mikrometer-schroeven, naar aanleiding van de jongste onderzoekingen aan de Sterrewacht te Leiden. p. 359. — J. van Gogh: Overzigt van de heershende winden en daarbij waargenomen Barometerstanden te Nagasaki op het eiland Desima in Japan.

Digitized by Google

Literarischer Bericht
CLXXXIII.

Dr. Gideon Jan Verdam

wurde am 2. December 1802 zu Mijdrecht (Niederlande, Prov. Zd.-Holland) geboren. Er studirte Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität zu Leiden, 1819—25, und erhielt während seiner Studien fünfmal die goldene Medaille für gekrönte Preisschriften. Er promovirte öffentlich am 1. October 1825, und lehrte 1826—28 die angewandte Mechanik als Lector an der Universität zu Groningen. Darauf stand er zehn Jahre mit Professor Hisely an der Spitze einer Schule für Real-Unterricht im Haag, und wurde 1839 mit der ausserordentlichen, 1845 mit der ordentlichen Professur der Mathematik und Mechanik an der Universität zu Leiden bekleidet. In dieser Stelle arbeitete er unermüdlich, bis er am 29. October 1866 an den Folgen einer Brustkrankheit entschlief, nachdem bereits im Jahre 1863 der Unterzeichnete ihm zur Seite getreten war.

Er war ein höchst gutmüthiger, rechtschaffener Mann, und wird bei seinen Schülern, für die er Vieles that und sehr Vieles war, lange in dem gesegnetsten Andenken bleiben.

Was seine wissenschaftlichen Leistungen betrifft — (man vergleiche das angehängte Verzeichniss) — so sind die folgenden vorzüglich hervorzuheben.

Schon während der Herausgabe seines Werkes über die Gründe der angewandten Mechanik, Groningen 1829—37 (4 Theile, Bände in 8⁰) erschien eine deutsche Uebersetzung desselben von Dr. C. H. Schmidt, Weimar 1834—38; vom 4ten Bande, über

Digitized by Google

die Dampfmaschinen-Theorie, sogar eine zweite deutsche Auflage im Jahre 1848. Dieses Werk zeichnet sich durch den sehr vollständigen Inhalt, den äusserst klaren Vortrag und durch die ausserordentlich schönen Figuren aus, insbesondere die für die Dampfmaschinen. Ueberhaupt gehörte das Zeichnen von Epures, worin er grosse Fertigkeit besass, zu seinen Liebhabereien: davon können ausserdem die Zeichnungen zu seiner Comment. de linea loxodromica und zu seiner Abhandlung über die hyperbolischen Paraboloide Zeugniss ablegen.

Seine hieher gehörenden grösseren Abhandlungen über das Princip von d'Alembert nach Lagrange, und über die Hauptaxen von Körpern sind jüngeren Ursprungs.

Auf dem Gebiete der analytischen Geometrie schrieb er u. A. zwei grössere Abhandlungen: über die inversen Curven und über die Lemniscaten; ferner eine schöne Abhandlung über die Nabelpunkte des Ellipsoids. Auch gehört hieher, obschon sie nach der Methode der descriptiven Geometrie behandelt ist, die schon erwähnte interessante Abhandlung über die hyperbolischen Paraboloide.

Noch haben wir von ihm eine Notiz über sphärische neuere Geometrie, und über die Reductionsformeln der elliptischen Integrale.

Alle diese Aufsätze zeichnen sich durch eine elegante Behandlungsmethode, reichen Stoff, und insbesondere durch grosse Vollständigkeit aus, und enthalten meistens die ausführliche Angabe der betreffenden Literatur.

Von seiner Methode der kleinsten Quadrate erschienen zwei Lieferungen, grösstentheils das Historische und die Grundbegriffe der Theorie betreffend.

Von seinen Summaria der Trigonometrie, der sphärischen Trigonometrie und über deren Anwendung auf mathematische Geographie erschienen resp. 3, 2 und 2 Auflagen; die letzten sind zu Handbüchern ausgeführt worden und enthalten wohl alles Wesentliche über den betreffenden Stoff. Neuerlichst gab Professor Dienger eine ausführliche Recension in den Heidelberger Jahrbüchern 1866. S. 329—334.

Ein kleineres Summarium über mathematische Methode erlebte drei Auflagen.

Verdam war Mitglied des königl. Niederl. Instituts, später der königlichen Akademie der Wissenschaften; der wissenschaft-

Digitized by Google

lichen Societäten zu Utrecht, Haarlem, Rotterdam und Batavia (in Ost-Indien); des Ingenieur-Institutes; Ehrenmitglied der mathematischen Gesellschaft: Een onvermoeide Arbeid etc.; auswärtiges Mitglied der Königl. Böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag. Im Jahre 1858 wurde er zum Ritter des Niederländischen Löwen-Ordens ernannt.

Verzeichniss der Schriften von Gideon Jan Verdam.

1823. Comm. de superficierum regularium angulis et soliditate. Gron. 79. Pag. 4°. & 2 Fig.

1823. Comm. de linea loxodromica. Gand. 56 Pag. 4°. & 2 Fig.

1824. Comm. de theoria maximorum et minimorum. Lugd. Bat. 100 Pag. 4°. & 1 Fig.

1824. Comm. de theoria compositionis virium. Traj. ad Rhen. 243 Pag. 8°. & 2 Fig.

1828. Comm. de vi qua corpus e Luna sit projiciendum in tellurem. Lugd. Bat. 25 Pag. 4°. & 2 Fig.

1828. Diss. philos. de mensura, constructione et munitione aggerum terreorum. 107 Pag. 4°. 21 Fig. Lugd. Bat.

1828—37. Gronden der toegepaste werktuigkunst. Groningen. 4 Th. 8 Bde. 8°. mit 31 Taf. & Atlas von 21 Taf. — Davon eine deutsche Ausgabe.

1834—38. Grundsätze der angewandten Mechanik, übersetzt von Dr. C. H. Schmidt. 4 Th. 8°. Weimar. Voigt. Vom 4ten Theile eine neue Auflage:

1848. Grundsätze, nach welchen alle Arten von Dampfmaschinen zu beurtheilen und zu erbauen sind. Weimar. 8°. mit 23 Tafeln.

1840. Oratio Inaug. de artium et institutorum, quae ab industria vocantur, progressu et perfectione, recentiorum mathematicorum diligentissimis pervestigationibus atque egregiis inventis magnam partem tribuendis. 14 Pag. 4°.

1842. Grunerts Archiv. Bd. 2. S. 188—196. Sur une règle particulière pour trouver l'équation d'une ligne ou d'un plan, tangent une courbe ou une surface du second degrés et Note relative à la chaînette.

1842. Grunerts Archiv. Bd. 2. S. 210—212. Schreiben über das Problem von Snellius.

1842. Het Instituut. Bl. 57—79, 136—168. Over de tafelen van Elliptische Bogen door Prof. Schmidt; en over de herleiding van eenige Integraalformulen tot Elliptische Functien.

1844. N. Verh. Ned. Inst. I. Kl. Dl. 10. Bl. 1—53. & 2 Tafeln.

Digitized by Google

Over de meetkundige beschouwing der hyperbolische Paraboloide.

1844. Het Instituut. Bl. 211—246, 271—298. Uitbreiding van een gedeelte der elementaire meetkunde.

1844. Grunert's Archiv. B. 4. S. 221—223. Ueber das Integral $\int\frac{dx}{x}$.

1844. Summarium der Goniometrie en regtlijnige Trigonometrie. Leiden. 56 Bl. 8°. Hievon 1850 2. Aufl. (152 Bl.). 1858 3. Aufl. (255 Bl.). Mit 2 Taf.

1844. Summarium der sphaerische Trigonometrie. (51 Bl.) Leiden. 8°. 2. Aufl.

Handboek der sphaerische Trigonometrie. Leiden 1866. (295 Bl.). Mit 4 Taf.

1844. Handleiding bij de beoefening der sphaerische Trigonometrie. Leiden 8°. 2. Aufl. Leiden 1856. (200 Bl.). Mit 2 Taf.

1844. Summarium van beginselen u. s. w. der mathematische Methode. Leiden. 8°. Hievon 2. Aufl. 1850. 3. Aufl. 1857. (58 Bl.)

1846. N. Verh. Ned. Inst. 1. Kl. Dl. 12. Bl. 67—93. Over omgekeerde of tegenovergestelde kromme lijnen.

1846. Het Instituut. Bl. 163—177. Geschiedkundige aanteekening betreffende de algemeene oplossing van derde magts-vergelijkingen.

1848. N. Verh. Ned. Inst. 1. Kl. Dl. 13. Bl. 81—162 mit 1 Taf. Beschouwing der Lemniscaten.

1848. Grunert's Archiv. Bd. 11. S. 13—25. Note sur une manière particulière de déterminer les équations des lignes courbes.

1848. Algemeene Konst- en Letterbode N. 46—54. Leven van den Hoogleeraar J. de Gelder.

1849. Tijdschr. v. W. et N. Wet. Dl. 2. Bl. 1—11. Verslag over eene brochure van den heer J. A. Scholten.

1850. Tijdschr. v. W. en N. Wet. Dl. 3. Bl. 225—246. Over de beweging eener gespannen snaar.

1850. Die letzte Abtheilung van: J. de Gelder, Beginselen der Differentiaal-, Integraal- & Variatie-Rekening. II. Hage.

1850. Verhandeling over de Methode der kleinste Quadraten. Groningen. 4°. 2. Lieferung erschien 1852.

1852. Tijdschr. v. W. en N. Wet. Dl. 5. Bl. 42—85. & 2 Taf. Opmerkingen over de Umbilici der Ellipsoide en de rectificatie der Ellips.

1852. Tijdschr. v. W. en N. Wet. Dl. 5. Bl. 126—133. & 1 Taf. Over de declinatie van het slingervlak.

Digitized by Google

1853. Oratio rectoralis: De justa pertractandi et vera investigandi ratione systematica, a mathematicis temerius neglecta, diligentissimo studio disciplinas mathematicas perficientibus, earumque ambitum amplificantibus.

1862. Versl. en Meded. d. k. Ak. v. Wet. Del. XIV. Bl. 149—269. Bijdrage tot de meetkundige theorie der hoofdassen van ligchamen.

1863. Versl. en Meded. d. k. Ak. v. Wet. Dl. XV. Bl. 376—388. Note zu der vorigen Abhandlung.

1864. Verh. d. k. Ak. v. Wet. Dl. 10. Bl. 1—90. Over het beginsel van d'Alembert naar de rekenwijze van Lagrange.

Bierens de Haan.

Arithmetik.

Multiplications-Tabellen aller Zahlen von 1 bis 500. Ein Hülfsbuch für Geometer, Baumeister, Forstmänner und überhaupt alle, die viel zu rechnen haben, zur schnelleren Erlangung richtiger Resultate bei'm Multipliciren und Dividiren. Zweite revidirte Auflage. Oldenburg (Schulze'sche Buchhandlung). 1866. 8°.

Die erste Auflage dieser Multiplications-Tafeln erschien im Jahre 1860, und ist im Literar. Bericht Nr. CXXXIX. S. 5. angezeigt worden. Seit jener Zeit haben wir uns mehrfach von deren Brauchbarkeit zur Abkürzung von Rechnungen zu überzeugen Gelegenheit gehabt, und können daher unsere damals ausgesprochene Empfehlung nur vollständig wiederholen.

Tables de Logarithmes à sept décimales pour les nombres depuis 1 jusqu'à 108000, et pour les fonctions trigonométriques de dix en dix secondes; par le Dr. L. Schrön, Directeur de l'Observatoire et Professeur à Jéna. Précédées d'une introduction française, par J. Hoüel, Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Sixième édition stéréotype, revue et corrigée. Brunswick. Frédéric Vieweg et fils. Paris. Gauthier Villars. 1866. 8°.

Table d'Interpolation pour le calcul des parties proportionnelles. Faisant suite aux Tables de Logarithmes à sept décimales. Par le Dr. L. Schrön, Directeur de l'Observatoire et Professeur à Jéna. Précédées d'une Introduction française, par J. Houël,

Digitized by Google

Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Sixième édition stéréotype, revue et corrigée. Brunswick. Frédéric Vieweg et fils. Paris. Gauthier-Villars. 1866. 8°.

Wir freuen uns sehr, diese französische Ausgabe der trefflichen Tafeln von Schrön hier anzeigen zu können, welche von einem französischen Mathematiker veranstaltet worden ist, der sich schon so vielfach und in so hohem Maasse durch die Herausgabe von Tafeln verdient gemacht hat, und dem daher auf diesem Gebiete eine sehr grosse Erfahrung zur Seite steht, so dass hier unter allen Umständen nur eine ausgezeichnete Leistung zu erwarten war. Herr Hoüel hat aber durchaus nicht nöthig gefunden, an den Schrön'schen Tafeln selbst wesentliche Veränderungen vorzunehmen, und dieselben erscheinen daher hier in ziemlich unveränderter Gestalt, was ein neuer sehr erfreulicher Beweis ihrer grossen Vortrefflichkeit ist. Indess hat der französische Herr Herausgeber doch ein Paar jedem Kenner der Schrönschen Tafeln sogleich in die Augen springende Veränderungen angebracht, welche wir für sehr zweckmässig und sehr dankenswerth halten; er sagt darüber selbst in der Vorrede p. III.: „Nous avons répété, sur toutes les pages de la Table I, ceux de ces nombres qui se présentent les plus souvent dans les calculs; et, dans la Table trigonométrique, nous avons inscrit, pour plus de clarté, en caractères plus apparents, les nombres de degrés en haut et en bas de chaque page.“ Vorzüglich die letztere, auch in älteren Tafeln fast allgemein übliche Einrichtung erleichtert das Aufschlagen wesentlich, namentlich das erste Blättern — um so zu sagen — zur Auffindung des gesuchten Winkels. Die der französischen Ausgabe vorgesetzte „Introduction“ über Einrichtung, Gebrauch u. s. w. der Tafeln, ist von Herrn Hoüel ganz neu verfasst; sie ist kürzer gehalten als die den deutschen Ausgaben vorausgeschickte Einleitung, lässt aber dessenungeachtet, wie es uns scheint, keinen wesentlichen Punkt unberührt, und hat uns eben durch ihre grössere Kürze besonders angesprochen, ohne dass es uns auch nur im Entferntesten in den Sinn kommen kann, der grossen Genauigkeit, Sorgfalt und Ausführlichkeit, mit welcher die Einleitung des so sehr verdienten deutschen Herrn Herausgebers verfasst ist, ihren Werth und ihr Verdienst irgendwie schmälern zu wollen. Die französische Einleitung umfasst nur 9 Seiten unter folgenden Rubriken: **Table I. Logarithmes des nombres depuis 1 jusqu'à 108000. — Table II. Logarithmes des sinus, tangentes, cotangentes et cosinus de tous les angles du quadrant, de 10 en 10 secondes. —**

Digitized by Google

De l'interpolation des tables. Première méthode. Seconde méthode. Troisième méthode. Usage des différences secondes. — Als eine sehr dankenswerthe Zugabe der französischen Ausgabe betrachten wir endlich noch die Tafel der „Nombres usuels avec leurs logarithmes."

Wie sehr den in jeder Beziehung so sehr ausgezeichneten Schrön'schen Tafeln durch diese französische Ausgabe eine noch grössere Verbreitung, als sie schon besitzen, gesichert werden wird, liegt auf der Hand, und jeder deutsche Mathematiker ist deshalb sowohl Herrn Houël, als auch den Herren Gauthier Villars und F. Vieweg und Sohn, für deren Herausgabe zu dem grössten Danke verpflichtet.

Recueil de Formules et de Tables numériques. Par J. Houël, Ancien Élève le l'École Normale, Professeur de Mathématiques pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Paris. Gauthier Villars. 1866. 8°.

Wir können den Zweck dieser neuen Tafeln des durch die Herausgabe seiner trefflichen „Tables de Logarithmes à cinq Décimales" so sehr verdienten Herrn Houël nicht besser angeben als mit seinen eigenen Worten (Avertissement p. V.): „En rédigeant ce Recueil de formules et de Tables je me suis proposé un double but. J'ai voulu, d'une part, rassembler des Tables abrégées à l'usage des personnes qui s'occupent d'applications numériques n'exigeant pas beaucoup d'approximation, ce qui est le cas d'une grande partie des calculs d'Astronomie ou de Physique; mais, d'autre part, mon dessin principal a été de venir en aide à ceux qui étudient les parties élevées des Mathématiques, et auxquels la mise en nombre des formules peut faciliter l'intelligence des théories, en jouant un rôle analogue à celui des expériences dans l'enseignement des sciences physiques." Wir glauben, dass der Herr Verfasser in dieser mit grosser Sachkenntniss, Sorgfalt und Genauigkeit zusammengestellten Sammlung von Formeln und den darauf folgenden numerischen Tafeln den in Rede stehenden doppelten Zweck vollkommen erreicht hat, und erkennen in dieser Sammlung namentlich auch ein mit dem grössten Danke aufzunehmendes Hülfsmittel für den mathematischen Unterricht, weshalb wir dieselbe in dreifacher Rücksicht dringend zur sorgfältigsten Beachtung empfehlen, nämlich 1. allen Mathematikern und Praktikern „qui s'occupent d'applications numériques n'exigeant pas beaucoup d'approximation";

Digitized by Google

2. jüngeren Studirenden, welche in diesen Tafeln ein reiches Material zur Uebung und numerischen Anwendung finden; 3. allen Lehrern der Mathematik, welche ihre Schüler auf solche Anwendungen hinführen, zu denselben vorbereiten und anleiten wollen.

Indem wir im Allgemeinen bemerken, dass diese Tafeln, eben weil sie nur für, eine beschränktere Annäherung bezweckende Rechnungen dienen sollen, überall nur eine geringere Anzahl von Decimalstellen liefern, und — genöthigt durch die Beschränktheit des uns in diesen Literarischen Berichten gebotenen Raums — wegen der Einrichtung derselben auf die mit grösster Sachkenntniss und Deutlichkeit verfasste „Introduction" verweisen, beschränken wir uns im Folgenden auf eine übersichtliche Angabe des Inhalts.

Nach dem „Avertissement (p. V. — p. IX.)" giebt die „Introduction" auf p. XI. — p. XXIX. sehr deutliche Nachricht über die Einrichtung der Tafeln und Anleitung zu ihrem Gebrauch, worauf dann auf p. XXX. — p. LXXI. eine sehr reichhaltige und für die Zwecke des Buches vollständig ausreichende Sammlung von Formeln für die hyperbolischen und elliptischen Functionen folgt, nämlich: Formules relatives aux fonctions hyperboliques. — Résolution des équations du second et du troisième degré (mit Anwendung der hyperbolischen Functionen.) — Formules relatives aux fonctions elliptiques: §. I. II. III. IV. V. Des fonctions ϑ. §. VI. VII. VIII. IX. X. XI. XII. Des fonctions elliptiques. §. XIII. Calcul. numérique des intégrales elliptiques de première espèce. §. XIV. Intégrales elliptiques de seconde espèce. §. XV. XVI. Développement en séries des intégrales de première et de seconde espèce. §. XVII. XVIII. XIX. Calcul des intégrales elliptiques au moyen de la transformation modulaire de Landen. §. XX. XXI. XXII. XXIII. XXIV. XXV. Intégrales elliptiques de troisième espèce. Paramètre $= n$. §. XXVI. Des intégrales de troisième espèce à paramètre imaginaire. §. XXVII. Réduction de la différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{Ay^4+By^3+Cy^2+Dy+E}}$$

à la forme normale

$$\frac{1}{m}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{m}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

§. XXVIII. Réduction de la différentielle $F(y, \sqrt{R})dy$ aux dif-

Digitized by Google

férentielles elliptiques, F désignant une fonction rationelle, et R un polynome du troisième ou du quatrième degré en y. — Applications numériques des fonctions elliptiques. I. Aire de l'ellipsoïde. II. Longueur de la ligne géodésique d'un sphéroïde de révolution. III. Mouvement de rotation d'un corps solide. Mit dieser Sammlung von Formeln für die hyperbolischen und elliptischen Functionen hat man für die Kreisfunctionen und rücksichtlich vieler anderer Formeln das „Recueil de formules et de nombres usuels, avec leurs logarithmes" in des Herrn Verf. „Tables de logarithmes à cinq décimales. p. XXXV.— p. XLVI." zu verbinden. — Nun folgen Tables numériques. I. Logarithmes vulgaires ou décimaux des 2000 premiers nombres. II. Antilogarithmes. III. Logarithmes d'addition et de soustraction. IV. Logarithmes du rapport $\frac{1+x}{1-x}$. V. Table abrégée pour le calcul des logarithmes vulgaires à 15 décimales. VI. Logarithmes naturels ou hyperboliques à 4 décimales. VII Table abrégée pour le calcul des logarithmes naturels à 20 décimales. VIII. Tables de conversion des logarithmes naturels en logarithmes vulgaires, et des parties décimales du rayon en parties décimales du quadrant, et réciproquement, ou Tables des multiples de M, $\frac{1}{M}$, $\frac{2}{\pi}$, $\frac{\pi}{2}$. IX. Valeurs naturelles des fonctions circulaires, à 4 décimales, de 15′ en 15′ d'arc, ou de minute en minute de temps. X. Logarithmes des fonctions circulaires, à 4 décimales, de minute en minute jusqu'à 100′, et de 10′ en 10′ pour le reste du quadrant. XI. Logarithmes des fonctions circulaires à 4 décimales de 6′ en 6′ ou de dixième en dixième de degré. XII. Valeurs naturelles, à 3 décimales, des fonctions circulaires, pour chaque centième du quadrant, avec la conversion des parties décimales du quadrant en parties sexagésimales. XIII. Logarithmes des fonctions circulaires à 3 décimales, de centième en centième du quadrant, et à 4 décimales de millième en millième du quadrant. XIV. Valeurs naturelles et logarithmiques des fonctions circulaires et hyperboliques, pour des arcs croissant de millième en millième du quadrant. XV. Valeurs naturelles des fonctions circulaires à 10 décimales. XVI. Tables des fonctions elliptiques. XVII. Tables de diverses transcendantes. XVIII. Tables des carrés à 4 décimales des nombres depuis 0,000 jusqu'à 1,200. XIX. Tables de puissances.

Mögen sich alle unsere Leser das ungemein viel Nützliches enthaltende, und auch äusserlich schön und zweckmässig ausgestattete Buch recht sehr empfohlen sein lassen.

Digitized by Google

Mechanik.

Allgemeine Maschinenlehre. Ein Leitfaden für Vorträge, sowie zum Selbststudium des heutigen Maschinenwesens, mit besonderer Berücksichtigung seiner Entwickelung, für angehende Techniker, Cameralisten, Landwirthe und Gebildete jeden Standes. Von Dr. Moritz Rühlmann, Professor an der polytechnischen Schule in Hannover. Mit zahlreichen Holzschnitten. Zweiten Bandes erste und zweite Hälfte. Braunschweig. Schwetschke und Sohn. 1865. 8⁰.

Je weiter dieses Werk, dessen erster Band im Literar. Ber. Nr. CXLVII. S. 4. und Nr. CLII. S. 5. von uns angezeigt worden ist, fortschreitet, desto mehr überzeugen wir uns, dass dasselbe nicht bloss als ein höchst zweckmässiges, sondern als ein unentbehrliches Hülfsmittel für Jeden zu betrachten ist, der sich eine gründliche Einsicht in das praktische Maschinenwesen, namentlich auch in Bezug auf die neueren und die neuesten Fortschritte desselben verschaffen will, wobei aber besonders hervorgehoben werden muss, dass überall historische und literarische Notizen in sehr reichem Maasse beigebracht worden sind. Die schönen und sauberen, bei einem solchen Werke natürlich unentbehrlichen Holzschnitte erhöhen den Werth des vorliegenden wesentlich, da sie in allen Fällen eine sehr deutliche Einsicht in die Construction und das innere Wesen der betreffenden Maschinen gewähren. Wir können also hiernach unsere frühere Empfehlung des in seiner Art trefflichen Werkes in erhöhetem Maasse wiederholen und begnügen uns des Weiteren wegen mit der Inhaltsangabe des vorliegenden zweiten Bandes.

Im Allgemeinen enthält dieser zweite Band die Fortsetzung der zweiten Abtheilung, nämlich der Maschinen zur Verrichtung nützlicher mechanischer Arbeiten, und ist ganz den Mühlen und den landwirthschaftlichen Maschinen gewidmet, nämlich:

Fünfter Abschnitt. Fabrikationsmaschinen. Mühlen. A. Mühlen zur Verarbeitung von Stoffen, welche Menschen und Thieren zur Nahrung dienen. I. Getreidemühlen zur Mehlbereitung. II. Getreidemühlen ohne beabsichtigte Mehlbereitung. — B. Mühlen zur Verarbeitung von Stoffen, welche Menschen und Thieren nicht zur Nahrung dienen. I. Mühlen für Knochen, steinige Materialien, Farbstoffe und Gerberlohe. II. Oelmühlen. III. Sägemühlen.

Digitized by Google

Sechster Abschnitt. Landwirthschaftliche Maschinen. Geschichtliche Einleitung. Die landwirthschaftlichen Maschinen der Gegenwart. I. Maschinen zur Bodencultur durch Dampfkraft (Dampfpflüge). A. Systeme mit selbstbeweglicher Locomobile. B. Dampfpflugsysteme mit feststehender Locomobile. C. Die transportable Dampfmaschine der Landwirthschaft. II. Säemaschinen. A. Reihensäemaschinen. (Drillmaschinen). B. Breitsäemaschinen. III. Erntemaschinen. A. Mähmaschinen. B. Heuwendemaschinen und Pferderechen. IV. Dreschmaschinen. A. Lang- oder Spitz-Dreschmaschinen. B. Breit- oder Quer-Dreschmaschinen. V. Stroh- oder Häckselschneidemaschinen. VI. Wurzel- und Rübenschneidemaschinen. VII. Oelkuchenbrecher.

Weil die landwirthschaftlichen Maschinen in der neueren Zeit eine so grosse Rolle spielen und immer mehr an Wichtigkeit gewinnen, haben wir, um die Vollständigkeit des Werkes zu zeigen, den Inhalt des dieselben betreffenden Abschnitts vollständig mitzutheilen für zweckmässig erachtet.

Astronomie.

Tables pour la réduction du temps en parties décimales du jour par G. J. Hoüel, Prof. de Mathématiques à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Publication der astronomischen Gesellschaft. IV. Leipzig. W. Engelmann. 1866. 4°.

Diese mit grosser Sorgfalt und Genauigkeit berechneten Tafeln zur Verwandlung der Zeit in Decimaltheile des Tages, welche von der astronomischen Gesellschaft in Leipzig auf dankenswerthe Weise publicirt worden sind, werden den Astronomen ein erwünschtes und nützliches Hülfsmittel zur leichten und schnellen Ausführung der in Rede stehenden, oft wiederkehrenden Rechnungen sein. In der Einleitung sagt der Herr Verf.: „La table I. donne à simple vue le nombre des jours écoulés entre le o janvier de l'année o de l'aire vulgaire*), et une date quelconque du calendrier grégorien, jusqu'à l'an 2000. On y trouve immédiatement le nombre de jours correspondant au o janvier de chaque année (au 1 janvier, si l'année est bis-

*) Jusqu'à 1582 on a compté les dates juliennes, depuis 1583 les dates grégoriennes.

Digitized by Google

sextile); il ne reste plus qu'à y ajouter le nombre de jours correspondant à la date de l'année, et ce nombre est indiqué par la table auxiliaire placée en marge. — La table II. sert à la conversion des heures, minutes et secondes en fractions décimales du jour.“ — Wir empfehlen diese nützlichen Tafeln der Beachtung der Astronomen recht sehr.

Ueber Rillen auf dem Monde. Von J. F. Julius Schmidt, Director der Sternwarte zu Athen. Nebst drei Steindrucktafeln. Leipzig. Barth. 1866. 4°.

Rillen auf dem Monde nennt man bekanntlich jene merkwürdigen langen und schmalen grabenartigen Furchen oder Thalformen, welche eben so wie alle anderen Formen auf dem Monde, jene ausgenommen, die nur Verschiedenheiten des Lichtes oder der Farbe darbieten, erst durch ihren Schattenwurf kenntlich werden. Der Herr Verf. hat den Mond seit 1842 fleissig beobachtet, und dabei auch den erwähnten Gebilden besondere Aufmerksamkeit gewidmet. Um von den neuen Rillen Kunde zu geben, hat er nach Mädler's Vorgange den Mond in vier Quadranten getheilt, und die fraglichen Objecte aus älteren und seinen eigenen Beobachtungen catalogisirt, wodurch es dem Beobachter möglich wird, durch genäherte Kenntniss der Oerter die Rille zur geeigneten Zeit aufzusuchen, zu bestätigen und für einzelne Fälle nachzuweisen, dass die fragliche Form eine andere Deutung verlange. Auf diese Weise ist der auf S. 13—S. 24. mitgetheilte „Catalog der seit 1787 entdeckten Mond-Rillen“ entstanden, welcher 425 Rillen enthält und jedenfalls für alle Mondbeobachter ein unschätzbares nicht zu entbehrendes Hülfsmittel ist, für dessen Publication dem Herrn Verf. besonderer Dank gebührt. Die Schrift ist auch für die allgemeine Mond-Topographie wichtig und interessant, und mag hiemit unseren sich für Astronomie interessirenden Lesern recht sehr zur Beachtung empfohlen sein.

Physik.

Lehrbuch der technischen Physik von Dr. J. Ferdinand Hessler, weiland Professor der Physik am k. k. polytechnischen Institute in Wien. Nach dem Tode des Verfassers fortgesetzt und umgearbeitet von Dr. Fr. Jos. Pisko, Professor in Wien. Dritte, dem

Digitized by Google

neuesten Stande der Wissenschaft entsprechende Auflage. Mit 891 dem Texte eingedruckten Holzschnitten. Auch unter dem Titel: Hessler-Pisko, Lehrbuch der technischen Physik. Dritte Auflage in zwei Bänden. I. Band, enthaltend: Mechanik, Akustik und Electricität. Von Dr. J. F. Hessler. II. Band, enthaltend: Schluss der Electricität, Optik und Wärme. Von Dr. J. F. Hessler und Dr. Fr. Jos. Pisko. Wien. W. Braumüller. 1866. 8°.

„Das Specifische des Hessler'schen Lehrbuchs der Physik“, — sagt Herr Professor Pisko in der Vorrede, — „liegt darin, dass es die für die Technik wichtigen Disciplinen eingehend behandelt und sie in die allgemein bildenden Zweige der Physik an gehörigem Orte einschiebt. So sehen wir denn die allgemeinen Messapparate, die Wage, das Pendel, die Aräo- und Barometer, die Telegraphen, den Funkeninductor von Ruhmkorff sehr ausgedehnt besprochen; so finden wir die Ausnützung physikalischer Wahrheiten z. B. bei Schiffslampen, Wegmesser, Centrifugalapparate, elektrische Sprengvorrichtungen u. s. w., und so endlich wird man auch das sie umschlingende Band der allgemeinen Physik nirgends vermissen. Und weil es dem Verfasser darauf ankam, die Leuchte der Physik recht weit tragen zu lassen, so beanspruchte er in diesem Werke nur die Vorkenntnisse der niederen Mathematik mit Ausschluss der Reihen, und richtete seine Ableitungen darnach ein. Gleichwohl wollte er aber auch anderseits die Errungenschaften der hohen Wissenschaft für seinen Leserkreis nicht verloren geben und so sollten wenigstens die Resultate derselben in seinem Buche Platz finden. — In diesem Sinne war also das Buch weiter zu führen. Es sollte „eine technische Physik“ mit allgemein bildender Grundlage sein, aber auch die „physikalische Technik“ berücksichtigen; wie wir denn in der That zur rechten Zeit stets Winken zur Durchführung des Experimentes begegnen.“

Dass ein physikalisches Lehrbuch von diesem Charakter und dieser Tendenz von grossem Nutzen sein muss und ein Bedürfniss ist, lässt sich gewiss nicht in Abrede stellen; soll es aber den beabsichtigten Nutzen wirklich in vollem Maasse stiften, so ist nach unserer Meinung als ein Hauptgesichtspunkt festzuhalten, dass zwischen der strengen wissenschaftlichen Theorie und der technischen Anwendung eine richtige Mitte und ein richtiges Verhältniss getroffen werde. Gerade in dieser Beziehung scheint uns nun das Hessler-Pisko'sche Werk Vorzügliches zu leisten und unser Interesse ist bei der näheren Einsicht, welche

Digitized by Google

wir von demselben genommen haben, vielfach angeregt worden. Die Theorie ist überall mit grosser Deutlichkeit gegeben, und die Darstellung ist keineswegs eine unmathematische, sie bedient sich aber nur der Lehren der Elementar-Mathematik, und bleibt bei den dadurch gesteckten Gränzen überall zweckmässig stehen; die technische Anwendung ist jederzeit gehörig eingereihet, übergeht keine der in neuerer Zeit besonders hervorgetretenen Anwendungen, und ist, ohne in zu grosse Specialitäten sich einzulassen, was hierbei als besonders lobenswerth erscheint, stets so weit geführt, dass derjenige, welcher die Theorie vollständig verstanden hat, leicht weiter zu gehen im Stande ist, wobei auch die, hauptsächlich in den von Herrn Professor **Pisko** bearbeiteten Partieen mit der grössten Vollständigkeit und Reichhaltigkeit beigegebene Literatur wichtige und wesentliche Unterstützung gewährt. Der Antheil, den jeder der beiden Herren Herausgeber für sich in Anspruch zu nehmen berechtigt ist, ist schon auf dem Titel mit völliger Bestimmtheit bezeichnet, so dass darüber hier nichts weiter zu sagen ist. Wir halten das auch äusserlich mit grosser Eleganz ausgestattete Werk in seiner jetzigen gegen früher sehr vervollkommneten Gestalt rücksichtlich seiner einem Bedürfniss entsprechenden Tendenz für eine wichtige Erscheinung auf dem Gebiete der physikalischen Literatur, und machen unsere Leser recht sehr auf dasselbe aufmerksam, indem wir zugleich gern und bereitwillig das Verdienst anerkennen, welches sich Herr Professor **Pisko** dadurch erworben hat, dass er sich des von dem der Wissenschaft leider zu früh entrissenen trefflichen **Hessler** nachgelassenen Werkes mit so viel Umsicht und so ausgebreiteter Sachkenntniss annahm, und seinen Fleiss vorzugsweise den Theilen der Physik zuwandte, deren weitere Vervollkommnung ganz das Werk der neuesten Zeit ist, wodurch die Arbeit nur erschwert wurde und eben deshalb besondere Anerkennung für sich in Anspruch zu nehmen berechtigt ist. Schliesslich bemerken wir noch, dass dem Werke auch sehr nützliche physikalische Tabellen in ziemlich grosser Anzahl und zweckmässiger Auswahl und Ausdehnung beigegeben sind.

Spektralanalys, exposé och historik, af Rob. Thalén. Med en Spektralkarta. (Aftryck ur Upsala Universitets Årsskrift, 1866.) Upsala, Edquist & Berglund. 1866. 8°.

Wir möchten diese, aus der immer viel Schönes enthaltenden **Upsala Universitets Årsskrift** besonders abgedruckten Schrift eines trefflichen schwedischen Naturforschers recht sehr zu einer Uebertragung in's Deutsche empfehlen, weil wir nicht

glauben, dass unsere Literatur eine ähnliche Schrift besitzt, aus welcher man mit gleicher Leichtigkeit sich über alles Wesentliche in Betreff der Spectralanalyse belehren könnte, wobei immerhin der Uebersetzung vielleicht noch weitere Notizen über die Einrichtung verschiedener neuerer Spectroscope u. s. w. beigefügt werden könnten. Die Schrift besteht, wie auch schon der Titel besagt, aus zwei Abtheilungen, einer theoretischen und einer historischen. Die erste verbreitet sich mit grosser Einsicht und ausgebreiteter Kenntniss über alles in der angegebenen Richtung Wissenswerthe, wobei die nach unserer Ansicht sehr zu wünschende Uebersetzung mit Leichtigkeit die oben erwähnten Zusätze erhalten könnte. Die zweite historische Abtheilung zerfällt in zwei Abschnitte, nämlich die Zeit von 1672—1814 (welche natürlich nur einige allgemeine Notizen in Bezug auf Newton und Fraunhofer u. s. w. enthalten konnte) und in die Zeit von 1814 bis jetzt, welche auf S. 5—S. 51 eine sehr schöne und vollständige Uebersicht über diesen ganzen Zeitraum liefert. Ein allgemeiner Rückblick schliesst die schöne Schrift.

Die Gesetze des räumlichen Sehens. Ein Supplement zur physiologischen Optik. Von Dr. Hermann Scheffler. Mit 10 lithographirten Tafeln. Braunschweig. Schulbuchhandlung. 1866. 8°.

Die beiden Theile der physiologischen Optik des Herrn Verfassers sind im Literar. Ber. Nr. CLXXII. S. 9. und CLXXIII. S. 15. angezeigt worden. Der vorliegende Supplement-Band enthält vorzugsweise neue Entdeckungen des Herrn Verfassers, auf welche derselbe bei weiterem Studium seit dem Erscheinen der beiden ersten Theile geführt worden ist. Wir haben auch diesen dritten Theil mit grossem Interesse gelesen, und haben aus demselben namentlich auch in Beziehung auf die Praxis des richtigen Sehens vielfache Belehrung geschöpft, so dass wir unsere Leser nur recht dringend auch auf diesen 3ten Theil des ausgezeichneten Werks aufmerksam machen können. Von der Reichhaltigkeit des Inhalts und von dem vielen in diesem Buche enthaltenen Neuen wird das Folgende Zeugniss ablegen: I. Fähigkeit eines und beider Augen zum stereoskopischen Sehen. II. Fixirung mit einem Auge. III. Erkenntniss der Entfernung. IV. Erkenntniss der Grösse. V. Scheinbare Richtung. — Applikation. VI. Einfachsehen mit zwei Augen. VII. Doppelsehen. VIII. Zusammensehen. IX. Einfluss der Applikation auf die scheinbare Grösse, Entfernung und Form. X. Identität und Wettstreit der Sehfelder.

Digitized by Google

XI. Fixationsprozess. XII. Erhöhung des stereoskopischen Eindruckes beim Sehen mit zwei Augen. — Beweglichkeit der Stäbchenschicht. — Antipathie gegen das Einfachsehen. XIII. Variationen des Stereoskops. — Gemusterte Flächen. XIV. Perspective. XV. Die Statik der Netzhaut und die pseudoskopischen Erscheinungen. — Zöllnersche Linien. XVI. Einfluss des Wettstreites auf die scheinbare Entfernung der Doppelbilder. XVII. Veränderung der scheinbaren Entfernung bei Motilitätsstörungen in Folge des Wettstreites. — Lähmung des Trochlearis. XVIII. Die Muskelthätigkeit, als Ausfluss des Identitätsgesetzes. — Konsensus und Antagonismus. XIX. Abhängigkeit der empfindenden Nerveneinheit, der scheinbaren Grösse und der Entfernung von der Akkommodation und der Konvergenz der Augenaxen. XX. Experimentelle Bestätigung des allgemeinen Gesetzes, welches die scheinbare Grösse und Entfernung mit der Akkommodation und der Konvergenz verbindet. XXI. Das Identitätsgesetz. XXII. Allgemeine Theorie der Augenfehler. XXIII. Akkommodationsfehler. — Kurzsichtigkeit, Fernsichtigkeit, Übersichtigkeit, Hypermetropie, Astigmatismus und Asphärismus. XXIV. Applikationsfehler. — Schielen mit Einfachsehen. XXV. Motilitätsfehler. — Schielen mit Doppelsehen und schiefer Kopfhaltung. XXVI. Beziehung des Schielens zur Kurz- und Fernsichtigkeit. XXVII. Systematische Bestimmung der Brille für jeden Augenfehler. XXVIII. Eigenthümliches Einfach- und Doppelsehen nach Schieloperationen, sowie Erscheinungen der Antipathie gegen das Einfachsehen. XXIX. Schlussbemerkungen.

Das Gesetz der Stürme in seiner Beziehung zu den allgemeinen Bewegungen der Atmosphäre. Von H. W. Dove. Mit Holzschnitten und zwei Karten. Dritte sehr vermehrte Auflage. Berlin. Reimer. 1866.

Das vorliegende wichtige Buch ist aus seinen beiden ersten Auflagen so bekannt, dass es im Allgemeinen genügt, hier nur das Erscheinen dieser dritten Auflage anzuzeigen, und zu bemerken, dass diese allerdings mit Recht als eine vermehrte bezeichnet werden darf, indem der Herr Verfasser in dieselbe die wesentlichen Ergebnisse seiner Schrift: „Die Wärme der gemässigten Zone mit besonderer Berücksichtigung der Wärme des Winters 1862—63. Berlin. 1863.“ aufgenommen, und ausserdem neuere strengere Belege für das Drehungsgesetz beigebracht hat. Für die Leser, welche die früheren Auflagen weniger kennen, geben wir noch die Hauptrubriken des Inhalts an: Die allgemeinen Bewegungen der Atmosphäre. Einfluss der Drehung der

Erde auf ihre Richtung. I. Die beständigen Winde (Passate). II. Die jährlich periodischen Winde (Monsoons). III. Die veränderlichen Winde. — Die Stürme. I. Stürme der heissen Zone und ihr Eingreifen in die gemässigte. II. Stürme, welche an der äussersten Gränze des Passats entstehen. III. Staustürme. IV. Stürme durch seitliche Einwirkung entgegengesetzter Ströme auf einander. Allgemeine Ergebnisse. — Praktische Regeln. Passatzone. Gebiet der Monsoons. Nördliche gemässigte Zone. Südliche gemässigte Zone. Kalte Zone. — Beigegeben sind mehrere Sturmkarten, namentlich eine grosse sehr schöne Darstellung des Sturms vom 20. Januar 1863.

Wichtige literarische Anzeige.

Herr L. Cremona, gegenwärtig Professor am „Istituto Tecnico Superiore" in Mailand, welches unter Brioschi's Directorium immer mehr aufblühet, wird seiner schönen, von Herrn M. Curtze übersetzten „Introduzione ad una Teoria geometrica delle curve piane" das nachstehend angezeigte Buch folgen lassen. Ich hoffe mit Bestimmtheit, dass es mir gelingen wird, unverzüglich eine Uebersetzung auch dieses Werkes zu veranlassen, und habe dazu bereits die erforderlichen Schritte gethan. Grunert.

PRELIMINARI
DI UNA TEORIA GEOMETRICA
DELLE SUPERFICIE

PER

LUIGI CREMONA

Prof. al R. Istituto Tecnico Superiore in Milano.

Questo lavoro è pubblicato dall'Accademia delle scienze di Bologna nelle sue *Memorie*, ed è già uscita la prima parte, che consta di un fascicolo di 6 fogli di stampa in 4°. gr. — A compimento mancano circa 10 altri fogli, che usciranno entro il 1867.

Digitized by Google

Di quest' opera isolata non sono in vendita che sessanta copie, le quali trovansi già sin d'ora depositate presso il Tip. Zanetti Franc., Amministratore del *Politecnico*, in Milano.

L'opera intera costa it. L. 6; chi amasse comperarla è pregato spedire un Vaglia postale di detta somma, intestato al Zanetti, il quale manderà tosto la parte pubblicata, ed in seguito il compimento, *franco* d'ogni spesa.

Kurz vor dem Schluss dieses Literarischen Berichts ist mir noch zugegangen:

Discorso di Apertura del secondo Anno della Facoltà di Chimica, fondata per iniziata privata. Letto dal Fondatore Prof. **Carlo Cassola.** Napoli. Tipografia de' Fratelli de Angelis. 1867. (19 Seiten.)

Dieser „Discorso" enthält einen sehr interessanten ausführlichen Bericht über das vorher genannte sehr grossartige chemische Institut, dessen Errichtung im Jahre 1866 wir schon im Literar. Ber. CLXXX. S. 8. angezeigt haben. Wir machen alle unsere Leser, die für Chemie sich interessiren, recht sehr auf diese Schrift aufmerksam. G.

Digitized by Google

Literarischer Bericht
CLXXXIV.

† Dr. Marian Koller*).

Unter den vielen Opfern, welche die in den letzten Monaten des Jahrs 1866 herrschende Choleraepidemie aus den Reihen der Intelligenz unerbittlich forderte, haben wohl wenige eine so allgemeine Theilnahme erweckt, wie der so plötzliche Tod des Ministerialrathes im österreichischen Staatsministerium (Abtheilung für Cultus und Unterricht) Dr. Marian Wolfgang Koller. Wenige Stunden — und jener Mann war nicht mehr, dessen Verlust Wissenschaft und Unterricht tief beklagen. Gross waren seine Verdienste in beiden, und wenn trotzdem sein Name ausserhalb der Grenzen

*) Indem ich diesen mir freundlichst zugesandten, und mit dem grössten Danke von mir entgegen genommenen Necrolog eines Mannes im Folgenden mittheile, welchem, nach gemachter persönlicher Bekanntschaft, im Leben näher getreten zu sein, ich jederzeit für ein mir zu Theil gewordenes besonderes Glück halten, und dessen Andenken ich stets treu in meinem Herzen bewahren werde, bemerke ich, dass als eine dankenswerthe Ergänzung dieses, übrigens alles Wesentliche enthaltenden Necrologs die folgende mehrfach interessante Schrift betrachtet werden darf:

Dr. **Marian (Wolfgang) Koller**, Capitular des Benedictiner-Stiftes Kremsmünster, k. k. Ministerialrath im hohen Staatsministerium, Ritter des kais. österr. Leopold-Ordens, wirkliches Mitglied der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, wirklicher Consistorialrath des Bisthums Linz etc. etc., emeritirter Prodirector der philosophischen Studienanstalt, Director des Convictes und der Sternwarte zu Kremsmünster Eine Lebensskizze, bearbeitet von Dr. **Augustin Reslhuber**, Stiftsabte und Director der Sternwarte zu Kremsmünster. Wien. Carl Gerold's Sohn. 1866. 8°.

Ein Paar kleinere, dem folgenden Necrologe von mir beigefügte Anmerkungen sind dieser Schrift entnommen. G.

seines Vaterlandes nicht so bekannt ist, wie jene es erheischen, so ist gewiss die einzige Ursache, dass in seinem Geiste der Dünkel und in seinem Herzen die Selbstsucht keinen Raum fanden. Um so mehr erachten wir es daher als unsere Pflicht, in diesen Blättern den Gelehrten und Schulmännern Deutschlands diesen ausgezeichneten Mann wahr und ungeschminkt vorzuführen, damit ihm in der Reihe jener Männer, die sich es zur Lebensaufgabe stellten, nur der Wissenschaft und der Jugend zu nützen, der gebührende Ehrenplatz gesichert werde.

Marian Wolfgang Koller, am 31. Oktober 1792 zu Feistriz in Krain geboren, war der Sohn eines Eisenwerksverwesers und erhielt den ersten Unterricht im väterlichen Hause. Am Lyceum in Laibach absolvirte er das Gymnasium und die philosophischen Studien mit ausgezeichnetem Erfolge und studirte dann im Studienjahre 1810—11 an der Ecole centrale de médecins de Laibach Naturgeschichte, allgemeine Chemie und Mathematik, gleichzeitig auch das Studium der französischen und italienischen Sprache eifrig betreibend, indem Koller in der k. k. Bergakademie zu Schemnitz zum Montanisten ausgebildet werden sollte. Die ungünstigen Zeitverhältnisse liessen diesen Plan nicht zur Reife kommen und Koller bezog daher im Oktober 1811 die Wiener Universität, um sich hier mit voller Kraft auf die mathematischen und naturwissenschaftlichen Studien werfen zu können — jenen Disciplinen, zu welchen bereits der zarte Knabe sich hingezogen fühlte und denen der Greis in den letzten Stunden seines Daseins noch mehr als den nöthigen Tribut zollte. Hier besuchte er die Vorlesungen der höheren Mathematik von dem Astronomen Bürg und die ex mathesi forensi mit dem ausgezeichnetsten Erfolge. Während dieser zwei Jahre machte Koller mehrere Concursprüfungen mit, um eine mathematische Lehrkanzel zu erlangen, wurde jedoch, da immer ältere Competenten berücksichtiget werden mussten, auf die — Zukunft vertröstet. Er nahm daher 1814 eine ihm angebotene Hofmeisterstelle für französische und italienische Sprache zu Steinbach an der Steyer in Oberösterreich an und blieb daselbst drei Jahre.

Während dieser Zeit lernte Koller das Stift Kremsmünster kennen, an dem seit einer Zeit, wo das Unterrichtswesen Oesterreichs noch tief im Argen lag, schon die mathematisch-naturwissenschaftlichen Zweige sorgsam gepflegt und talentvolle Zöglinge für das Leben tüchtig gebildet wurden. Dieser Hort der Wissenschaft verfehlte nicht auf Koller den nöthigen Eindruck zu üben. Bald ward sein Entschluss gefasst, denn im Herbste 1816 sehen wir bereits den früheren akademischen Bür-

Digitized by Google

ger der Wiener Universität als Novize im Stifte Kremsmünster*). Doch Unrecht wäre es, zu glauben, **Koller** habe diese Wahl getroffen, um ungestört seinen Lieblingsstudien obliegen zu können. Derselbe lebte bis zu seinem Tode streng den Regeln seines Ordens gemäss, wie wir aus vielfacher persönlicher Beziehung wissen, so dass wir mit Recht in ihm auch einen der würdigsten Priester verehren.

Nachdem **Koller** das Noviziat zurückgelegt und seine theologischen Studien in Linz beendet hatte, wurde derselbe im Jahre 1821 zum Priester geweiht und wirkte dann bis zum Jahre 1824 als Cooperator in der Pfarrei Sipbachzell in der Seelsorge, indem jedes Ordensmitglied ohne Unterschied mindestens einige Jahre in der eigentlichen Seelsorge thätig sein muss**); allein schon 1824 sollte er endlich seinen Lieblingswunsch erreicht sehen. Als nämlich am 18. April 1824 P. **Thaddäus Derflinger**, bisheriger Decan der philosophischen Studien, Direktor des Conviktes und der Sterwarte in ein besseres Jenseits schied, wurde **Koller** in das Stift zurückgerufen, um sich für die Professur der Naturgeschichte, welche er nun mit Beginn des Studienjahres 1825 an der philosophischen Lehranstalt übernehmen sollte, vorzubereiten.

Im Oktober 1825 übernahm auch **Koller** dieselbe provisorisch, vereinigte mit derselben 1826 die Lehrkanzel der Physik und legte am 17. Februar 1827 die strenge Prüfung aus beiden Fächern an einem Tage mit sehr gutem Erfolge ab, worauf derselbe von der k. k. Studien-Hofkommission als ordentlicher Professor bestätigt wurde. Jetzt endlich war das langersehnte Ziel erreicht und nun beginnt **Koller's** segensreiche Thätigkeit auf dem Gebiete des Unterrichtes.

Doch auch auf dem Gebiete der Wissenschaft sollte sich ihm bald ein grosses Feld der Thätigkeit eröffnen; denn als am 29. April 1830 der bisherige Direktor der Sternwarte P. **Bonifacius Schwarzenbrunner** plötzlich mit Tod abging, übernahm **Koller** die Leitung der Sternwarte mit Beibehaltung der Lehrkanzel der Physik. Letztere versah er bis zu Ende des Studienjahres 1839, erstere hingegen bis Oktober 1847, beide mit unermüdlichem Eifer und ausgezeichnetem Erfolge.

---

*) Bei seinem Eintritt in's Noviziat am 5. October 1816 erhielt **Wolfgang Koller** den Stiftsnamen: Fr. **Marianus**. G.

**) Er wird als ausgezeichneter Seelsorger, Katechet und Kanzelredner geschildert. G.

Digitized by Google

Die Hunderte von Schülern, welche in ihm ihren Lehrer verehren, sind mit uns gewiss einer Meinung, wenn wir sagen: Koller war nicht nur ein ausgezeichneter Schulmann, er war auch ein Freund der Jugend, deren Sympathien er vollständig besass und in deren Andenken er immer fortleben wird. Was jedoch Koller während dieser siebzehn Jahre als Mann der Wissenschaft leistete, davon geben die vielen und verschiedenartigsten Publikationen mehr als genügend Zeugniss.

Die Sternwarte dieses mit Recht berühmten Benediktinerstiftes feierte vor wenigen Jahren ihr erstes Säculum. Der erste Astronom derselben, P. Placidus Fixlmillner (1762—1791), ein ebenso genialer als liebenswürdiger Mann, begründete schnell den Ruf dieses neuen Uranientempels. Seine Leistungen und seine ausgebreitete Correspondenz mit de la Lande, Johann Bernoulli, Maximilian Hell u. v. a. beweisen diess zur Genüge. An diesen reihte sich in würdiger Weihe P. Thaddaeus Derflinger, (1791—1824), dessen Name in der astronomischen Welt sich des besten Rufes erfreut. Sein Nachfolger P. Bonifaz Schwarzenbrunner, ein äusserst talentvoller und strebsamer junger Mann, bekleidete die Stelle eines Astronomen, wie wir bereits erwähnten, nur sechs Jahre, bis zum Jahre 1830, wo ihn der Tod plötzlich abrief. Der vierte Astronom dieser Sternwarte war nun jener Mann, dessen Andenken diese Zeilen geweiht sind—es ist unser unvergesslicher Koller. Wenn wir hier mit einigen Worten eine Geschichte der Sternwarte einflochten, so geschah diess nur, um darauf hinweisen zu können, dass sich Koller vollkommen würdig an seine drei Vorgänger anreihte und den Ruf dieser Sternwarte nicht nur nicht schmälerte, sondern wo möglich noch vergrösserte. In Gemeinschaft mit seinem intimen Freunde Professor Stampfer, welcher leider noch früher als Koller der Wissenschaft entrissen wurde und dessen Andenken erst kürzlich in diesen Blättern so schön gewahrt wurde, stellte er den zweischuhigen Meridiankreis auf (1831), dann ein tragbares Aequatorial, mit welchen Instrumenten die Beobachtungen seit ihm ohne Unterbrechung fortgesetzt werden. Grosse Aufmerksamkeit widmete Koller den meteorologischen Beobachtungen, denn seit 1831 bereits datiren die täglichen Aufzeichnungen über Luftdruck, Temperatur, Dunstdruck u. s. f., aus welchem Materiale Koller uns einige äusserst interessante Arbeiten hinterlässt. Als im dritten Decennium Humboldt und Gauss die Untersuchungen über den Erdmagnetismus anregten, war Koller einer der ersten, der die Sache aufgriff, und gründete daher 1839 das magnetische Observatorium, welches der Zeit

nach das zweite in Oesterreich ward (das erste gründete Kreil in Mailand).

Es ist nicht möglich hier Koller's Thätigkeit als Direktor der Sternwarte eingehend zu schildern*); wir begnügen uns daher in Kürze die Arbeiten zu nennen, welche derselbe während dieser Zeit der Oeffentlichkeit übergab. In den Annalen der Wiener Sternwarte: „Sternschnuppenbeobachtungen im Jahre 1839." In den Jahrbüchern des Musealvereines Francisco-Carolinum zu Linz: „Meteorologische Beobachtungen zu Kremsmünster in den Jahren 1839 und 1840 (Jahrgang 1840 und 1841)"; „über den stündlichen Gang der Wärme für Kremsmünster nach Bessel's Methode (Jahrgang 1841)"; „über die stündlichen Aenderungen des Luftdruckes und der Feuchtigkeit der Luft aus zehnjährigen Psychrometerbeobachtungen (Jahrgang 1843)" u. m. a. „Im 12. Bande der Memoirs of the brit. R. A. Society (1842) ein Verzeichniss von 208 neu bestimmten Fixsternen." Ausserdem finden wir noch zahlreiche Arbeiten in C. H. Schumacher's „astronomischen Nachrichten" Band 8—25; in Lamont's Annalen für Meteorologie und Erdmagnetismus und in Gauss und Weber's Resultaten des magnetischen Vereines.

Koller's Thätigkeit theilt sich vorzüglich in zwei Hauptabschnitte: in jenen zu Kremsmünster, den wir eben in kurzen Umrissen kennen gelernt haben, und in den zu Wien, wo er seine Thätigkeit hauptsächlich dem Staate widmete.

Als nämlich nach dem Tode des Hofrathes J. C. Hallaschka die Stelle eines Referenten für die philosophischen Studienanstalten bei der k. k. Studien-Hofkommission in Erledigung kam, fiel das Augenmerk der hohen und höchsten Behörden auf den bereits rühmlichst bekannten Koller und derselbe wurde in Folge dessen am 30. Oktober 1847 von Kaiser Ferdinand I. zum k. k. Regierungsrathe, Referenten für die philosophischen Studienanstalten bei der k. k. Studien-Hofkommission und Präses der philosophischen Facultät der Wiener Universität ernannt, welches Amt Koller Anfangs Dezember desselben Jahres noch antrat.

In Anerkennung seiner Verdienste um die Wissenschaften erwählte ihn einige Wochen später, am 26. Jänner 1848, die kai-

*) Die Jahresberichte des k. k. Obergymnasiums zu Kremsmünster bringen bereits in drei Fortsetzungen (1864, 1865 und 1866) eine ausführliche Geschichte der dortigen Sternwarte von P. Sigismund Fellöker. In der 4. Fortsetzung (1867) kommt die Wirksamkeit Koller's zur Besprechung und aus diesem Grunde begnügen wir uns mit obiger kurzer Schilderung.

Digitized by Google

serliche Akademie der Wissenschaften zu ihrem wirklichen Mitgliede, welche Wahl am 1. Februar bereits vom Kaiser bestätiget wurde.

Das erste Jahr seiner Thätigkeit im Staatsdienste war bekanntlich das verhängnissvolle Jahr 1848. Doch trotz aller Gefahren und Wirren blieb Koller am Platze und zog sich nur Ende Oktober auf einige Tage in das Stift Melk zurück, von wo er gleich Anfangs November wieder zurückkehrte. Als im Jahre 1849 die k. k. Studien-Hofkommission aufgehoben und an deren Stelle ein Ministerium für Cultus und Unterricht trat, wurde Koller als k. k. Sectionsrath in dasselbe übersetzt und ihm das Referat über die polytechnischen, nautischen und astronomischen Institute übertragen. In diesem Jahre ging gleichzeitig Koller's Wirksamkeit als Präses der philosophischen Fakultät zu Ende, da ein Gesetz vom 29. Oktober 1849 den akademischen Behörden eine andere Organisation gab. Wie sehr er sich die Achtung dieser Körperschaft in dem nur kurzen Zeitraum von kaum zwei Jahren erworben, zeigt die ihm bei seinem Scheiden von dieser zuerkannte Auszeichnung. Dieselbe ernannte ihn nämlich durch Acclamation zum wirklichen Mitgliede des Doktoren-Collegiums der philosophischen Fakultät der Wiener Universität und überreichte ihm das Doctor-Diplom mit dem Beisatze: „de republica literaria optime meritus."

Als 1851 das Ministerium für Cultus und Unterricht definitiv organisirt wurde, avancirte Koller zum k. k. Ministerialrathe mit Belassung seines Referates. Mit diesem Jahre trat in Oesterreich die moderne Mittelschule, die sechsklassige Realschule, in's Leben, welches Werk fast ausschliesslich eine Schöpfung Koller's war und denen er auch bis an sein Lebensende sympathisch blieb. Wenn auch heut zu Tage mit Recht Rufe nach Reform dieser jungen Lehranstalten laut werden, so waren dieselben damals, wo es mit dem Unterrichtswesen in Oesterreich noch nicht gar sonderlich gut aussah, gewiss ein nicht zu unterschätzendes Werk. Wer die Früchte kennt, welche diese Schulen während ihres fünfzehnjährigen Bestandes in Oesterreich getragen haben; wer weiss, wie viele tausende von jungen tüchtig geschulten Kräften den verschiedensten technischen und industriellen Etablissements durch diese zugeführt wurden, der wird die Verdienste würdigen können, welche sich Koller um den nationalen Wohlstand Oesterreichs erworben. Dass diese Verdienste auch allerhöchsten Orts gewürdiget wurden, zeigt uns die Auszeichnung, welche Koller 1859 zu Theil wurde. Sr. Majestät Kaiser Franz Josef verlieh ihm nämlich am 27. Mai d. J. taxfrei das Ritterkreuz

Digitized by Google

des kaiserl. öster. Leopolds-Ordens in Anerkennung seiner Verdienste um die Wissenschaften und den Staat. In dem Vortrage des damaligen Ministers sind ausdrücklich die besonderen Verdienste Koller's hervorgehoben, welche er sich „um den raschen Aufschwung der Realschulen in Oesterreich“ erworben habe. Wie eifrig Koller trotz seines schon vorgerückten Alters war und wie er nur trachtete, den technischen Unterricht in Oesterreich zu heben, dafür sprechen die verschiedensten Belege. So hatte er z. B. im Jahre 1852 das Unglück, sich den Arm zu brechen und musste in Folge dessen mehrere Monate ausserhalb Wien zubringen. Um nun mit seinen Arbeiten, die sich damals gerade sehr häuften, ja nicht im Rückstande zu bleiben, hielt er sich während dieser Zeit einen Beamten auf eigene Kosten und diktirte ihm.

Ministerialrath Koller wurde von seinem Minister wiederholt mit Ehrenaufträgen betraut. So ging er 1854 nach Triest, um die dortige nautische und Handelsakademie einer eingehenden Inspection zu unterziehen. Auf Grund derselben legte er ein detaillirtes Elaborat über die nothwendige Reorganisation dieser Anstalten allerhöchsten Ortes vor, welches sich nicht nur der vollsten Anerkennnng erfreute, sondern nach welchem die Reorganisation auch ausgeführt wurde. Im Jahre 1857 inspizirte er das eben vollständig organisirte Josefspolytechnikum in Ofen und die Realschulen zu Pest, Ofen und Pressburg. Am 22. August desselben Jahres wurde Koller über Ansuchen des Ministers des Innern von seinem Minister als Repräsentant des Unterrichtsministeriums zur Berathung bezüglich der Errichtung der land- und forstwirthschaftlichen Mittelschulen gesendet. Seine letzte Inspectionsreise unternahm er 1859 nach Graz, wo er das Joanneum und die dortige Oberrealschule einer eingehenden Prüfung unterzog.

In diesem rastlosen Eifer seiner Thätigkeit schwanden Koller die Jahre dahin wie Stunden, er wurde endlich Greis — doch sein Geist blieb jung. Wer so glücklich war, ihm in den letzten Jahren seines Wirkens näher zu stehen, muss staunen über die Geistesfrische, die dem 74jährigen Manne noch inne wohnte Mit Freude unterzog er sich der gewiss äusserst schwierigen und mühevollen Reorganisation, welche an dem hiesigen Polytechnikum durchgeführt werden sollte und nicht einmal nur äusserte er: „Dieses Werk will ich noch vollenden und dann ziehe ich mich nach Kremsmünster zurück.“ Am 28. November 1860 überreichte das Professorencollegium des Polytechnikums das von demselben ausgearbeitete Reorganisationsstatut dem Ministerium.

Digitized by Google

Die Verhandlungen begannen, das Statut wurde von Sr. Majestät sanctionirt und das Professorencollegium hatte nun seine Anträge zu stellen. Antrag auf Antrag kam nun an's Ministerium, alle mussten durch Koller's Hand gehen — doch seiner Arbeitskraft, seinem Geiste war nichts zu viel. Mit gewohntem sicheren Takte traf er seine Entschlüsse und legte sie seinem Minister vor. Schon waren mehr als 20 Professoren ernannt, schon war bestimmt, dass mit dem 1. Oktober das reorganisirte Institut in's Leben zu treten habe, nur noch einige Ernennungen fehlten und das neue Gebäude war hergestellt, sein letzter Wunsch erfüllt — da kam der unerbittliche Tod und Koller war nicht mehr.

Schreiber dieser Zeilen war noch am 18. September d. J. Mittags durch fast zwei Stunden bei ihm in seiner Wohnung, um über eine astronomische Arbeit seinen Rath einzuholen. In der heitersten Stimmung überreichte er mir einige vollständig gerechnete astronomische Aufgaben, die er Abends des vorigen Tages ausführte, zeigte mir eine neue Broschüre von dem von ihm besonders hochgeschätzten Herausgeber dieser Zeitschrift und verabschiedete sich mit den Worten: „besuchen Sie mich dieser Tage wieder, den nächsten Sonntag gehe ich nach Kremsmünster, um ein wenig Bergluft zu athmen" — es sollten die letzten Worte sein, die der freundliche Gönner gesprochen. Abends noch bis in später Stunde arbeitend, ereilte ihn des Morgens — am 19. September — die tückische Krankheit, Mittags gaben ihn die Aerzte auf und um 5 Uhr Nachmittags ward er eine Leiche.

Er ruhe in Frieden!

Uns aber sei es noch erlaubt, einige Züge aus den letzten Jahren seiner Thätigkeit hier anzuführen, welche so recht bestätigen, was wir bereits früher über ihn sagten. Koller blieb trotz seines umfangreichen Referats, trotz seiner angestrengten Berufsthätigkeit bis zur letzten Stunde seines Lebens der von ihm gepflegten Wissenschaft treu. Es entging ihm keine wissenschaftliche Novität und erzählte man ihm von einer, so war diess gewiss seine nächste Lektüre. Er sah auf junge Kräfte nicht vielleicht mit einer gewissen Geringschätzung herab — nein, er eiferte sie an und unterstützte selbe. War an der philosophischen Fakultät ein anziehendes astronomisches Collegium angekündigt, so war Koller derjenige, den man unter den Zuhörern fand. So besuchte der 74jährige Greis noch im letzten Sommersemester das Collegium unseres jungen Astronomen Oppolzer über Bahnbestimmungen und zwar so eifrig, als er es im Jahre 1812 unter dem Astronomen Bürg gethan haben mochte. Aber nicht nur noch

immer Neues verfolgend, gab er auch seine eigene Produktivität nicht auf. So publicirte er in den Jahresheften des naturforschenden Vereines in Brünn, dessen Ehrenmitglied er war, 1863 eine Abhandlung „über das Passage-Instrument" und 1864 zwei weitere Arbeiten, betitelt: „Zur Theorie des August'schen Heliostaten" und „Beitrag zur Theorie der Röhrenlibelle." Man erkennt in diesen gehaltvollen Schriften nicht nur den tüchtigen praktischen Astronomen, sondern auch den strengen Theoretiker. Dass selbe überdiess äusserst klar und präcis geschrieben sind, brauchen wir jenen, welche seine früheren Arbeiten kennen, wohl nicht erst zu sagen.

Koller war auch sehr unterrichtet in den modernen Sprachen. Ihm waren die Arbeiten der englischen, französischen und italienischen Fachcollegen ebenso bekannt, wie jene der deutschen Gelehrten. Ja er schrieb wiederholt kleinere Arbeiten in einer der eben genannten modernen Sprachen.

Wohl selten wird ein Mann nach so vielen Richtungen mit solchem Erfolge und solcher Auszeichnung wirken, wie Koller es that. Priester, Gelehrter und Staatsmann zugleich, bewies er sich bei all seinem Wirken stets als Mensch im edelsten Sinne des Wortes. Seine Humanität war allbekannt.

Am meisten wüssten wohl hiervon alle Schulmänner zu erzählen, deren Vorgesetzter er war. Er kam Jedem als Freund entgegen, man konnte frank und frei seine Meinung aussprechen — man hatte ja keinen höher gestellten Beamten, sondern einen ausgezeichneten Schulmann als Vorgesetzten, der die Bedürfnisse der Schule und die des Lehrers kannte und daher auch zu würdigen wusste. Leider musste er — der, welcher nur der deutschen Wissenschaft lebte, dessen einziges Streben nur dahin ging, deutsche Sitte zu pflegen und deutschen Unterricht zu heben, noch kurz vor seinem Tode mit uns das Unglück erleben, aus Deutschland ausgeschlossen zu werden. Mögen ihm daher Deutschlands Gelehrte und Schulmänner um so mehr den Ehrenplatz unter ihren Koriphäen anweisen, den er gewiss mit Recht verdient.

Wien, im Christmonat 1866.

Dr. R. Sonndorfer.

Am 20. Juli 1866 ward in Italien zum grössten Schaden der Wissenschaft durch den Tod dahingerafft der Professor

Bernhard Riemann

aus Göttingen.

Der berühmte Königl. Bayer'sche Hofoptikus

Georg Merz

verschied im Januar 1867 in München. Georg Merz war als der Sohn eines armen Leinwebers im Januar 1793 in Benedictbeuren geboren. Bis zu seinem 15. Lebensjahre war er ohne bestimmten Lebensplan. Als v. Utzschneider die Kunstglasfabrik und das optische Institut in Benedictbeuren anlegte, fand der junge Merz als Arbeiter darin Aufnahme. Bei Tag wurde geschliffen, bei Nacht Mathematik und Optik studirt. Besonders erhielt er mathematischen Unterricht vom Pater Rauch, einem Ordens-Priester der aufgelösten Benedictiner-Abtei Benedictbeuren. Als 1826 Jos. v. Fraunhofer starb, wusste v. Utzschneider keine tüchtigere Persönlichkeit für die Leitung des Instituts als G. Merz. Von ihm gingen jene Rieseninstrumente an alle Sternwarten Europa's und Amerika's, nach Australien und an das Cap der guten Hoffnung. Erst bei vorgerückterem Lebensalter übergab er seinem Sohne Sigmund Merz die Direction, welcher dann die Preise auf den Weltausstellungen errang.

Schriften über Unterrichtswesen.

Programma del Regio Istituto Tecnico superiore in Milano per l'anno scolastico 1866—67. Pubblicato per cura del Consiglio direttivo dell' Istituto medesimo. Milano. 1867.

Die Leser kennen das höhere technische Institut in Mailand schon aus der im Archiv Thl. XLII. S. 42. mitgetheilten trefflichen Eröffnungsrede seines berühmten Directors, des Herrn Commendatore Francesco Brioschi. Das vorliegende, 42 Seiten starke „Programma" müssen wir allen denen, die sich für den höheren technischen Unterricht interessiren, namentlich solchen, die zur Mitwirkung bei der Gründung neuer technischer Institute berufen sind, dringend zur Beachtung empfehlen. Dasselbe enthält eine sehr ausführliche, im höchsten Grade interessante und lehrreiche Nachricht über die Einrichtung des Instituts im Allgemeinen, über seine verschiedenen Abtheilungen, seine reichen und weit ausgebreiteten Sammlungen, seine Lehrer und die sämmtlichen Vorlesungen, welche gehalten werden. Ganz besonders interessant sind auch, was wir in Schriften ähnlicher Art noch nicht gefunden haben und gewiss alle Nachahmung

Digitized by Google

verdient, die S. 29—S. 36 ausführlich mitgetheilten: „Temi per gli Esami generali nell' anno 1865—66." Zuletzt ist noch ein Elenco degli scolari e degli uditori (1865—66) mitgetheilt. Unter den Lehrern finden wir neben den Herrn F. Brioschi, L. Cremona, G. Schiaparelli und Anderen auch den berühmten Ingenieur Herrn Cav. Ignazio Porro als Professore di Celerimensura, wobei wir im Interesse der Wissenschaft und der Praxis den dringenden Wunsch aussprechen möchten, über diese Schnell- oder Geschwindmessung und die dabei angewandten Methoden und Instrumente nähere Nachrichten zu erhalten; dem Unterzeichneten, der darüber gern Mittheilungen im Archiv machen möchte, ist davon bis jetzt nur Das bekannt, was von Herrn Salneuve in seinem verdienstlichen „Cours de Topographie et de Géodésie. Seconde édition. Paris 1850. über verschiedene von Herrn Porro erfundene sinnreiche Instrumente, z. B. über seinen Apparat zu Basismessungen, seine stadia und seine lunette anallatique, seine longue-vue cornet, sein Nivellirinstrument, mitgetheilt hat. Eine besondere Schrift über die „Celerimensura" würde gewiss höchst verdienstlich sein, und wir würden uns zu dem grössten Dank verpflichtet fühlen, wenn uns vielleicht schon jetzt eine solche mitgetheilt oder namhaft gemacht werden könnte.

Alle unsere Leser machen wir nochmals auf das vorliegende höchst interessante Programm aufmerksam. Grunert.

Geschichte der Mathematik und Physik.

Aus dem Literar. Ber. Nr. CLXXXII. S. 2. kennen die Leser die beiden von Herrn A. Quetelet mitgetheilten höchst interessanten Briefe Kaiser Karls V. an François Rabelais in Betreff der Quadratur des Kreises. Auch ist dort bemerkt worden, dass Herr Gachard in der Akademie der Wissenschaften in Brüssel Zweifel an der Echtheit dieser Briefe erhoben habe. In einem Auszuge aus dem Bulletin de l'Académie Royale de Belgique. 2me série, t. XXII., no. 11. 1866. hat nun aber Herr Quetelet alle diese Zweifel vollständig beseitigt und die Echtheit der beiden Briefe auf die überzeugendste Weise nachgewiesen. Ganz besonders interessant und wichtig ist jedenfalls das mitgetheilte Fac-simile des ersten dieser beiden Briefe des grossen Kaisers, die sich bekanntlich im Besitz des Herrn Chasles in Paris befinden, wobei wir wohl im Interesse mancher Mathematiker, die sich vorzugsweise mit der Geschichte der Mathematik beschäftigen, den Wunsch aussprechen möchten, dass es Herrn Quetelet

Digitized by Google

gefallen möchte, uns auch mit einem ähnlichen Fac-simile des zweiten Briefes zu beschenken. Besonders hebt Herr Quetelet auch noch hervor, dass Rabelais auf dem hier mitgetheilten Briefe eigenhändig bemerkt habe, dass ihm der Brief von Karl V. am 20. September 1542 gesandt worden sei. Natürlich finden sich diese Worte Rabelais auch auf dem mitgetheilten Fac-simile.

Arithmetik.

Méthodes expéditives pour l'extraction de la racine cubique des nombres entiers. Par Georges Dostor, Docteur ès-sciences mathématiques, Professeur au Lycée impérial de la Réunion. Extrait du Bulletin de la Société des Sciences et Arts de la Réunion. Paris. Gauthier-Villars. 1866.

Jeder weiss, wie beschwerlich die gewöhnlichen Methoden zur Ausziehung der Cubikwurzel sind. In dieser aus den Schriften der Société des Sciences et Arts de la Réunion (früher Isle de Bourbon, Bonaparte) besonders abgedruckten, sehr verdienstlichen Abhandlung hat Herr Dostor diese Methode durch neue Methoden und Sätze zu erleichtern gesucht, welche jedenfalls alle Aufmerksamkeit und namentlich sehr verdienen, recht bald in die Lehrbücher der Arithmetik, besonders auch in die für Schulen bestimmten, Eingang zu finden. Wir machen daher für jetzt alle Lehrer der Mathematik dringend auf diese Schrift aufmerksam, hoffen aber, bald im Archiv selbst Gelegenheit zu einigen Mittheilungen aus derselben zu finden; durch Herrn Gauthier-Villars in Paris ist sie ohne alle Schwierigkeit zu beziehen.

Några analytiska Undersökningar. I. Om Determinanter, hvars elementer äro binomialkoefficienter. Af Viktor von Zeipel. (Ur Lunds Universitets Årsskrift). Lund. Berlingska Boktryckeriet. 1866. 4⁰.

Diese Schrift enthält eine grosse Anzahl interessanter Sätze über Determinanten, die aus Binomialcoefficienten als ihren Elementen gebildet sind, und ist als ein neuer, sehr wichtiger Beitrag zu der Theorie dieser letzteren interessanten und merkwürdigen Zahlen zu betrachten, mit welchen sich namentlich in Deutschland bekanntlich der Erfinder und die Bearbeiter der combinatorischen Analysis so vielfach und so eifrig beschäftigten. Dieselbe besteht aus vier Paragraphen, nämlich: §. 1. Om determinanter, hvars elementer äro konsekutiva binomialkoefficienter. §. 2. Om determinanter, hvars elementer endast till en del äro

Digitized by Google

konsekutiva binomialkoefficienter. §. 3. Några determinantersystemer, hvars elementer äro binomialkoefficienter. §. 4. Om determinanter af formerna u. s. w., wo man die der Beschränktheit des Raumes wegen nicht mittheilbare Form in der Schrift selbst nachsehen muss. — Eine grosse Menge sehr merkwürdiger Sätze sind in diesen vier Paragraphen enthalten, weshalb wir alle unsere Leser dringend auf diese ausgezeichnete Schrift aufmerksam machen, indem wir zugleich bemerken, dass dieselbe auch für jeden des Schwedischen nicht oder nur weniger Kundigen sehr leicht verständlich ist, weil sie vom Anfange bis zum Ende (68 Seiten) fast nur aus Formeln besteht.

Geometrie.

Études géométriques sur la théorie des parallèles par N. J. Lobatschewsky; traduit de l'Allemand par J. Hoüel, Prof. de Mathém. pures à la Faculté des Sciences de Bordeaux. Suivi d'un extrait de la Correspondance de Gauss et de Schumacher. Paris. Gauthier-Villars. 1866. 8°.

Ueber die sich immer mehr und mehr Bahn brechenden neueren Ansichten über die Theorie der Parallelen kann jeder unserer Leser sich am Besten und Kürzesten belehren in den „Elementen der Mathematik. Von Dr. Richard Baltzer. Zweiter Band. Zweite Auflage. Leipzig. 1867. S. 12 ff.", so dass wir uns füglich hier der Kürze wegen weiterer Auseinandersetzungen enthalten können. Wir begnügen uns mit der Bemerkung, dass es als das Wesentlichste dieser Ansichten betrachtet werden kann, dass es bei der Theorie der Parallelen nothwendig jedenfalls einen Satz geben muss, welcher sich überhaupt gar nicht beweisen lässt, über dessen Richtigkeit vielmehr nur auf dem Wege der Erfahrung entschieden werden kann, und dass es eigentlich zwei Geometrieen geben wird, von denen aber nur die eine der Erfahrung entspricht. Ursprünglich gehören diese Ansichten Gauss an; ihre Ausführung haben dieselben aber zuerst durch den Ungar Bolyai*) in dessen Werke: Tentamen

*) Bolyai, Farkas, war den 9. Februar 1775 geboren und starb am 20. November 1856. Ein vollständiges Verzeichniss der von ihm herausgegebenen, über sehr verschiedene Wissenschaftszweige sich verbreitenden Werke findet man in dem sehr verdienstlichen „Magyar Tudom. Akademiai Almanach. MDCCCLXIII-Ra. Pesten. pag. 282."

Digitized by Google

juventutem studiosam in Elementa Matheseos Purae elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaeque huic propria introducendi. M. Vásárhely. 1832—3. und durch Lobatschewsky*) vorzugsweise in der Schrift: „Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien, von Nicolaus Lobatschewsky, kaiserl. russ. wirkl. Staatsrath und ordentl. Prof. der Mathematik bei der Universität in Kasan. Berlin. 1840." erhalten. — Von dieser letzteren Schrift nun hat Herr Hoüel die vorliegende verdienstliche französische Uebersetzung geliefert, die dadurch noch einen besonderen Vorzug erhalten hat, dass der Herr Uebersetzer ihr auch eine Uebersetzung aller der interessanten Briefe beigefügt hat, welche zwischen Gauss und Schumacher über die Theorie der Parallelen gewechselt, und durch die verdienstliche, von Herrn Peters veranstaltete Herausgabe dieser Briefe neuerlich bekannt geworden sind. — Mögen sich daher die Leser die beachtenswerthe Schrift des Herrn Hoüel recht sehr empfohlen sein lassen.

Physik.

Zeitschrift der österreichischen Gesellschaft für Meteorologie. Redigirt von Dr. C.**) Jelinek und J. Hann. I. Band. Nr. 13—24.

Es freut uns sehr, dass diese neue, so verdienstliche Zeitschrift, über deren frühere Nummern der Literar. Ber. Nr. CLXXXI. S. 9. zu vergleichen ist, so rüstig fortschreitet, indem der erste Band in seinen 24 Nummern nun vollendet vor uns liegt. Neben einer grossen Menge kleinerer Notizen enthalten die jetzt vorliegenden 12 Nummern eine nicht geringe Anzahl grösserer allgemein interessanter Abhandlungen, wie z. B.: Der Verdunstungsmesser (Atmometer) in seiner einfachsten Form von Prestel. — Die Bora und der Tauernwind von Prettner. — Zur Frage über den Ursprung des Föhn von Hann. — Ueber die Temperaturverschiedenheit zweier ungleich hoher Luftschichten von Ragona-Scinà in Modena. — Ueber die Sicherheit ozonometrischer Bestimmungen nach Fremy und Cantoni. — Ueber einige neuere meteorologische Instrumente. — Ueber telegraphische Witterungs-

---

*) Geboren zu Nijnéi-Novogorod im Jahre 1793, gestorben in Kasan im Jahre 1856.

**) Im Literar. Ber. Nr. CLXXXI. S. 9. steht falsch „G. Jelinek."

berichte in Russland. — Einfluss der Sternschnuppen-Schwärme am 12. November auf den Barometerstand von C. Fritsch; wobei wir natürlich alles Interessante hier nicht namhaft machen können.

Auch von Band II. Redigirt von C. Jelinek. liegen uns bereits 6 Hefte vor, aus denen wir Folgendes herausheben: Der Erdstrom und die Telegraphenströme von Lamont. — Ueber die mit der Höhe zunehmende Temperatur in der untersten unmittelbar auf der Erde ruhenden Luftschicht von Prestel. — Ueber die Frage der Wahrscheinlichkeit von zwei Winterkälte-Polen auch auf der Süd-Hemisphäre von Mühry. — Beobachtungen des grossen Meteorschwarmes in der Nacht vom 13. bis 14. November 1866 (sehr interessante Zusammenstellung). — Die Erdgürtel der subtropischen Winterregen, ihre geographische Begrenzung und Beiträge zu ihrer Charakteristik von Hann. — Zur Frage über den Einfluss der Sternschnuppen auf den Barometerstand von Fritsch. — Ueber das Anemometer von Kraft, von Jelinek (mit Abbildung). — Zu den Betrachtungen über die Bora von Lorenz. — Ueber den Sturm vom 14—16. Januar 1867 und die Sturmwarnungen von Jelinek. — Wald und Regen von Hann. — Möge das verdienstliche Unternehmen immer den erfreulichsten Fortgang haben!

Vermischte Schriften.

Annali di Matematica pura ed applicata pubblicati da Barnaba Tortolini e compilati da E. Betti a Pisa, F. Brioschi a Milano, A. Genocchi a Torino, B. Tortolini a Roma. (Vergl. Literar. Ber. Nr. CLXXXII. S. 12).

Tom. VII. Nr. 6. Estratto di una lettera scritta in lingua italiana il di 21 Gennaio 1864 dal. Sig. Bernardo Riemann al Sig. Professore Enrico Betti. p. 281. — Moto di un punto materiale lungo un arco della Lemniscata Bernoulliana. Nota del Sig. M. Azarelli. p. 284.

Rivista bibliografica. Risoluzione di un Problema relativo all' equazioni di terzo grado. Articolo del Prof. Barnaba Tortolini. p. 297. (Die hier aufgelöste Aufgabe, die wir auch unseren Lesern zur Bearbeitung empfehlen möchten, ist folgende: Wenn eine Gleichung des dritten Grades gegeben ist, so soll die Gleichung gefunden werden, deren Wurzeln die Verhältnisse je zweier Wurzeln der gegebenen Gleichung sind. Wenn also die Gleichung des dritten Grades

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

gegeben ist, und α, β, γ die drei Wurzeln derselben sind, so soll die Gleichung gefunden werden, welche die Verhältnisse

$$\frac{\alpha}{\beta},\ \frac{\beta}{\alpha},\ \frac{\alpha}{\gamma},\ \frac{\gamma}{\alpha},\ \frac{\beta}{\gamma},\ \frac{\gamma}{\beta}$$

zu Wurzeln hat). — Pubblicazioni recenti.

Nach der Anzeige, welche die Leser am Ende dieses Literarischen Berichts finden, werden die Annali di Matematica pura ed applicata von jetzt an von den Herren Brioschi und Cremona in Mailand herausgegeben werden. Wie grossen Dank die Wissenschaft den Herren Betti, Genocchi und namentlich Herrn Tortolini für die bis jetzt herausgegebenen, so vieles Treffliche enthaltenden sieben ersten Bände schuldet, kann Niemand mehr erkennen als der Unterzeichnete; Herr Tortolini hat schon früher sich durch die Herausgabe der Annali di Scienze matematiche e fisiche, von denen acht Bände erschienen sind, sehr verdient gemacht. In bessere Hände, als in die der Herren Brioschi und Cremona, konnte die Fortsetzung der neueren „Annali" nicht gelegt werden. Grunert.

Giornale di Matematiche ad uso degli studenti delle università italiane, pubblicato per cura del Prof. Battaglini. Napoli. (S. Literar. Ber. Nr. CLXXXII. S. 12).

Anno IV. Novembre e Dicembre 1866. Di una proprietà dell' iperboloide; per A. Mogni. p. 321. — Sopra il pendolo ad oscillazioni coniche; per A. Mogni. p. 327. — Sopra le diverse espressioni della forza acceleratrice nella teoria delle forze centrali; per A. Mogni. p. 339. — Quistione. p. 344. — Nota intorno ad una proposizione della teoria dei numeri del Dottore Piuma Carlo Maria. p. 345. — Sulla rotazione di un sistema di tre masse che verificano la legge delle aree; per A. de Gasparis. Continuazione alle note precedenti. Vedi p. 202. e vol. III. p. 257, p. 344, p. 348. — Moto di un sistema invariabile di punti materiali esistenti in un piano intorno al centro di gravità; per A. de Gasparis. p. 353. — Soluzioni della questione 48. (Vedi p. 293). Soluzione del Antonio Tarlasco. p. 359. Soluzione di Giulio Ascoli. p. 360. — Soluzione delle questioni 52 e 54; per Ernesto Padova. p. 361. — Soluzione delle quistioni 52 e 53; per Gabriele Torelli. p. 367. — Soluzione della questione 54; per A. Armenante. p. 369. — Saggio elementare di Geometria

Digitized by Google

della sfèra del Dot. P. Cassani (Continuazione. Vedi p. 237). Questione. E. Fergola. p. 380.

Anno V. Gennaio e Febbraio 1867. Sullo sviluppo delle funzioni fratte razionali; per N. Trudi. p. 1. — Di una proprietà delle linee a doppia curvatura; per E. Beltrami. p. 21. — Intorno ad una trasformazione di variabili; per E. Beltrami. p. 24. — Soluzione della quistione 55; per A. Armenante. p. 28. — Soluzione della quistione 52; per A. Bonolis. p. 30. — Programmi di Concorso. p. 32. — Annunzio Bibliografico. p. 33. — Nota sulla riduzione alla forma canonica delle quadratiche; per C. Sardi. p. 35. — Sulle forme binarie dei primi quattro gradi, appartenenti ad una forma ternaria quadratica; per G. Battaglini. p. 39. — Notizia Universitaria. p. 56. — Soluzioni delle quistioni 49, 50; per A. Mogni e L. Rajola. p. 57. — Soluzione di una questione proposta nell' Educational Times; per V. Mollame. p. 63.

Berichtigung.

Im Literar. Ber. Nr. CLXXVIII. (Theil 45). S. 19. ist die schöne Abhandlung: „Sur quelques transformations d'intégrales définies“ von Herrn C. F. E. Björling in der immer so vieles Treffliche enthaltenden „Upsala Universitets Årsskrift“ angezeigt worden. Herr E. G. Björling, Lector am Gymnasium in Westerås, welchem das Archiv bekanntlich eine nicht geringe Anzahl sehr schöner Aufsätze verdankt, hat in einem überaus freundlichen Briefe vom 28. Januar 1867 mich darauf aufmerksam zu machen die Güte gehabt, dass die genannte Abhandlung nicht — wie es nach der Fassung meiner Anzeige allerdings leicht den Anschein haben kann, und in der That auch wohl von mir irrthümlich bei der Abfassung jener Anzeige angenommen worden sein mag — von ihm herrührt, sondern vielmehr seinen Sohn, Herrn Dr. Carl Fabian Emanuel Björling, Docent i Mathematik an der Universität zu Upsala, zum Verfasser hat. Indem es mir Freude macht, durch Herrn E. G. Björling, den Vater, zu der vorstehenden Berichtigung in den Stand gesetzt worden zu sein, kann ich dem Vater zu einem solchen Sohne, wie dem Verfasser der genannten Abhandlung, nur aus dem Grunde meines Herzens Glück wünschen, und der fortdauernden Freundschaft beider trefflichen Männer mich angelegentlichst empfehlen. Grunert.

Digitized by Google

superficie d'ordine qualunque assoggettate a passare per punti dati, a toccare piani dati o a toccare rette date (condizioni queste tante, meno una, quante sono necessarie affinchè quelle superficie siano del tutto determinate) si possa conoscere in ogni caso il numero delle superficie del sistema che passano per un punto dato, quello delle superficie che toccano un piano dato, e finalmente quello delle superficie che toccano una retta data.

II.

L'Accademia conferirà un secondo premio di lire seicento all'autore della migliore memoria sul seguente programma:

É ben conosciuta la importanza in molte ricerche di alta analisi del fattore *irriduttibile* di un equazione binomia; vale a dire di quel fattore che, eguagliato a zero, ha per radici tutte ed esse soltanto le radici primitive di quell'equazione. Il Cauchy diede per il primo un metodo per trovare l'espressione del detto fattore nel caso generale in cui il grado dell'equazione binomia è un numero composto qualunque; ma questo metodo non è diretto, o per parlare più esattamente non porge il mezzo per calcolare immediatamente i coefficienti del fattore; mentre risulta da una funzione di forma frazionaria, la quale esige divisioni ed altri sviluppi, per cui resta ignorata la legge de' coefficienti medesimi.

Più tardi l'illustre Dirichlet ottenne di far emergere quel fattore dal prodotto di due altri fattori incommensurabili, che determina con grande eleganza; ma la soluzione del Dirichlet non è generale, essendo limitata al caso in cui il grado dell'equazione binomia è un numero *dispari*, e di più risultante dal prodotto di numeri primi disuguali, cosicchè niuno di essi vi si trovi a potenza superiore alla prima.

Si domanda adunque una formola che potesse dare esplicitamente il coefficiente di un termine qualunque del fattore irriduttibile. Ol anche di rendersi generale la soluzione del Dirichlet.

Condizioni. 1°. Le memorie dovranno essere scritte in italiano, latino, o francese, e dovranno inviarsi al Segretario dell' Accademia non più tardi del mese di marzo del 1868.

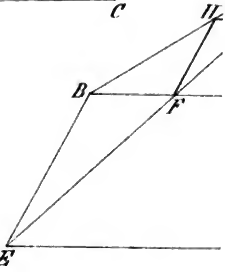
2°. Esse non debbono portare il nome dell'Autore, e debbono essere distinte con un motto il quale dovrà essere ripetuto sopra una scheda suggellata che conterrà il nome dell'Autore.

3°. Le memorie premiate saranno pubblicate negli Atti dell'Accademia, e gli Autori avranno dritto a cento copie delle medesime.

4°. Tutte le memorie inviate pel concorso ai premii si conserveranno nell'Archivio dell'Accademia, e soltanto si permetterà di estrarne copia a chi le avrà presentate.

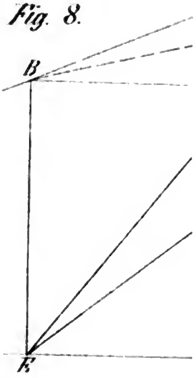
Digitized by Google

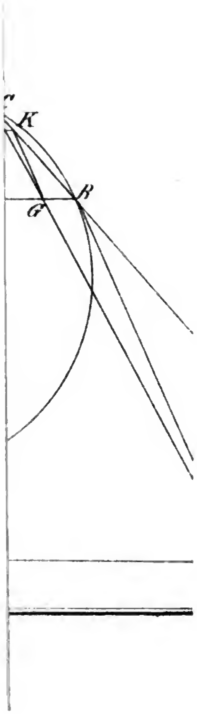
Fig. 3.



Digitized by Google

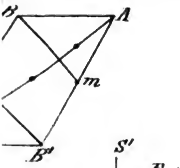
Fig. 8.

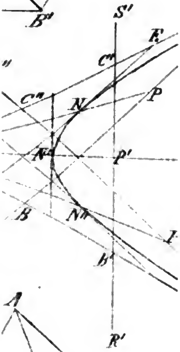


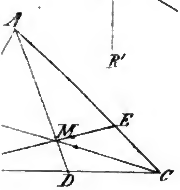


Digitized by Google

Digitized by Google







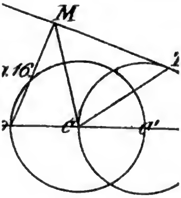
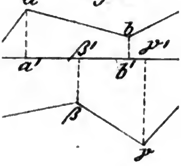
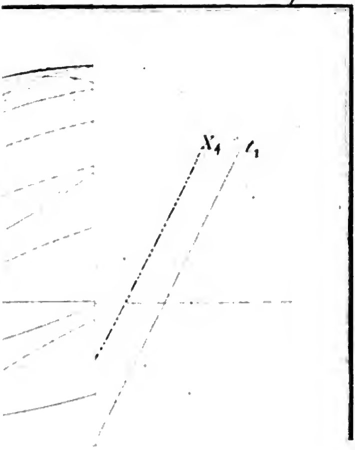


Fig. 12.



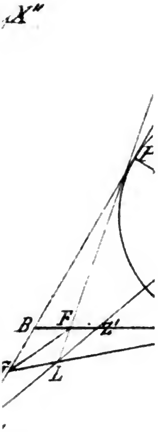
Digitized by Google

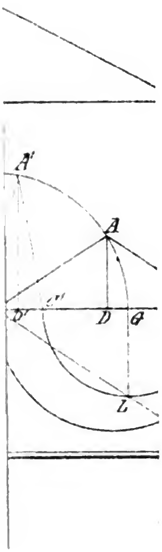
Taf. II.



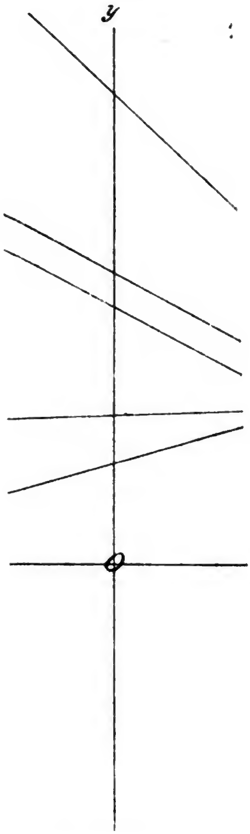
Digitized by Google

Fi





Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Fig. 3.

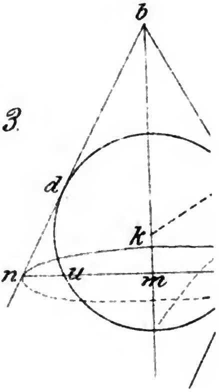
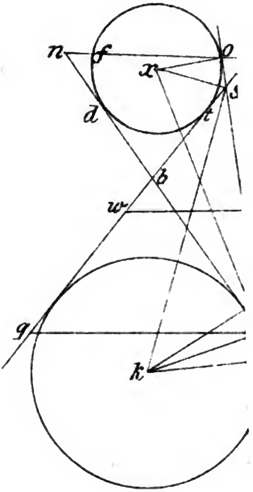
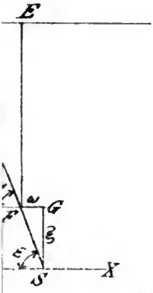


Fig. 5.



Digitized by Google



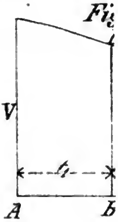
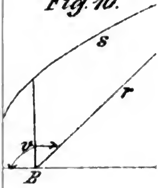


Fig. 10.



Fortsetzu

Digitized by Go

m Taf. VIII.

r. 12.

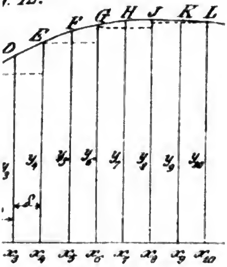
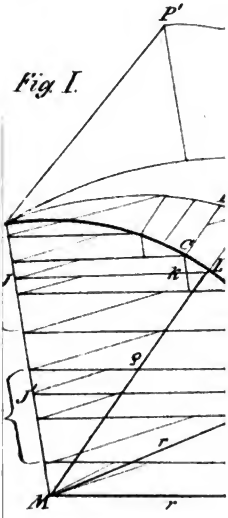


Fig. I.



Digitized by Google

FEB 8 1923

Digitized by Google

3 2044 10

Digitized by Google